Ljubomir Kuljača
Zoran Vukić

AUTOMATSKO UPRAVLJANJE SISTEMIMA



ŠKOLSKA KNJIGA – ZAGREB

UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU
MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGRABIENSIS



Urednik

Dr Želimir Matutinović

Recenzenti

Dr Milić Stojić
Dr Tugomir Šurina

Lektor

Tatjana Ivančić

Objavljivanje ovog sveučilišnog udžbenika odobrilo je Predsjedništvo Skupštine Sveučilišta u Zagrebu rješenjem broj 01-1074/1-84 od 26. rujna 1984.

Izdavač: „Školska knjiga", Zagreb, Masarykova 28 – Za izdavača: dr Josip Malić – Grafički urednik: Marijan Goršić – Korektor: Ante Terzić – Tiskanje dovršeno rujna 1985. u nakladi 1500 primjeraka.

Nacionalna i sveučilišna bibilioteka, Zagreb Katalogizacija na izvoru:

65.011.56+621.391] (075.8)

KULJAČA, Ljubomir
Automatsko upravljanje sistemima: analiza linearnih sistema / Ljubomir Kuljača, Zoran Vukić. – Zagreb: Školska knjiga, 1985. – XII, 516 str.: graf. prikazi; 24 cm. – (Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu = Manualia Universitatis studiorum Zagrabiensis)

Nakl. 1500 primj. – Popis oznaka: str. X – XI. – Bibliografija: str. 512 – 514. – Predmetno kazalo

Tisak „BIROGRAFIKA" Subotica

Ljubomir Kuljača
Zoran Vukić

AUTOMATSKO UPRAVLJANJE SISTEMIMA

ANALIZA LINEARNIH SISTEMA



ŠKOLSKA KNJIGA – ZAGREB 1985

PREDGOVOR

U ovom se udžbeniku obrađuju postupci analize linearnih kontinuiranih i diskretnih sistema automatskog upravljanja. Koncipiran je prema nastavnom planu ETF-a u Zagrebu, smjer „Automatika“; udžbenik također obuhvaća dio sadržaja iz područja analize linearnih regulacijskih sistema za smjerove „Industrijska elektronika“ i „Elektrostrojarstvo i automatizacija“, a korisno može poslužiti i studentima odgovarajućih viših škola i fakulteta, gdje je potrebno usvojiti određena znanja iz područja teorije automatskog upravljanja sistemima.

Sadržajem udžbenika obuhvaćeni su postupci analize linearnih stacionarnih determiniranih sistema automatskog upravljanja u frekvencijskoj i vremenskoj domeni. Sva teorijska razmatranja popraćena su odgovarajućim primjerima.

Radi lakšeg razumijevanja i savladavanja gradiva, udžbenik je kompletiran prilozima koji sadrže potrebne grafičke prikaze, nomograme, tablice i matematičke podsjetnike.

Zagreb, travnja 1982. *Autori*

SADRŽAJ

POPIS OZNAKA

$\underline{A}$ ... matrica sistema (matrica koeficijenata)

$a(p)$ ... karakteristični polinom zatvorenog sistema

$A(j\omega)$ ... karakteristični vektor zatvorenog sistema

$A(p)$ ... karakteristična jednadžba zatvorenog sistema

$A(\omega)$ ... amplitudna frekvencijska karakteristika

A_i ... amplituda i-tog harmonika

$A.O.$ ... amplitudno osiguranje stabilnosti

$\underline{B}$ ... matrica upravljanja (matrica raspodjele)

$\underline{B}_n$ ... matrica upravljivosti

$B(\omega)$ ... realni dio inverzne frekvencijske karakteristike otvorenog kruga

$\underline{C}$ ... matrica izlaza (matrica mjerenja)

$c(p)$ ... karakteristični polinom otvorenog sistema

$C(j\omega)$ ... karakteristični vektor otvorenog sistema

$C(\omega)$ ... imaginarni dio inverzne frekvencijske karakteristike otvorenog kruga

$\underline{C}_n$ ... matrica osmotrivosti

C_i ... koeficijent regulacijskog odstupanja SAU ($i=0, 1, 2, \ldots$)

$\tilde{C}_i$ ... koeficijent regulacijskog odstupanja diskretnog sistema ($i=0, 1, 2, \ldots$)

$\bar{C}_i$ ... koeficijent regulacijskog odstupanja diskretnog sistema ($i=0, 1, 2, \ldots$)

C_0 ... koeficijent statičkog (pozicionog) odstupanja ili koeficijent odstupanja po položaju

C_1 ... koeficijent regulacijskog odstupanja po brzini

C_2 ... koeficijent regulacijskog odstupanja po ubrzanju

c_k ... Fourierovi koeficijenti

d ... dekrement prigušenja

$\underline{D}$ ... ulazno-izlazna matrica

D ... operator deriviranja

$D(j\omega)$ ... karakteristični vektor zatvorenog sistema

D_a ... koeficijent dobrote po ubrzanju

D_v ... koeficijent dobrote po brzini

D_a^* ... koeficijent dobrote diskretnog sistema po ubrzanju

D_v^* ... koeficijent dobrote diskretnog sistema po brzini

Δ ... statička točnost

Δ^n ... n-ta diferencija

$\Delta_T(p)$ ... L-transformacija funkcije $\delta_T^*(t)$

$\delta(t)$ ... jedinična impulsna (delta) funkcija

$\delta_T^*(t)$ ... idealna funkcija diskretiziranja (idealni impulsni niz)

$\underline{E}$ ... matrica poremećaja

$E(s)$ ... regulacijsko odstupanje u s-području

$E(z)$ ... regulacijsko odstupanje u z-području

e_k ... regulacijsko odstupanje diskretnog sistema

$e^{\underline{A}t}$ ... eksponencijalna matrica

$e^{\underline{\Lambda}t}$ ... modalna prijelazna matrica

$\varepsilon(t)$ ... signal razlike

$\varepsilon_f(t)$ ... komponenta signala razlike nastala zbog djelovanja poremećajnih veličina

$\varepsilon_u(t)$ ... komponenta signala razlike nastala zbog djelovanja vodeće veličine

$\varepsilon_d(t)$ ... regulacijsko odstupanje SAR

$\varepsilon_d(t)^{-1}$ ... točnost SAR

ε_a ... regulacijsko odstupanje po ubrzanju

ε_{din} ... dinamičko regulacijsko odstupanje

ε_i ... regulacijsko odstupanje po i-toj derivaciji

ε_{kin} ... kinetičko regulacijsko odstupanje

ε_O ... regulacijsko odstupanje po položaju

ε_{st} ... statičko regulacijsko odstupanje

ε_v ... regulacijsko odstupanje po brzini

$\underline{f}$ ... vektor poremećajnih veličina

f_s ... frekvencija diskretiziranja

$f_i(t)$ ... i-ta poremećajna veličina ($i=1, 2, \ldots$)

$F_i(s)$ ... L-transformacija i-te poremećajne veličine

φ ... fazni pomak

$\varphi(\omega)$ ... fazna frekvencijska karakteristika

$\varphi_o(\omega)$ ... fazna frekvencijska karakteristika otvorenog kruga

$\varphi_F(\omega)$ ... fazna frekvencijska karakteristika fiksatora

$\Phi(s)$ ... funkcija osjetljivosti sistema

$\underline{\Phi}(s)$ ... resolventna matrica

$\underline{\Phi}(t)$ ... prijelazna matrica stanja (temeljna matrica)

$\underline{\Phi}_n(k)$ ... prijelazna matrica diskretnog sistema u kanonskom obliku

$g(t)$ ... impulsna prijelazna funkcija (impulsni odziv, težinska funkcija)

$g_f(t)$ ... težinska funkcija fiksatora

$G(j\omega)$ ... frekvencijska prijenosna funkcija (amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika)

$G^{-1}(j\omega)$ ... inverzna frekvencijska prijenosna funkcija

$G^*(j\omega)$ ... amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika diskretnog sistema

$G(s)$ ... prijenosna funkcija (funkcija prijenosa)

$\bar{G}(q)$ ... normirana prijenosna funkcija

$G(z)$ ... Z-prijenosna funkcija

$G_B(s)$ ... prijenosna funkcija objekta regulacije

$G_\delta(s)$ ... prijenosna funkcija dijela sistema s promjenjivim parametrom

$G_e(s)$ ... prijenosna funkcija sistema za signal razlike s obzirom na vodeću veličinu

$G_{ef}(s)$ ... prijenosna funkcija sistema za signal razlike u odnosu na poremećajnu veličinu

$G_{ekv}(s)$ ... prijenosna funkcija ekvivalentnog kontinuiranog dijela diskretnog sistema
$G_e(z)$ ... Z-prijenosna funkcija regulacijskog odstupanja u odnosu na vodeću veličinu
$G_e^*(s)$ ... diskretna prijenosna funkcija regulacijskog odstupanja u odnosu na vodeću veličinu
$\underline{G}_F(s)$ ... prijenosna funkcija fiksatora
$\overline{G}_F(q)$ ... normirana prijenosna funkcija fiksatora
$G_F(j\omega)$ ... frekvencijska prijenosna funkcija fiksatora
$G_o(s)$ ... prijenosna funkcija otvorenog sistema
$G_o(j\omega)$ ... frekvencijska prijenosna funkcija otvorenog kruga (frekvencijska karakteristika otvorenog sistema)
$G_o(z)$ ... Z-prijenosna funkcija otvorenog diskretnog sistema
$\underline{G}_o(s)$ ... prijenosna matrica otvorenog sistema
$\underline{G}_o(z)$ ... diskretna prijenosna matrica otvorenog sistema
$G_R(s)$ ... prijenosna funkcija regulatora
$G_z(j\omega)$ ... frekvencijska prijenosna funkcija zatvorenog sistema (frekvencijska karakteristika zatvorenog sistema)
$G_z(s)$ ... prijenosna funkcija zatvorenog sistema (glavni operator sistema)
$G_z(\omega)$ ... amplitudna frekvencijska karakteristika zatvorenog sistema
$G_z(z)$ ... Z-prijenosna funkcija zatvorenog diskretnog sistema
$G_{zf}(s)$ ... prijenosna funkcija zatvorenog sistema u odnosu na poremećajnu veličinu
$G_{zm}(\omega)$ ... maksimalni iznos amplitudne frekvencijske karakteristike zatvorenog sistema
$\underline{G}_z(s)$ ... prijenosna matrica zatvorenog sistema
γ ... fazno osiguranje stabilnosti
$h(t)$ ... prijelazna funkcija (odskočni odziv)
$h_{i\max}$ ... iznos i-tog maksimuma
$h_{\max}$ ... maksimalni iznos prijelazne funkcije
$i^*(t, \tau)$ ... realna funkcija diskretiziranja (niz jediničnih impulsa širine τ)
I_1 ... funkcional linearne integralne ocjene
I_{10} ... funkcional linearne integralne ocjene
I_K ... funkcional kvadratne integralne ocjene
I_2 ... funkcional kvadratne integralne ocjene
I_3 ... funkcional kvadratne integralne ocjene
$\underline{I}$ ... jedinična matrica
$\underline{J}$ ... Jordanova kanonska matrica
K ... koeficijent pojačanja
K_{gr} ... granični koeficijent pojačanja
l ... broj nemjerljivih poremećajnih veličina
$\underline{L}$ ... Hermitska matrica (pozitivno određena)
$L(\omega)$ ... logaritamska amplitudna frekvencijska karakteristika
$\underline{\Lambda}$ ... kanonska matrica sistema
λ_i ... karakteristična vrijednost sistema
m ... broj upravljajućih (ulaznih, vodećih) veličina
M ... pokazatelj oscilatornosti
$\underline{M}$ ... modalna matrica
$\underline{m}_j$ ... karakteristični vektor
$M(\omega)$ ... amplitudna frekvencijska karakteristika sistema zatvorenog jediničnom povratnom vezom
n ... broj varijabli stanja sistema (red sistema)
N ... broj oscilacija
$N(\lambda)$ ... karakteristična jednadžba matrice A
$N(\omega)$ ... fazna frekvencijska karakteristika sistema zatvorenog jediničnom povratnom vezom
ω ... imaginarni dio korijena karakteristične jednadžbe sistema; kružna frekvencija; frekvencija oscilacija
ω^* ... apsolutna pseudofrekvencija
ω_c ... frekvencija presjeka
ω_{gr} ... granična frekvencija; propusni frekvencijski opseg sistema
ω_m, $\omega_{\max}$ ... rezonantna frekvencija
ω_0 ... prirodna frekvencija sistema
ω_s ... kružna frekvencija diskretiziranja
ω_π ... frekvencija oscilacija na rubu stabilnosti ($\varphi = -\pi$); $\omega_\pi = \omega_0$
Ω ... brzina vrtnje
$\underline{P}$ ... matrica diskretnog sistema
$P(\omega)$ ... realni dio frekvencijske karakteristike sistema zatvorenog jediničnom povratnom vezom
q ... normirana kompleksna frekvencija
$\underline{Q}$ ... matrica upravljanja diskretnog sistema
$Q(\omega)$ ... imaginarni dio frekvencijske karakteristike zatvorenog jediničnom povratnom vezom
r ... broj mjerljivih poremećajnih veličina
s ... kompleksna varijabla (frekvencija); L – operator
s_i ... i-ti korijen karakteristične jednadžbe sistema ($i = 1, 2, \ldots n$)
$S(t)$ ... jedinična odskočna (skokovita, step) funkcija
$S(\delta)$ ... područje početnih uvjeta sistema
$S(\varepsilon)$ ... područje konačnih stanja sistema (oblast dopuštenih otklona poremećajnog stanja)
$S(\gamma)$ ... oblast stacionarnih iznosa razlika između poremećajnog i neporemećajnog stanja
$S(s)$ ... funkcija osjetljivosti
$S(R)$ ... područje u kojem se razmatra stabilnost sistema
$S_\delta(s)$ ... osjetljivost sistema
σ ... realni dio korijena karakteristične jednadžbe sistema

σ_m ... nadvišenje; relativni maksimum prijelazne funkcije
T ... period diskretiziranja; vremenska konstanta
T_i ... vremenska konstanta ($i=1, 2, \ldots$)
t_m ... vrijeme prvog maksimuma
t_r ... vrijeme porasta (rasta)
t_s ... vrijeme smirivanja (reguliranja)
τ ... trajanje impulsa; vremenska konstanta kašnjenja; vremenska konstanta
τ_{gr} ... granični iznos vremena kašnjenja
θ ... fazni pomak
$\underline{u}(t)$ ... vektor upravljanja
$\underline{u}(k)$ ... vektor upravljanja diskretnog sistema
$u(t)$ ... vodeća (upravljajuća, ulazna) veličina sistema
$u^*(t)$ ... diskretni signal vođenja; diskretni signal
$U(\omega)$ ... realni dio frekvencijske karakteristike sistema (otvorenog)
$U(s)$ ... L – transformacija upravljajućeg signala
v ... relativna pseudofrekvencija
$\underline{v}(t)$ ... vektor vodećih veličina (vektor vođenja)
$V(\omega)$ ... imaginarni dio frekvencijske karakteristike sistema (otvorenog)
w ... kompleksna varijabla (pseudofrekvencija)
$w(t)$ ... varijacija procesa
$\underline{W}$ ... Vandermondova matrica
z ... kompleksna varijabla
$\underline{z}$ ... vektor mjerljivih poremećajnih veličina; vektor kanonskih varijabli stanja
ξ ... koeficijent prigušenja
$\underline{x}(t)$ ... vektor stanja; vektor poremećajnog stanja
$\underline{x}(k)$ ... vektor stanja diskretnog sistema
$\underline{x}^*(k)$ ... vektor kanonskih varijabli stanja diskretnog sistema
$\underline{x}_r(t)$ ... vektor ravnotežnog stanja sistema; vektor neporemećajnog stanja
$X(\omega)$ ... realni dio karakteristične jednadžbe zatvorenog kruga
$\underline{y}(t)$ ... vektor izlaza (izlaznih, upravljanih, reguliranih veličina sistema)
$\underline{y}(k)$ ... vektor izlaza diskretnog sistema
$y(t)$ ... regulirana (izlazna) veličina sistema
$y^*(t)$ ... diskretni izlazni signal
$y_f(t)$ ... komponenta izlaznog signala koja nastaje zbog djelovanja poremećajnih veličina
$y_r(t)$ ... izvršna veličina
y_k ... diskretizirani signal
y_{max} ... maksimalni otklon izlazne veličine
$y(\infty)$ ... stacionarni iznos izlaznog signala
$Y(\omega)$ ... imaginarni dio karakteristične jednadžbe zatvorenog kruga
$Y^*(s)$ ... diskretna L – transformacija funkcije $y^*(t)$
∇^n ... n-ta diferencija



OSNOVNI POJMOVI I PRINCIPI AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA SISTEMIMA

1.1. Suština automatskog upravljanja

Svrsishodni procesi koje čovjek obavlja da bi zadovoljio razne potrebe predstavljaju organiziran uređen skup djelovanja sastavljen od *radnih operacija i operacija upravljanja*.

U radne operacije ubrajaju se djelovanja neposredno određena prirodnim zakonima i nužna za realizaciju zadanog procesa. Za pravilno i kvalitetno odvijanje procesa prijeko je potrebno usmjeravati radne operacije s djelovanjima druge prirode, tj. operacijama upravljanja. Ove operacije osiguravaju početak, redoslijed i završetak pojedinih radnih operacija, osiguravaju odvijanje procesa sa stajališta iznosa neophodnih parametara te opskrbljivanja potrebnom energijom i materijalom. Sve operacije upravljanja čine *proces upravljanja*.

Radne operacije i operacije upravljanja mogu se djelomično ili u potpunosti izvršavati tehničkim uređajima. Zamjena čovječjeg rada u radnim operacijama tehničkim uređajima naziva se *mehanizacijom*, a zamjena čovječjeg rada u operacijama upravljanja tehničkim uređajima naziva se *automatizacijom*. Tehnički uređaji koji vrše operacije upravljanja nazivaju se *automatskim uređajima*. Sa stajališta upravljanja, ukupna tehnička sredstva (strojevi, sredstva rada, sredstva mehanizacije i sl.) potrebna pri realizaciji zadanog procesa imaju naziv *objekt upravljanja*. Sva sredstva upravljanja i objekta upravljanja čine *sistem upravljanja*. Sistem u kojem sve radne operacije i operacije upravljanja realiziraju automatski uređaji naziva se *sistemom automatskog upravljanja* (SAU). Sistem u kojem je automatiziran samo dio operacija, a najvažnije operacije obavlja čovjek, ima naziv *poluautomatski* (djelomično automatizirani) *sistem*.

Svaki tehnički proces karakterizira se cjelokupnošću fizikalnih veličina koje se nazivaju *pokazateljima*, *koordinatama*, a ponekad *parametrima procesa*. Termin *parametar* nije prikladno upotrebljavati jer se njime obično označavaju fizičke konstante uređaja. Za realizaciju upravljanja i gradnju sistema upravljanja nužno je poznavati procese, tehnologije procesa te opće principe i metode upravljanja raznim objektima i procesima.

Realizacija funkcija upravljanja i kontrole uvijek je povezana s nizom operacija logičkog i matematičkog karaktera, što pripada sferi umnog rada čovjeka.

Primjenom automatizacije u rješavanju logičkih i matematičkih operacija olakšava se umni rad čovjeka, što rezultira efikasnijim korištenjem njegovih sposobnosti. Općenito, primjenom automatizacije mijenja se karakter rada i stvaraju se realni uvjeti za izjednačenje umnog i fizičkog rada. U vezi s pojavom i razvojem automatskih uređaja razvilo se i novo područje nauke i tehnike – *automatika*.

Automatika na današnjem stupnju razvoja jest znanstvena disciplina koja tretira cjelokupne mehanizme i uređaje koji rade automatski. Automatika sadrži teoriju automatskog upravljanja, zajedno s teorijskim i primijenjenim postupcima pri gradnji i organizaciji funkcioniranja odgovarajućih tehničkih sredstava (procesna računala, uređaji za upravljanje, davači, izvršni mehanizmi, sistemi čovjek – stroj itd.). L [45, 74]

Teorija elemenata automatike i teorija automatskog upravljanja međusobno su tijesno povezane i čine jedinstvenu cjelinu pri projektiranju automatskih sistema.

U suvremenoj tehnici koristi se vrlo velik broj automatskih uređaja i sistema međusobno različitih po fizičkoj prirodi, principu rada, konstrukcijskim karakteristikama, namjeni itd. Svi uređaji i sistemi u pravilu su namijenjeni rješavanju osnovnih zadataka kao što su signalizacija, kontrola, blokada i zaštita, upuštanje (zaustavljanje) i upravljanje.

Sistemi automatske signalizacije namijenjeni su izvještavanju o radu pojedinih postrojenja, odnosno o toku odvijanja pojedinih procesa.

Sistemi automatske kontrole kontroliraju različite parametre i veličine kojima je karakteriziran rad tehničkih postrojenja odnosno odvijanje procesa.

Sistemi automatske blokade i zaštite namijenjeni su automatskoj djelomičnoj ili potpunoj blokadi pojedinog postrojenja radi njegove zaštite od težih posljedica neželjenog ispada iz stroja.

Sistemi automatskog upuštanja i zaustavljanja osiguravaju upuštanje, zaustavljanje i reverziranje različitih motora i pogona prema unaprijed zadanom programu.

Sistemi automatskog upravljanja namijenjeni su upravljanju postrojenjima odnosno procesima bez neposrednog sudjelovanja čovjeka.

Upravljanjem u najširem smislu naziva se organizacija nekog procesa kojim se postiže postavljeni cilj. S obzirom na namjenu svi sistemi automatskog upravljanja mogu se podijeliti na sisteme automatske regulacije (SAR) i na kibernetske sisteme.

Sistemi automatske regulacije predstavljaju jednostavnije SAU, koji rješavaju zadatke regulacije rada tehničkih uređaja i postrojenja.

Kibernetski sistemi namijenjeni su rješavanju zadataka znatno složenijih od zadataka automatske regulacije. Kao primjer složenijih zadataka mogu se navesti: ekstremalno upravljanje, adaptivni sistemi, sistemi koji uče itd. Ovi sistemi bitno povećavaju mogućnosti suvremene automatike. U suvremenim tehničkim rješenjima praktički su najvažniji i najrasprostranjeniji sistemi automatske regulacije, pa će i daljnja izlaganja biti posvećena teoriji automatske regulacije linearnih sistema.

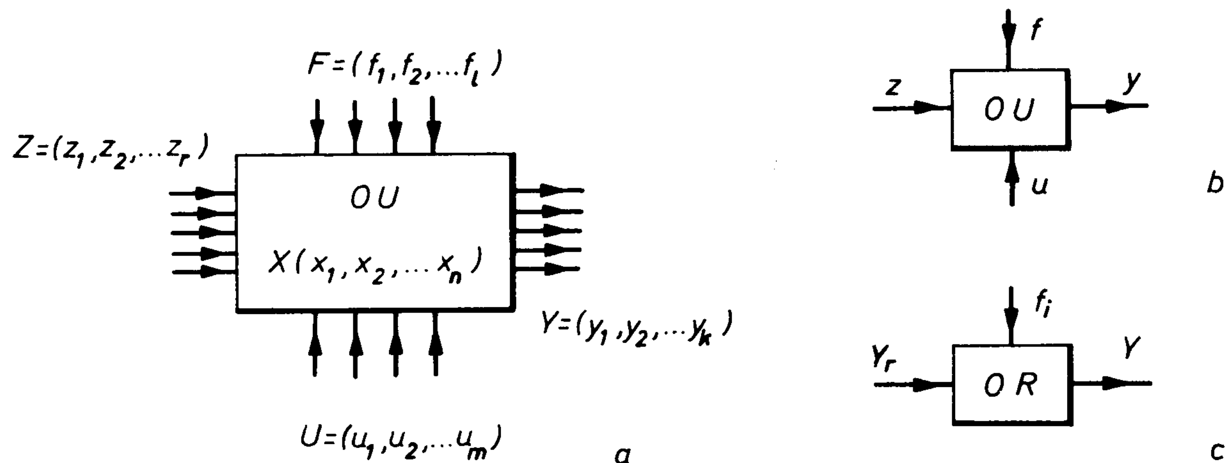
Za pravilno i kvalitetno vođenje procesa neke od koordinata – upravljajuće koordinate – moraju se održavati u određenim granicama ili se moraju mijenjati po određenom zakonu. Nužno upravljanje iznosima koordinata javlja se u slučajevima kada normalno odvijanje procesa narušavaju poremećaji različite prirode (promjenljivo opterećenje, utjecaji vanjske sredine, smetnje unutar sistema i sl.).

1.2. Objekt automatskog upravljanja

Pri rješavanju bilo kojeg zadatka upravljanja nužno je poznavati svojstva objekta upravljanja. Stanje objekta određeno je unutarnjim svojstvima objekta i vanjskim djelovanjima na objekt. U vanjska djelovanja ubrajaju se razne poremećajne veličine i upravljajuće veličine. Općenito, poremećajne veličine slučajnog su karaktera, a neke je moguće pratiti i tokom odvijanja procesa rada sistema.

Veličine koje karakteriziraju djelovanje i stanja objekta upravljanja (OU) shematski su prikazana na sl. 1.1.a, b.

Skup mjerljivih poremećajnih veličina označen je vektorom $z = \{z_1, z_2, \ldots z_r\}$; skup nemjerljivih poremećajnih veličina prikazan je vektorom $f = \{f_1, f_2, \ldots f_l\}$; skup upravljajućih djelovanja prikazan je vektorom $u = \{u_1, u_2, \ldots u_m\}$, a skup veličina izlaznih (upravljanih) koordinata objekta prikazan je vektorom $y = \{y_1, y_2, \ldots y_k\}$. Svojstvo objekta jednoznačno je određeno vektorom stanja $x = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$, pri čemu je $n \geq m$.



Slika 1.1.

Svaki objekt upravljanja karakteriziran je statičkim i dinamičkim svojstvima. Ako objekt sadrži inerciju, promjene koordinata pod djelovanjem vanjskih veličina nisu trenutačne, tj. veličine y, f i u kod dinamičkih objekata su međusobno povezane diferencijalnim, integralnim ili diferencijskim jednadžbama.

Za normalno odvijanje procesa neophodno je da se promjena izlaznih koordinata objekta upravljanja obavlja prema tehnološkim, ekonomskim i drugim zahtjevima, bez utjecaja dinamičkih izobličenja. Zahtjevi kojima trebaju udovoljiti izlazne koordinate sistema nazivaju se *algoritmom funkcioniranja sistema.* Analogno zakon djelovanja automatskog uređaja na objekt upravljanja naziva se *algoritmom upravljanja sistema* koji ovisi o dinamičkim svojstvima sistema i o algoritmu funkcioniranja sistema.

Na osnovi teorije automatskog upravljanja razvila se teorija automatske regulacije, koja se kao samostalna znanstvena disciplina naglo razvija od 1940. god. L [45]. Pojam automatske regulacije sadržava promjene neke fizikalne veličine po određenom zakonu bez neposrednog sudjelovanja čovjeka. Fizikalna veličina koja se regulira naziva se *reguliranom ili izlaznom veličinom sistema* $y(t)$, a objekt na koji se primjenjuje automatsko reguliranje naziva se *objektom regulacije* (sl. 1.1.c). Cilj je regulacije ostvarivanje potrebnog zakona promjene izlazne veličine koji općenito može biti različit. U mnogim tehničkim zadacima potrebno je izlaznu veličinu držati konstantnom. U složenijim slučajevima potrebno je mijenjati izlaznu veličinu po nekom unaprijed poznatom algoritmu funkcioniranja koji može biti i slučajnog karaktera. Ako se stvarna promjena izlazne veličine označi sa $y(t)$, osnovni se zadatak automatske regulacije sastoji u ostvarivanju jednakosti:

$$y(t) = u(t) \tag{1.1}$$

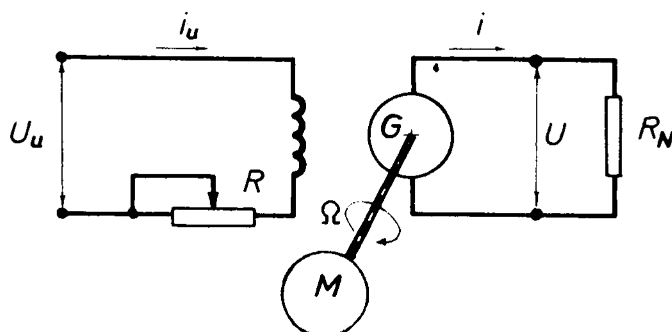
Funkcija $u(t)$ potreban je algoritam funkcioniranja sistema, a u teoriji automatske regulacije često se naziva *vodećom veličinom sistema.*

U realnim SAR uvijek dolazi do otklanjanja izlazne veličine $y(t)$ od vodeće veličine $u(t)$, što je uzrokovano djelovanjima poremećajnih veličina $f_i(t)$, $(i=1, 2, \ldots l)$. Među poremećajnim veličinama obično je moguće izdvojiti jednu ili više veličina koje najviše djeluju na izlaznu veličinu. Takve poremećajne veličine nazivaju se osnovne, a sve ostale drugostepene poremećajne veličine. Radi otklanjanja neželjenog djelovanja poremećajnih veličina objekt regulacije opremljen je izvršnim uređajem na koji se djeluje ručno ili automatski. Djelovanje izvršnog uređaja na objekt naziva se regulacijskim djelovanjem, a veličina koju obrazuje izvršni uređaj naziva se *izvršnom veličinom* $y_r(t)$.

1.3. Primjeri regulacijskih objekata

Primjer 1.1.

Na slici 1.2. prikazana je shema istosmjernog generatora s nezavisnom uzbudom.



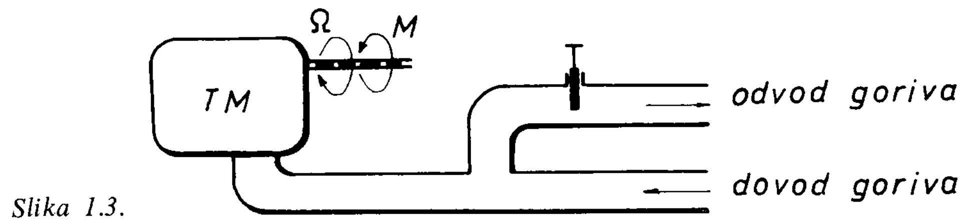
Slika 1.2.

Namot uzbude generatora priključen je na napon istosmjernog izvora $U_u=\text{const.}$ Rotor generatora vrti se konstantnom brzinom Ω. Izlazna veličina je napon generatora $u(t)$. Za normalni rad većine potrošača električne energije potrebno je da izlazni napon bude konstantan, tj. $u(t)=u^\circ=\text{const.}$ Osnovne poremećajne veličine koje uzrokuju otklon napona $u(t)$ od zadanog napona $u^\circ=\text{const}$ su promjena brzine vrtnje pogonskog motora Ω i promjena struje tereta $i(t)$ kao posljedica promjene opteretnog otpora R_n (zbog isključivanja ili uključivanja potrošača električne energije). U drugostepene poremećajne veličine mogu se svrstati promjene temperature, vlažnosti i pritiska okolne sredine, promjene otpora kolektorskog dijela (zbog trošenja četkica, taloženja nečistoća na kolektoru i sl.), promjene napona izvora napajanja itd. Kao regulacijski uređaj upotrijebljen je reostat u uzbudnom krugu generatora. Pomak kliznika reostata predstavlja regulacijsko djelovanje odnosno izvršnu veličinu $y_r(t)$. Pomicanjem kliznika udesno povećava se napon generatora $u(t)$, dok se pri pomicanju u suprotnom pravcu taj napon smanjuje.

Primjer 1.2.

Na slici 1.3. prikazana je shema termičkog motora TM (dizel, karburatorski ili turboreaktivni motor). U termičkom motoru TM izlazna veličina jest brzina vrtnje izlazne osovine $\Omega(t)$. U većini slučajeva zahtijeva se da brzina vrtnje bude konstantna, $\Omega(t)=\Omega^\circ=\text{const.}$ Osnovne poremećajne veličine su moment opterećenja na izlaznoj osovini $M(t)$ i dovod goriva u komore sagorijevanja. Kao drugostepene poremećajne

veličine mogu se navesti promjene parametara okolne sredine, promjena parametara goriva i sl. Kao regulacijski uređaj upotrijebljen je zasun u kanalu odvoda goriva.

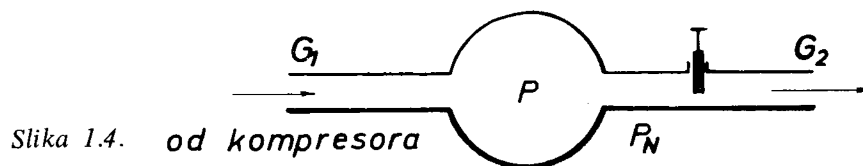


Slika 1.3.

Pomicanjem zasuna realizira se izvršna veličina. Zatvaranjem odvoda goriva povećava se broj okretaja izlazne osovine, odnosno povećavanjem odvoda goriva brzina vrtnje izlazne osovine se smanjuje.

Primjer 1.3.

Na sl. 1.4. prikazan je rezervoar komprimiranog zraka. Često se postavlja zahtjev da pritisak P unutar rezervoara bude konstantna veličina $P(t) = P^{o} = \text{const}$. Pritisak $P(t)$ u navedenom slučaju predstavlja izlaznu veličinu. Kao osnovne poremećajne veličine mogu se navesti promjena režima rada kompresora (kao posljedica promjene brzine vrtnje pogonskog motora) i promjena režima rada potrošača komprimiranog zraka.



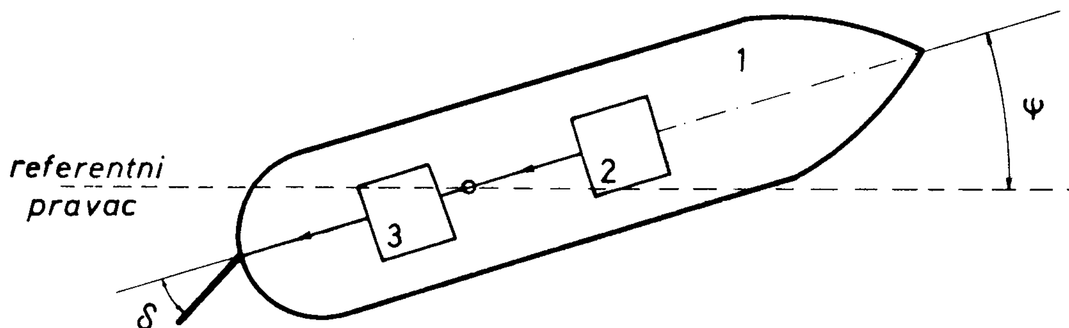
Slika 1.4.

Navedene osnovne poremećajne veličine uzrokuju promjene protoka zraka G_1, a time i promjene pritiska P u hermetičkoj komori. Na primjer, kada je hermetička komora smještena u avionima, pri promjeni visine leta mijenja se pritisak okolne sredine P_n, što uzrokuje promjenu protoka G_2, a time i promjenu pritiska P u hermetičkoj komori. Kao drugostepene poremećajne veličine mogu se navesti promjene parametara komprimiranog zraka, promjena temperature okolne sredine i sl. Kompenzacija neželjenog djelovanja poremećajnih veličina ostvaruje se izvršnom veličinom, pomakom zasuna ili ventila u izlaznom vodu.

Primjer 1.4.

Na slici 1.5. prikazana je shema torpeda kao objekta upravljanja po kursu. Kod svih gibajućih objekata (brod, avion, torpedo, raketa, podmornica i sl.) često se postavlja zahtjev za kretanjem po određenom zadanom kursu Ψ. Kurs Ψ je u navedenim slučajevima izlazna veličina. Otklon izlazne veličine $\Psi(t)$ od zadanog iznosa $\Psi^{o} = \text{const.}$, mjeri se žiroskopom 2, koji preko kormilarskog stroja 3 pomiče

regulacijski uređaj, list kormila, za potreban kut δ. Veličina $\delta(t)$ izvršna je veličina koja kompenzira djelovanje poremećajnih veličina (valovi, morske struje i sl.) i održava objekt u kretanju na zadanom kursu Ψ^o.



Slika 1.5.

Analizom navedenih primjera regulacijskih objekata može se zaključiti da svi navedeni primjeri čine poseban slučaj sheme regulacijskog objekta prikazanoj na sl. 1.1.c. U svakom konkretnom slučaju mijenja se samo fizikalna priroda izlazne veličine $y(t)$, izvršne veličine $y_r(t)$ i poremećajnih veličina $f_i(t)$.

Uređaj koji automatski rješava zadatak regulacije u nekom regulacijskom objektu naziva se *automatskim regulatorom*. Regulacijski objekt i automatski regulator zajedno čine sistem automatske regulacije (SAR).

1.4. Fundamentalni principi upravljanja

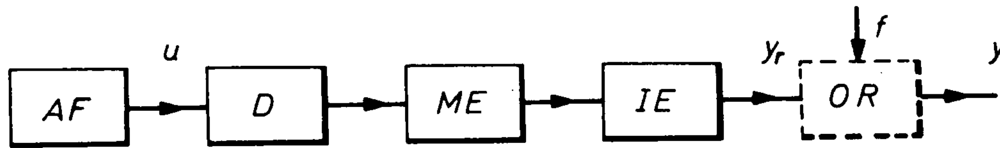
Poznavanjem statičkih i dinamičkih svojstava sistema upravljanja moguće je odrediti matematički model sistema i algoritam upravljanja koji će osigurati realizaciju zadanog algoritma funkcioniranja sistema. S obzirom da model uvijek približno odgovara svojstvima originala, a poremećajne veličine mogu se mijenjati na unaprijed nepoznat način, stvarno ponašanje sistema će se općenito razlikovati od željenog ponašanja, tj. odstupat će od zadanog algoritma funkcioniranja.

Sa stajališta realizacije sistema automatske regulacije, svi automatski regulatori mogu se smatrati sistemima upravljanja namijenjenim ostvarivanju izvršnog djelovanja $y_r(t)$ na regulacijski objekt sa ciljem realizacije promjene regulirane veličine $y(t)$ po zakonu promjene vodeće veličine $u(t)$.

U osnovi gradnje sistema automatske regulacije primjenjuju se opći fundamentalni principi upravljanja, kojima se realizira povezanost algoritama funkcioniranja i upravljanja sa stvarnim funkcioniranjem sistema. U suvremenoj tehnici primjenjuju se tri fundamentalna principa: *princip otvorenog sistema, princip kompenzacije* i *princip povratne veze*.

Princip otvorenog sistema. Suština principa jest u tome što se algoritam upravljanja (izvršna veličina) formira samo na osnovi zadanog algoritma funkcioniranja (vodeća veličina) i ne kontrolira se drugim faktorima – poremećajnim veličinama ili izlaznim koordinatama procesa. Opća funkcionalna shema sistema prikazana je na sl. 1.6, a sastoji se od elementa formiranja vodeće veličine (algoritma funkcioniranja) AF, detektora D, međuelementa ME i izvršnog elementa IE.

Algoritam funkcioniranja odnosno vodeća veličina sistema $u(t)$ formira se ovisno o namjeni sistema posebnim uređajem, na primjer programatorom, ili se konstruktivno objedinjuje s mjernim detektorom.



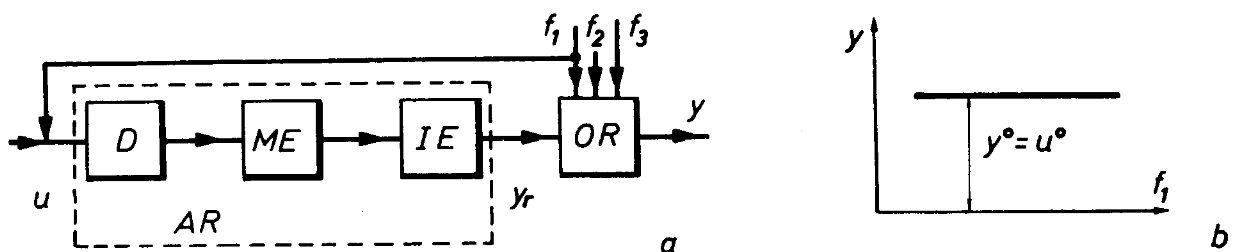
Slika 1.6.

Kako je iz sl. 1.6. vidljivo, bliskost regulirane veličine $y(t)$ i vodeće veličine $u(t)$ može se osigurati jedino konstrukcijom i izborom fizikalnih zakonitosti rada elemenata sistema, pa se ovaj princip primjenjuje kod jednostavnijih sistema ili kao sastavni dio složenih SAR.

Princip otvorenog sistema široko se primjenjuje pri rješavanju jednostavnijih zadataka automatizacije kao što su: automatska signalizacija, blokada, zaštita, upuštanje, zaustavljanje, upravljanje elektrohidrauličkim i elektropneumatskim ventilima, pogoni automatskih linija u proizvodnji, realizacija rada raznih vrsta automata, razni linearni pretvarači fizikalnih veličina, logički elementi, elementi formiranja raznih diferencijalnih i integralnih operatora i sl.

Princip kompenzacije (*upravljanje po poremećajnoj veličini*). Bit je ovog principa mjerenju poremećajnih veličina i (ovisno o rezultatima mjerenja) formiranju izvršnog djelovanja na regulacijski objekt, sa ciljem realizacije promjene izlazne veličine po zadanom zakonu. Ako, na primjer, poremećajne veličine uzrokuju povećanje izlazne veličine, zadatak je regulatora da formira izvršnu veličinu koja će djelujući na objekt smanjiti povećanje veličine $y(t)$. Za tehničku realizaciju izloženog principa potrebno je da automatski regulator sadrži sljedeće osnovne elemente: detektor (D) koji mjeri poremećajnu veličinu i izvršni element (IE) regulatora koji izvršnom veličinom djeluje na regulacijski objekt. Između detektora i izvršnog elementa mogu biti uključeni i međuelementi (ME) namijenjeni pojačanju i pretvorbi signala detektora.

Opća funkcionalna shema otvorenog SAR kojim se ostvaruje princip kompenzacije poremećaja prikazan je na sl. 1.7.



Slika 1.7.

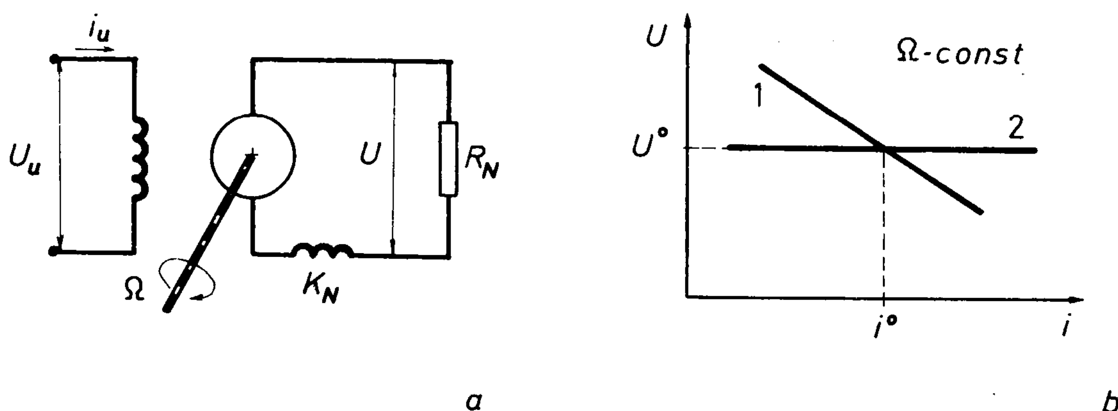
Na shemi sl. 1.7. regulacija se ostvaruje po poremećajnoj veličini f_1; detektor, međuelement i izvršni element zajedno čine automatski regulator AR. Funkcionalna shema SAR pokazuje od kakvih se elemenata sastoji sistem i kako su elementi

međusobno funkcionalno povezani. Element je konstrukcijski realiziran dio sistema koji vrši određenu funkciju. Na funkcionalnim shemama elementi se prikazuju pravokutnicima, a ulazne i izlazne veličine prikazane su pravim linijama sa strelicama koje pokazuju smjer prijenosa djelovanja veličina sistema.

Na slici 1.7.b prikazana je ovisnost izlazne veličine $y(t)$ o poremećajnoj veličini $f_1(t)$ u stacionarnom stanju. S $y^0 = u^0$ označen je potreban iznos izlazne veličine. Pravilno konstruiran regulator treba osigurati neovisnost izlazne veličine $y(t)$ o poremećajnoj veličini $f_1(t)$, tj. SAR treba biti *invarijantan* u odnosu na poremećajnu veličinu $f_1(t)$.

Primjer 1.5.

Na sl. 1.8. prikazana je shema automatske regulacije napona istosmjernog generatora po poremećajnoj veličini.



Slika 1.8.

Kod generatora s nezavisnom uzbudom pri povećanju struje tereta $i(t)$ smanjuje se izlazni napon generatora $u(t)$ (sl. 1.8.b, krivulja 1). Potreban iznos napona generatora u^0 postiže se samo kada je struja tereta $i = i^0$. Kod generatora s kombiniranom uzbudom kompaundni namotaj (KN) ima ulogu regulatora koji radi po poremećajnoj veličini. Magnetski tok koji se stvara u kompaundnom namotaju ima isti smjer kao i magnetski tok u namotaju nezavisne uzbude i on ovisi o iznosu struje tereta i. Pri povećanju odnosno smanjenju struje tereta povećava se odnosno smanjuje magnetski tok uzbudnog kruga, a time i napon generatora postaje invarijantan na promjenu opterećenja i; sl. 1.8.b, krivulja 2, krivulja 1 i 2 na sl. 1.8.b odnose se na stacionarno stanje sistema, tj. nisu funkcije vremena, pa se nazivaju statičkim karakteristikama elementa odnosno sistema.

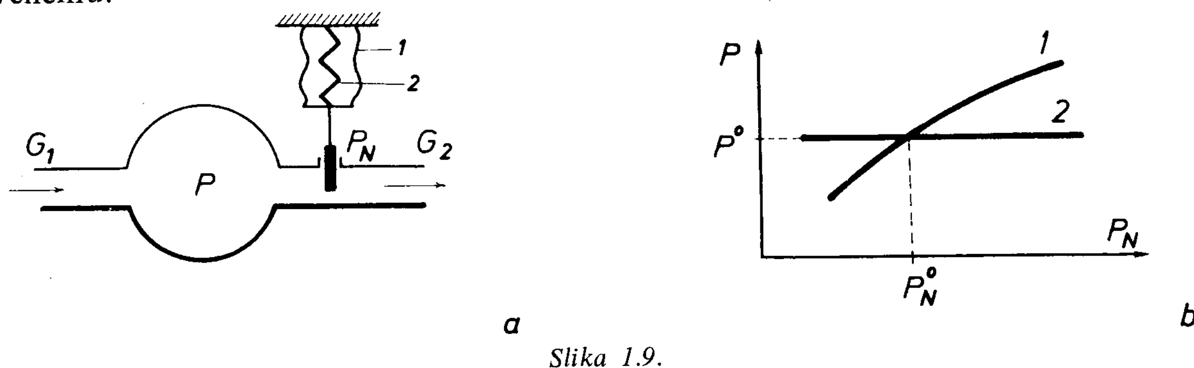
U razmotrenom sistemu kompaundni namotaj vrši funkciju detektora, dok međuelement i izvršni element nisu prisutni. Izvršna veličina je struja uzbude koja se stvara magnetskim tokom kompaundnog namotaja, a izlazna veličina je napon generatora $u(t)$.

Izloženi SAR invarijantan je samo na promjenu opterećenja i, a na promjenu broja okretaja rotora i drugih vanjskih veličina nije invarijantan.

Primjer 1.6.

Na sl. 1.9. prikazana je shema automatske regulacije pritiska zraka u hermetičkoj komori po poremećajnoj veličini.

Osnovna poremećajna veličina sistema na sl. 1.9. jest promjena pritiska okolne sredine P_N. Ovisnost pritiska u hermetičkoj komori P o pritisku okolne sredine P_N prikazana je krivuljom 1 na sl. 1.9.b. Kao detektor upotrijebljen je metalni mijeh 1, unutar kojeg se nalazi opruga 2. Promjena pritiska okolne sredine P_N uzrokuje promjenu protoka zraka G_2, *a posljedica toga je promjena nominalnog pritiska* $P = P^o$ u hermetičkoj komori. Promjenom pritiska P_N mijenja se volumen metalnog mijeha, što uzrokuje pomicanje ventila u izlaznoj cijevi komore, tj. preko promjene protoka zraka G_2 u hermetičkoj komori uspostavlja se nominalni pritisak P^o. U ovom SAR nisu prisutni međuelementi i izvršni elementi jer detektor istovremeno formira izvršnu veličinu.



Slika 1.9.

Na temelju izloženog primjera moguće je navesti osnovne nedostatke SAR po poremećajnoj veličini.

U SAR koji rade po principu kompenzacije neželjenog djelovanja poremećajne veličine, invarijantnost izlazne veličine postiže se samo u odnosu prema poremećajnoj veličini koja se mjeri detektorom regulatora. Postojanje velikog broja drugostepenih poremećajnih veličina, koje se ne kontroliraju regulatorom, dovodi obično do toga da se zadatak regulacije ne ostvaruje; naime, izlazna veličina nije invarijantna na poremećajne veličine koje se ne kontroliraju regulatorom. Osim toga kontroliranje svih poremećajnih veličina zahtijevalo bi uključivanje više regulatora što s tehničkog i ekonomskog stajališta nije opravdano. Također postoji vrlo velik broj slučajeva kada se ovaj princip regulacije ne može primijeniti, jer je velik broj poremećajnih veličina takve prirode da ih nije moguće mjeriti.

Invarijantnost u odnosu na poremećajnu veličinu moguće je u nekim SAR postići samo u slučajevima kada realni iznosi parametara objekta i regulatora strogo odgovaraju proračunskim iznosima. Promjena parametara objekta ili regulatora (zbog starenja, utjecaja vanjskih uvjeta itd.) dovodi kod ovih sistema do neželjenih promjena regulirane veličine. Na primjer, ako u SAR napona generatora sl. 1.8. dođe do promjene otpora uzbudnog namotaja (uslijed promjene temperature okolne sredine i sl.), pri nepromijenjenom uzbudnom naponu u_u doći će do promjene struje uzbude i_u, a to će uzrokovati da regulator podržava napon generatora koji će biti različit od zadanog nominalnog napona u^o.

Navedeni nedostaci ovih SAR uvjetovani su činjenicom da se u ovim sistemima ne mjere izlazne veličine $y(t)$, pa se izvršna veličina $y_r(t)$ ne ostvaruje ovisno o promjeni regulirane veličine.

1.5. Princip zatvorenog sistema (princip povratne veze)

Osnovni zadatak bilo kojeg SAR sastoji se u ostvarivanju uvjeta definiranog jednadžbom (1.1). U realnim sistemima ova jednakost ne može se ostvariti idealno

točno, tj. uvijek postoji neka razlika između vodeće veličine $u(t)$ (zadanog algoritma funkcioniranja) i regulirane veličine $y(t)$ (stvarnog algoritma funkcioniranja):

$$\varepsilon_d(t) = u(t) - y(t) \tag{1.2}$$

Funkcija $\varepsilon_d(t)$ naziva se *regulacijsko odstupanje SAR*. U idealnom slučaju regulacijsko odstupanje ne postoji tj. $\varepsilon_d(t)=0$ za $0<t<\infty$.

Recipročni iznos regulacijskog odstupanja $\frac{1}{\varepsilon_d}$ naziva se *točnost* sistema automatske regulacije.

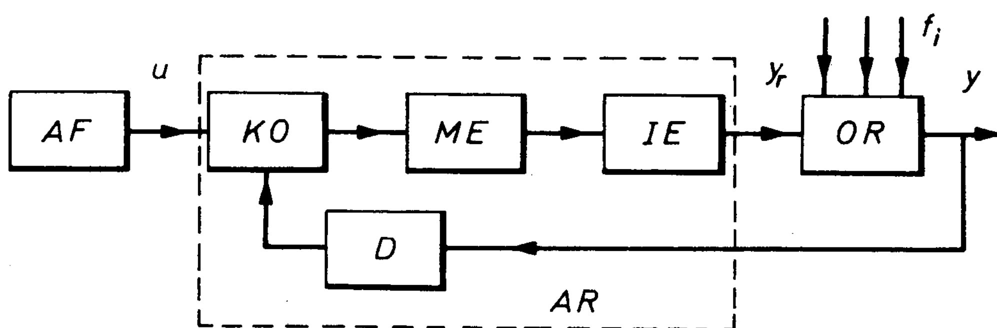
Kod realnih sistema regulacijsko odstupanje (1.2.) je različito od nule, a postupcima projektiranja i realizacije ono se nastoji svesti u granice tolerancije.

Suština principa zatvorenog sistema, odnosno principa povratne veze, sastoji se u ostvarivanju izvršne veličine $y_r(t)$ koja će djelovanjem na objekt regulacije smanjivati regulacijsko odstupanje $\varepsilon_d(t)$, s ciljem da se postigne uvjet (1.1), tj.

$$\varepsilon_d(t) = u(t) - y(t) = 0 \tag{1.3}$$

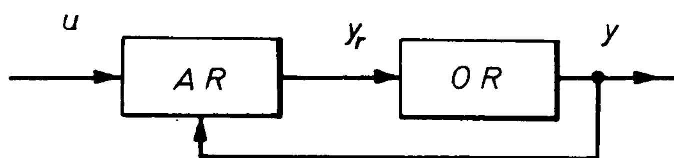
Iz jednadžbi (1.1, 1.2. i 1.3) slijedi da za $\varepsilon_d \gtrless 0$, izvršna veličina $y_r(t)$ treba ostvariti povećanje odnosno smanjivanje izlazne veličine $y(t)$. Kada je ispunjen zahtjev (1.3), izlazna veličina jednaka je zadanom iznosu, tj. $y(t)=u(t)$.

U općem slučaju regulacijsko odstupanje određuje se posredno formiranjem *signala razlike* $\varepsilon(t)$. U tu svrhu koriste se tri elementa: elementi formiranja vodeće veličine AF, detektor D i element usporedbe *komparator* KO, koji ostvaruje signal razlike $\varepsilon(t)$. Pri realizaciji SAR po principu zatvorenog sistema elementi formiranja vodeće veličine, detektor i komparator često se konstrukcijski objedinjavaju u jednu cjelinu. Funkcionalna shema zatvorenog SAR prikazana je na sl. 1.10.



Slika 1.10.

U sistemu na sl. 1.10, komparator, međuelement, izvršni element i detektor čine automatski regulator AR, pa se funkcionalna shema zatvorenog sistema može prikazati sl. 1.11.



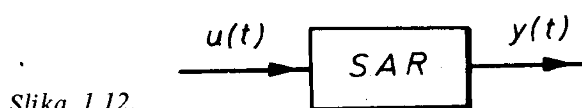
Slika 1.11.

Međuelementi regulatora uključuju komponente za pojačanje i pretvorbu fizičke prirode signala razlike $\varepsilon(t)$. U međuelemente ubrajaju se modulatori, demodulatori,

pojačala i korekcijski sklopovi koji ostvaruju funkcionalna transformiranja potrebna za formiranje izvršne veličine $y_r(t)$.

Za razliku od otvorenih SAR, gdje je potrebno mjeriti poremećajne veličine, kod primjene principa zatvorenog sistema poremećajne veličine se ne tretiraju, a zadani zakon promjene izvršne veličine realizira se regulatorom koji ima zadatak da eliminira regulacijsko odstupanje $\varepsilon_d(t) = u(t) - y(t)$.

Kako je iz sl. 1.11. vidljivo, sve veličine SAR su veličine s usmjerenim djelovanjem, pa se s obzirom na tok informacije, odnosno energije, SAR odnosno element sistema može prikazati funkcionalnom shemom s *ulaznom* $u(t)$ i *izlaznom* $y(t)$ veličinom (sl. 1.12).

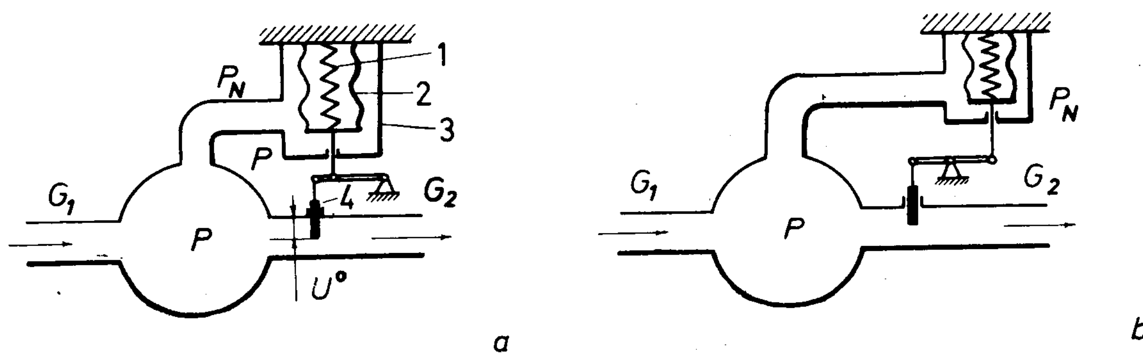


Slika 1.12.

Pri otvorenim SAR (sl. 1.6. i 1.7) ne mjeri se iznos izlazne veličine i ona se ne dovodi na ulaz sistema, pa se ti sistemi još nazivaju SAR bez *povratne veze.* Karakteristika zatvorenih sistema (sl. 1.10, 1.11) sastoji se u dovođenju izlazne veličine $y(t)$ na ulaz sistema, gdje se pomoću komparatora formira signal razlike $\varepsilon(t)$.

Primjer 1.7.

Na sl. 1.13. prikazana je shema zatvorenog sistema automatske regulacije pritiska u hermetičkoj komori.



Slika 1.13.

Zadatak sistema sl. 1.13. jest održavanje konstantnog pritiska $P = P^o$ u hermetičkoj komori. Kao detektor regulatora primijenjen je metalni mijeh 1 s oprugom 2, koji je smješten u komoru 3, unutar koje je pritisak jednak pritisku P u hermetičkoj komori. Detektor je kinematički povezan s regulacijskim izvršnim elementom 4, čiji položaj je proporcionalno ovisan o pritisku u komori 3.

U stacionarnom stanju (iznos svih poremećajnih veličina je konstantan) pritisak u komori je konstantan, izvršni element 4 nalazi se u određenom položaju jer je sila pritiska izjednačena sa silom napetosti opruge. Na sl. 1.13.a prikazani su nominalni uvjeti, tj. $P \approx P^o = const$, $u = u^o$, što odgovara nultom (srednjem) položaju izvršnog elementa. Pri promjeni poremećajnih veličina dolazi do promjene pritiska P, za $P > P^o$,

metalni mijeh će se stisnuti i preko kinematičke veze djelovat će na izvršni element tako da će se ventil pomaknuti prema gore, tj. povećat će se protok G_2, a time će se smanjiti pritisak P u komori.

Regulator na sl. 1.13.a održava reguliranu veličinu oko potrebnog iznosa P^o pri bilo kojim uzrocima promjene nominalnog režima rada sistema.

Regulator uključen prema sl. 1.13.b, pri povećanju odnosno smanjenju pritiska P, zatvara odnosno otvara izlaznu cijev, tj. smanjuje odnosno povećava protok zraka G_2 što rezultira pozitivnim odnosno negativnim odstupanjem od nominalnog iznosa izlazne veličine P^o, tj. regulator povećava apsolutni iznos regulacijskog odstupanja $|\varepsilon_d(t)| = |P^o - p(t)|$ pa SAR ne vrši namijenjenu funkciju.

U SAR sl. 1.13. regulator ne sadrži kao konstrukcijske cjeline element vodeće veličine, međuelemente i izvršni element. Određivanje regulacijskog odstupanja

$$\varepsilon_d(t) = P^o - p(t) \tag{1.4}$$

vrši se na sljedeći način: Izvršna veličina $y_r(t)$ ovisna je o iznosu regulirane veličine $p(t)$. U stacionarnom stanju iznos izvršne veličine određen je jednadžbom:

$$y_r = y_r^o - k(p - p^o) \tag{1.5}$$

gdje je k-konstanta koja karakterizira svojstva metalnog mijeha i opruge. Iz (1.5) proizlazi:

$$\begin{aligned} u - u^o &= -k(p - p^o) \\ y_r - y_r^o &= -k(p - p^o) \end{aligned} \tag{1.6}$$

odnosno:

$$\Delta y_r = -k\Delta p \tag{1.7}$$

Budući je prema (1.4), $P - P^o = -\varepsilon_d$ izraz (1.7) poprima oblik:

$$\Delta_r = k\varepsilon_d$$

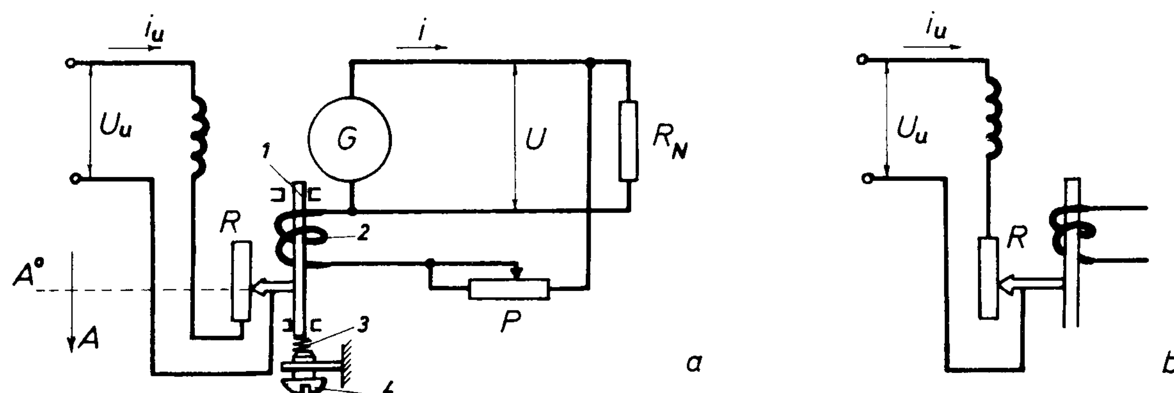
Iz (1.7) proizlazi da je izvršna veličina regulatora $y_r(t)$ (izlazna veličina regulatora) proporcionalna (ulaznoj veličini regulatora) regulacijskom odstupanju ε_d.

Primjer 1.8.

Na slici 1.14. prikazana je shema zatvorenog SAR napona istosmjernog generatora. Kao detektor regulatora ugrađen je elektromagnet s oprugom. Namotaj elektromagneta 2 vezan je paralelno s otporom R_n. Jezgra elektromagneta 1 čvrsto je spojena s kliznikom reostata R (spoj jezgre i kliznika je izvršen preko izolacije). Donji kraj jezgre je preko opruge 3 spojen s vijkom 4 kojim se može podešavati položaj kliznika na reostatu. U stacionarnom stanju kada je $u = u^o$, $f_i = f_i^o$, elektromagnetna sila, koja djeluje na pomicanje jezgre 1 kroz zavojnicu 2, izjednačena je s protusilom opruge, tako da se kliznik reostata R nalazi u stanju mirovanja, tj. u položaju nominalnog iznosa izvršne veličine A^o.

Promjenom poremećajnih veličina, tj. njihovim otklonom od nominalnog iznosa f_i^o, dolazi do povećavanja ili smanjivanja nominalnog iznosa izlazne (regulirane) veličine u_o, a to rezultira povećanjem ili smanjenjem struje u zavojnici 2 elektromagneta, odnosno narušavanjem ravnoteže sila koje djeluju na elektromagnet. Na primjer, pri povećanju struje u zavojnici 2 doći će do povećanja sile elektromagneta što dovodi do pomicanja kliznika reostata R prema gore čime se povećava otpor uzbudnog kruga, smanjenje struja uzbudnog kruga i_u, a time se smanjuje izlazna veličina generatora u. Pri

smanjenju regulirane veličine u, proces se ponavlja u suprotnom smjeru. SAR na sl. 1.14. uvijek će raditi tako da održi iznos regulirane veličine približno jednak zadanom nominalnom iznosu u_o. Uključivanje regulatora kao na sl. 1.14.b je nepravilno, jer on povećava apsolutni iznos regulacijskog odstupanja, pa SAR ne može ostvariti namijenjenu funkciju.



Slika 1.14.

U opisanom primjeru funkcija $\varepsilon_d(t)$ određena je pomakom jezgre elektromagneta od nultog položaja, što rezultira odstupanjem izlazne veličine od nominalnog iznosa $\varepsilon_d(t) = u^o - u(t)$. Koeficijent proporcionalnosti k određen je svojstvima elektromagneta i opruge. Kao element vodeće veličine upotrijebljen je vijak 4 i potenciometar P, kojima se može podesiti potreban nominalni iznos izlazne veličine u_o. Međuelementi i izvršni element u razmotrenom sistemu ne egzistiraju kao konstrukcijske cjeline.

Primjer 1.9.

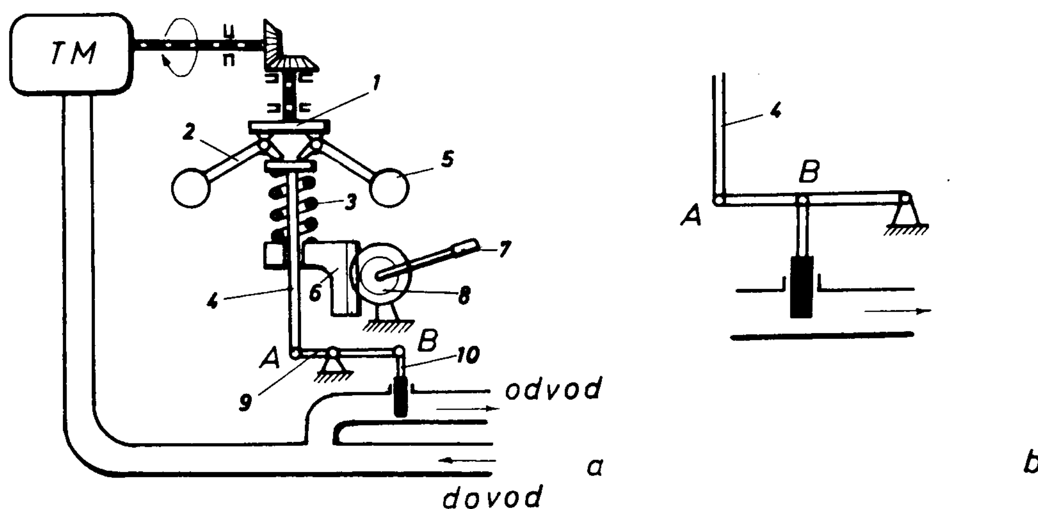
Na slici 1.15. prikazana je shema SAR brzine vrtnje izlazne osovine termičkog motora. Kao detektor brzine vrtnje Ω primijenjen je Wattov centrifugalni mehanizam koji se sastoji od platforme (1), kugli (5), opruge (3) i izlazne poluge (4). Kugle su polugama zglobno vezane za platformu (1) i polugu (4). Centrifugalnoj sili tereta 5, koja je proporcionalno ovisna o brzini Ω, drži ravnotežu sila opruge 3. U stacionarnom stanju brzini vrtnje Ω odgovara pomak poluge 4. Pomak poluge 4 prenosi se na polugu AB, preko koje se djeluje na ventil 10 za dovod goriva motoru. Nominalnom režimu rada sistema odgovara veličina Ω^o, a ista se udešava protusilom opruge pomoću mehanizma 7. Regulacijsko odstupanje $\varepsilon_d = \Omega^o - \Omega$ odgovara pomaku poluge 4.

Centrifugalni mehanizam u razmotrenom SAR objedinjava u sebi detektor, komparator i izvršni element. Ovaj uređaj zove se još centrifugalni regulator.

Kao element vodeće veličine služi mehanizam za podešavanje protusile opruge (komponente 6, 7, 8). Uključivanje regulatora prema sl. 1.15.b je nepravilno jer dovodi do nedjelotvornog djelovanja sistema. Do sada razmotreni SAR bitno se razlikuju po fizikalnim veličinama: pritisak, brzina vrtnje i električki napon. Svi ti sistemi namijenjeni su održavanju konstantnog iznosa regulirane veličine. Principijelne sheme tih sistema bitno su međusobno različite, a zajedničko im je svojstvo da su realizirani kao zatvoreni SAR, tj. kao sistemi s povratnom vezom.

Kao osnovno svojstvo tih sistema treba naglasiti njihovu sposobnost da ostvaruju zadatak regulacije neovisno o obliku i broju poremećajnih veličina. Rad sistema nije

zasnovan na mjerenju poremećajnih veličina, već na mjerenju regulacijskog odstupanja $\varepsilon_d(t)$ koje karakterizira koliko se zakon stvarne promjene regulirane veličine podudara sa zadanim zakonom. Kada je iznos $\varepsilon_d \neq 0$, regulator ostvaruje izvršno djelovanje na objekt svodeći ε_d sistema na dopušteni iznos. Kod tih sistema nisu potrebni kruti zahtjevi za stabilnost parametara objekta i nekih elemenata regulatora. Naime, promjena parametara regulatora ili objekta uzrokuje pojavu signala ε_d koji se eliminira djelovanjem na objekt potrebnom izvršnom veličinom. Da bi ti sistemi radili pouzdano, neophodno je da parametri detektora, komparatora i elementa vodeće veličine budu konstantni, tj. karakteristike ovih elemenata trebaju biti vrlo stabilne.



Slika 1.15.

Regulacijsko odstupanje sistema ostvaruje se komparatorom. Da bi se udovoljilo jednadžbi $\varepsilon_d(t) = u(t) - y(t)$, regulirana veličina sistema dovodi se na ulaz komparatora s predznakom suprotnim od predznaka vodeće veličine, tj. $\operatorname{sign} y(t) \neq \operatorname{sign} u(t)$. Takvo povratno djelovanje izlazne veličine sistema na ulaz sistema naziva se *negativnom povratnom vezom*.

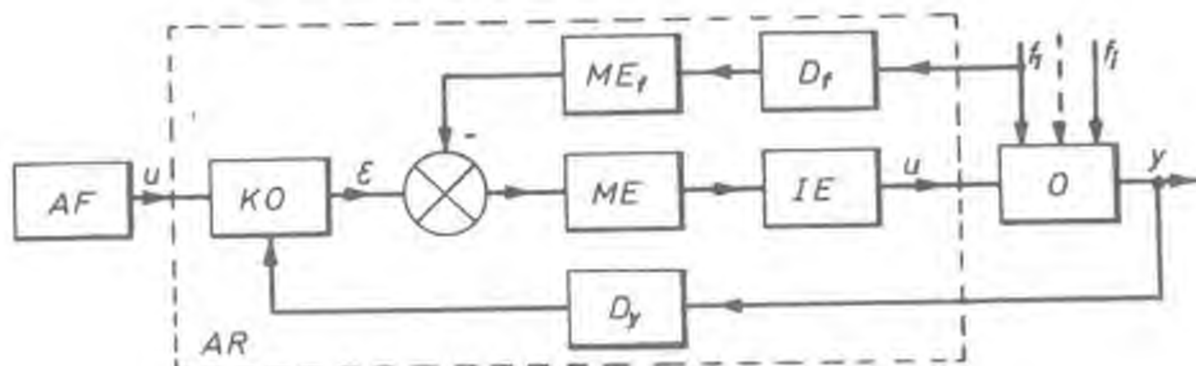
U primjerima sl. 1.13.a, 1.14.a i 1.15.a primijenjena je negativna povratna veza. Na sl. 1.13.b, 1.14.b i 1.15.b primijenjena je *pozitivna povratna veza* kod koje se izlazna veličina $y(t)$ dovodi na ulaz sistema s predznakom koji ima vodeća veličina $u(t)$, $\operatorname{sign} y(t) = \operatorname{sign} u(t)$, pa se izlazna veličina komparatora $\varepsilon(t)$, signal razlike, stalno povećava, što je u suprotnosti s funkcionalnom namjenom regulacijskih sistema, tj. s algoritmom funkcioniranja sistema. SAR s negativnom povratnom vezom vrlo su rasprostranjeni u prirodi i tehničkim sistemima. Na primjer, za normalno funkcioniranje čovjekova organizma mnogi fizičko-kemijski parametri (temperatura tijela, krvni tlak, koncentracija šećera itd.) moraju imati strogo određene konstantne iznose. Stabilizacija svih parametara vrši se automatski pomoću sistema s povratnim vezama koji su uključeni u vegetativni živčani sustav.

Princip povratne veze sadržan je i u međusobnom djelovanju čovjeka i tehničkih uređaja. Tako se proces ručne regulacije bilo koje fizikalne veličine može analizirati kao sistem s povratnom vezom. Na primjer, proces ručne regulacije napona istosmjernog generatora (sl. 1.14), gdje čovjek može obavljati ulogu elementa vodeće veličine i komparatora. Proces ručne regulacije napona obično ima ovaj tok: Na

stezaljke generatora se u svojstvu detektora uključi voltmetar, operator vizuelno određuje stvarni iznos napona $u(t)$ i uspoređuje ga sa zadanim iznosom. U slučaju kada je $u(t) \neq u^o$, operator pomiče kliznik reostata sve dok voltmetar ne pokaže iznos $u = u^o$.

Osim navedenih prednosti zatvorenih SAR, potrebno je istaći i sadržane nedostatke. U svojoj biti princip regulacije po regulacionom odstupanju $\varepsilon_d(t)$ je proturječan. Regulacijsko djelovanje koje je usmjereno na eliminiranje odstupanja $\varepsilon_d(t)$, pojavljuje se tek kada je $\varepsilon_d(t) \neq 0$, tj. prije nego se regulacijsko odstupanje eliminira, neophodno je da se dopusti njegovo pojavljivanje. Ovi sistemi skloni su oscilacijama i znatno su složeniji od otvorenih sistema.

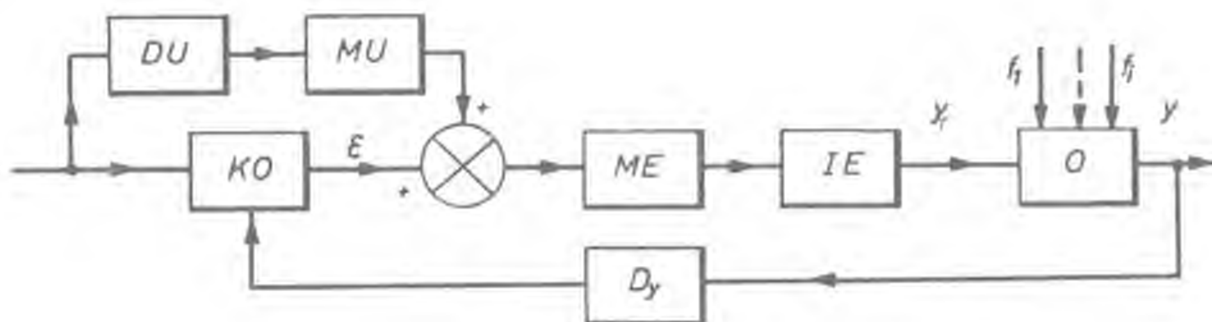
Nedostaci otvorenih i zatvorenih SAR mogu se u znatnoj mjeri smanjiti objedinjavanjem obaju principa u jedan sistem. Takvi sistemi nazivaju se *kombinirani SAR*. Opće funkcionalne sheme kombiniranih sistema prikazane su na sl. 1.16, 1.17. Na sl. 1.16. prikazana je funkcionalna shema kombiniranog SAR po poremećajnoj veličini.



Slika 1.16.

Otvoreni sistem ostvaruje invarijantnost regulirane veličine y na mjernu poremećajnu veličinu f_1, a zatvoreni sistem eliminira neželjeno djelovanje svih drugih poremećajnih veličina.

Na sl. 1.17. prikazana je funkcionalna shema kombiniranog SAR po vodećoj veličini. Cilj takvog kombiniranog sistema jest da se poveća točnost promjene regulirane veličine i da se poveća brzina djelovanja sistema.



Slika 1.17.

1.6. Sistemi neposredne i posredne regulacije

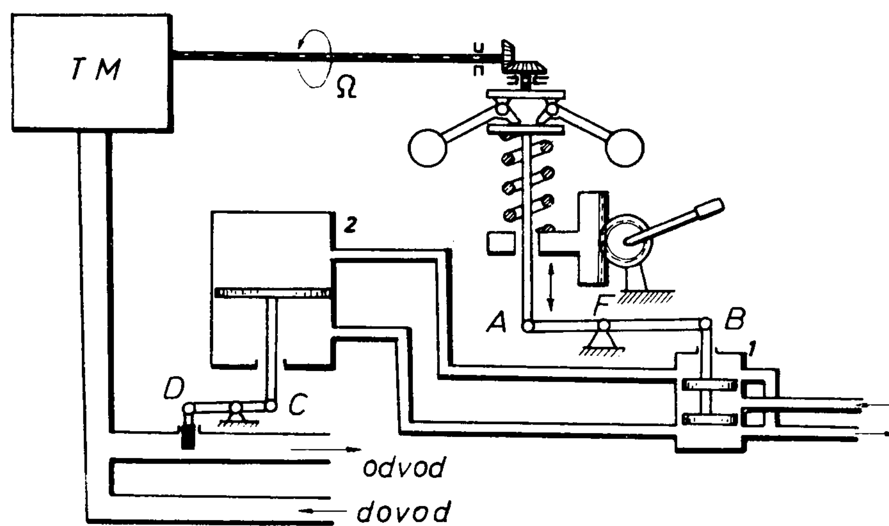
U opisanim primjerima SAR u točkama 1.4. i 1.5. za formiranje izvršnog djelovanja na objekt regulacije korištena je snaga mjernog elementa – detektora. Za normalno funkcioniranje regulatora nije korištena dopunska energija, tj. nije bilo potrebno ugrađivati međuelemente i izvršne elemente radi transformiranja oblika energije i pojačanja izlazne veličine regulatora. Takvi sistemi imaju naziv *sistemi neposredne regulacije.*

Sistemi neposredne regulacije imaju relativno malu točnost (osjetljivost detektora smanjuje se zbog opterećenja izlaza), a područje primjene ograničeno je na objekte regulacije male snage.

Pod sistemima *posredne regulacije* razumijevaju se SAR u kojima su uključeni dopunski izvori energije namijenjeni pojačanju iznosa $\varepsilon(t)$ i ostvarivanju izvršne veličine potrebne snage. Kao dopunski izvori energije primjenjuju se specijalna pojačala (pneumatska, hidraulička, električka i kombinirana) i izvršni elementi. Dopunski izvori energije preko odgovarajućih međuelemenata omogućavaju primjenu elemenata visoke točnosti i malih snaga za upravljanje objektima regulacije velikih snaga. Zbog mogućnosti postizanja velike točnosti i zbog širokih granica primjene, većina suvremenih SAR su sistemi s posrednom regulacijom.

Primjer 1.10.

Na sl. 1.18. prikazana je shema sistema posredne regulacije brzine vrtnje termičkog motora.



Slika 1.18.

Na sl. 1.18. kao pojačalo snage primijenjen je hidraulički motor koji se sastoji od cilindra snage 2 i upravljajućeg ventila 1. Promjena brzine vrtnje Ω transformira se u gibanje poluge *AB* za koju je spojen stap hidrauličkog ventila koji upravlja pomakom klipa u cilindru snage. Pomak klipa preko poluge *CD* upravlja ventilom za dovod goriva motoru. Nominalnom režimu rada $\Omega=\Omega^{\circ}$ odgovara srednji položaj stapa upravljajućeg ventila. Pri tome fluid ne dolazi u cilindar snage, a izvršni element –

ventil za dovod goriva – zauzima položaj koji odgovara nominalnoj radnoj točki sistema.

Ako iz bilo kojeg razloga dođe do narušavanja nominalnog režima rada, izlazna veličina centrifugalnog detektora, signal razlike $\varepsilon(t)$, stavit će u pogon hidraulički motor koji će preko poluge CD staviti u gibanje regulacijski organ koji upravlja dovodom goriva termičkom motoru. Za $\varepsilon < 0$, $\Omega > \Omega^{\circ}$, stap upravljajućeg ventila pomiče se prema gore, radni fluid dolazi u gornju komoru cilindra snage, a klip cilindra preko poluge CD pomiče ventil prema gore što povećava odvod i smanjuje dovod goriva termičkom motoru. Za $\varepsilon > 0$ proces se ponavlja u suprotnom smjeru.

Budući da je stap upravljajućeg ventila 1 kinematički vezan za centrifugalni detektor, to je pomak stapa proporcionalan regulacijskom odstupanju ε_d. Pomak stapa upravljajućeg ventila upravlja se protokom radnog fluida koji se dovodi u komore cilindra snage. Protok fluida kroz cilindar bit će ovisan o veličini radnog otvora ventila, tj. veličini $\varepsilon(t)$ i o brzini gibanja klipa dy_r/dt.

$$\frac{dy_r}{dt} = k \cdot \varepsilon \tag{1.8}$$

odnosno

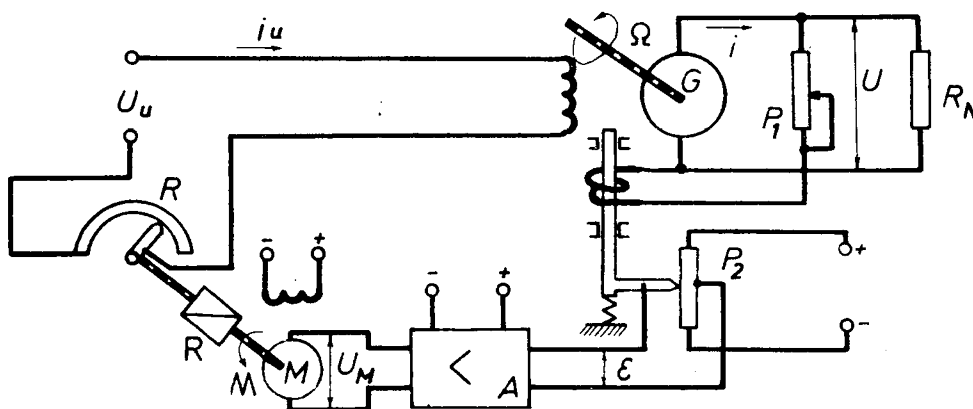
$$y_r = k \int \varepsilon(t)\, dt \tag{1.9}$$

Iz jednadžbe (1.8) proizlazi da je izvršna veličina proporcionalna integralu regulacijskog odstupanja, dok je kod primjene neposredne regulacije (primjer 1.9) izvršna veličina bila proporcionalna iznosu regulacijskog odstupanja ε_d.

Dopunski izvor energije, koji napaja hidraulički motor, omogućava postizanje relativno velike izlazne snage izvršnog elementa sistema.

Primjer 1.11.

Sistem posredne regulacije napona istosmjernog generatora prikazan je na slici 1.19. Pojačanje snage signala razlike ostvaruje se pojačalom A i elektromotorom s nezavisnom uzbudom. Pojačalo općenito može biti elektroničko, magnetsko, elektrostrojno i sl. Na ulaz pojačala dovodi se signal razlike $e(t)$. Izlazni napon pojačala stavlja u pogon izvršni motor M koji preko reduktora pokreće kliznik reostata R u krugu uzbude generatora.



Slika 1.19.

1.7. Osnovni algoritmi funkcioniranja

Na početku razvoja tehnike upravljanja primjenjivao se samo jedan oblik algoritma funkcioniranja – održavanje konstantnog iznosa izlazne veličine. Na današnjem nivou razvoja SAR primjenjuju se tri osnovna oblika algoritama funkcioniranja.

Stabilizacija. Sistemi koji su namijenjeni održavanju konstantnog iznosa izlazne veličine nazivaju se *sistemima stabilizacije.* Algoritam funkcioniranja ovih sistema određen je izrazom $u(t) = \text{const}$. U sisteme stabilizacije mogu se ubrojiti svi do sada razmatrani primjeri. Element vodeće veličine u ovim sistemima relativno je jednostavan, a upotrebljava se za zadavanje nominalnih uvjeta rada.

Na sl. 1.19. nominalnom režimu rada $u = u^0$ odgovara srednji položaj jezgre elektromagneta. Za $u \neq u^0$, dolazi do pomaka jezgre elektromagneta. Taj mehanički pomak se posredstvom potenciometra P_2 pretvara u signal razlike $\varepsilon(t)$.

Izlazni napon pojačala proporcionalan je ulaznom naponu $\varepsilon(t)$.

$$u_M = k_1 \varepsilon \tag{1.10}$$

Koeficijent proporcionalnosti k_1 ovisi o svojstvima elektromagneta, potenciometra P_2 i pojačala A.

Brzina vrtnje elektromotora prenosi se preko reduktora na kliznik reostata R. Brzina pomaka kliznika reostata proporcionalna je naponu motora u_M. U stacionarnom stanju brzina promjene koordinate kliznika reostata je određena jednadžbom:

$$\frac{dL}{dt} = k_2 u_M \tag{1.11}$$

gdje je: L – koordinata kliznika reostata R
k_2 – koeficijent proporcionalnosti koji ovisi o tehničkim karakteristikama motora i reduktora

Iz (1.10) i (1.11) proizlazi:

$$\frac{dL}{dt} = k_1 k_2 \varepsilon = K \cdot \varepsilon \tag{1.12}$$

Iz (1.12) proizlazi da je brzina pomaka kliznika reostata proporcionalna iznosu signala razlike $\varepsilon(t)$. Za $\varepsilon > 0$ kliznik reostata pomicat će se ulijevo, tj. smanjivat će otpor u uzbudnom krugu, povećavat će se struja uzbude i_u, što ima za posljedicu povećanje izlaznog napona generatora u. Za $\varepsilon < 0$, proces se odvija u suprotnom smjeru.

Primjena posredne regulacije napona omogućava znatno povećanje točnosti – točnijim ostvarivanjem zakona promjene izvršne veličine. Povećanje točnosti postiže se primjenom preciznog potenciometra P_2 (trenje između klizača i potenciometra je zanemarivo), i elektromotora s reduktorom koji svladava moment trenja na reostatu u uzbudnom krugu.

U sisteme stabilizacije mogu se ubrojiti svi do sada razmatrani primjeri. Element vodeće veličine u ovim sistemima relativno je jednostavan, a služi za namještanje nominalnih uvjeta rada.

Programska regulacija. Ovi sistemi namijenjeni su promjeni izlazne veličine $y(t)$ po zadanom programu. Program može biti određen kao funkcija vremena $y = y(t)$ ili kao parametarski program $y = y(x_1, x_2, \ldots x_n)$ gdje su x_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ fizikalne veličine koje karakteriziraju stanje objekta u toku regulacijskog procesa.

Vremenski programi imaju vrlo široku primjenu. Na primjer, automatski regulator brzine vrtnje motora velike snage može biti namijenjen ne samo za

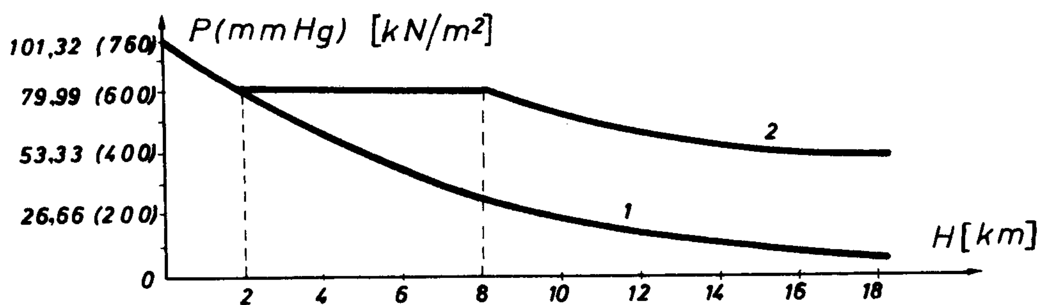
stabilizaciju brzine vrtnje u okolišu nominalne radne točke, već i za regulaciju vremenskog porasta brzine vrtnje pri upuštanju motora.

Analogno, vremenski program regulacije može se zadavati pri termičkoj obradi metala, kada tehnološki proces zahtijeva određen režim brzine zagrijavanja do nominalnog iznosa.

U mnogim slučajevima normalni režim rada objekta može biti definiran vremenskim programom promjene regulirane veličine, npr. kurs plovnih i letećih objekata.

U SAR s vremenski programiranim zakonom upravljanja uključuje se element u kojem je sadržan program upravljanja.

Parametarski programi također se mnogo koriste u svim granama tehnike. Na primjer, u metaloprerađivačkoj industriji za izradu detalja složenih profila (brodskih propelera, lopatica turbina itd.), te promjena izvršne veličine ovisno o stanju parametara objekta regulacije. Programski se može zadati ovisnost visine leta aviona o pređenom putu ili program regulacije pritiska u hermetičkom prostoru suvremenih aviona. Program regulacije pritiska je ilustriran krivuljom 2 na sl. 1.20, a zadaje se kao funkcija visine leta. Ovisnost atmosferskog pritiska o visini leta ilustrirana je krivuljom 1 na sl. 1.20.



Slika 1.20

Do visine od 2000 m pritisak u kabini praktički je jednak vanjskom i ne regulira se. U granicama 2000 m do 8000 m pritisak se održava konstantnim na 79,99[kN/m^2], a na visinama većim od 8000 m održava se konstantna razlika između pritiska u kabini i vanjskog pritiska.

Funkcionalne sheme sistema programske regulacije konstruktivno se razlikuju od shema stabilizacije postojanjem složenijeg elementa vodeće veličine, tj. programskog uređaja.

Slijedni sistemi (*servosistemi*) namijenjeni su ostvarivanju promjene izlazne veličine $y(t)$ po unaprijed nepoznatom zakonu, tj. vodeća veličina $u(t)$ je slučajna funkcija vremena.

Ovisno o prirodi izlazne veličine najčešće se primjenjuju slijedni sistemi zakreta (kuta), brzine vrtnje i momenta, koji mogu biti električki, pneumatski, hidraulički i kombinirani. Vrlo često se susreće da je vodeća veličina $u(t)$ kut zakreta ili napon.

Slijedni sistemi koji su namijenjeni prijenosu kuta zakreta vodeće (komandne) osovine na izlaznu (izvršnu) osovinu imaju zadatak da održavaju jednakost:

$$\theta_1(t) = \theta_2(t) \tag{1.13}$$

gdje je: $\theta_1(t) = u(t)$ kut zakreta komandne osovine
$\theta_2(t) = y(t)$ kut zakreta izvršne osovine

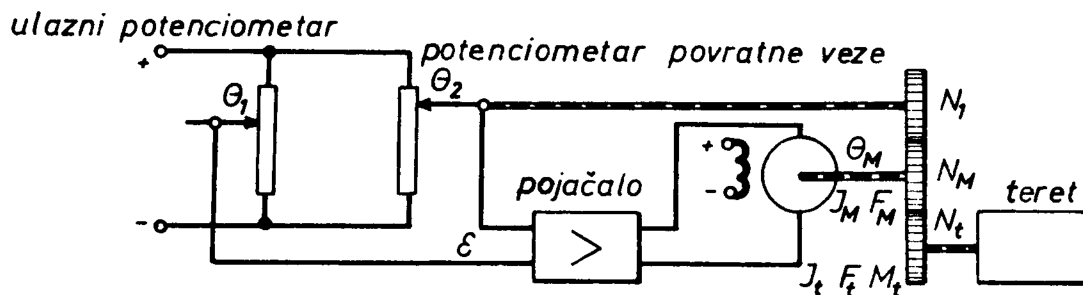
Neophodnost ostvarivanja zadataka prema (1.13) susreće se pri daljinskom mjerenju raznih električkih i neelektričkih veličina, pri upravljanju raznim mehanizmima i sistemima, pri daljinskom upravljanju gibajućim objektima, energetskim postrojenjima i raznim tehnološkim procesima.

Slijedni sistemi primjenjuju se u slučajevima kada je za zakret izvršne osovine potrebna veća snaga i relativno visoka točnost.

Po principu djelovanja slijedni sistemi ne razlikuju se od sistema stabilizacije i programske regulacije. Konstrukcijske razlike se sastoje općenito u realizaciji elementa vodeće veličine. Vodeća veličina može se dovoditi na ulaz sistema iz nekog automatskog uređaja, neautomatskog uređaja ili preko čovjeka operatora. U velikom broju slučajeva osnovna poremećajna veličina jest moment tereta na izvršnoj osovini sistema. Zbog potrebne visoke točnosti rada svi slijedni sistemi sadrže pojačalo i realizirani su kao SAR s posrednom regulacijom.

Primjer 1.12.

Na slici 1.21. prikazana je shema slijednog sistema kuta zakreta izvršne osovine istosmjernog motora.



Slika 1.21.

Kao detektor služi par potenciometara s kliznicima koji su kruto vezani za komandnu i izvršnu osovinu. Razlika (potencijala) položaja kliznika proporcionalna je razlici zakreta komandne i izvršne osovine $\varepsilon = k\,(\theta_1 - \theta_2)$. Signal razlike sistema pojačava se u pojačalu A koje stavlja u pogon istosmjerni motor. Kut zakreta izvršne osovine dovodi se preko reduktora na ulaz sistema. Motor se zaustavlja kada je $\varepsilon = 0$, odnosno $\theta_1 = \theta_2$. Slijedni sistemi kuta zakreta imaju naziv i pozicioni slijedni sistemi (servosistemi).

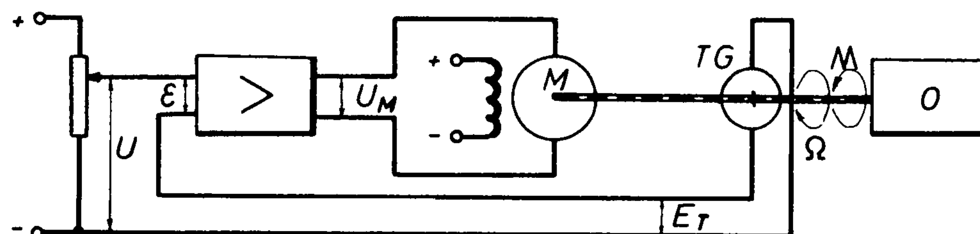
Slijedni sistemi brzine vrtnje namijenjeni su promjeni brzine vrtnje izvršne osovine po zakonu zakreta komandne osovine.

Primjer 1.13.

Na slici 1.22. prikazana je shema slijednog sistema brzine vrtnje istosmjernog motora.

Kao detektor brzine vrtnje Ω, upotrijebljen je tahogenerator TG. Izlazni napon tahogeneratora E_T proporcionalan je brzini vrtnje osovine motora, $E_T = k\Omega$. Signal razlike sistema je ulazni napon pojačala, $\varepsilon\,(t) = u\,(t) - E_T$ gdje je $u\,(t)$ slučajna funkcija. Stacionarno stanje postiže se za $\varepsilon = 0$. Za $u\,(t) = u^{\circ} = \text{const}$, slijedni sistem sl. 1.13. postaje sistem automatske stabilizacije.

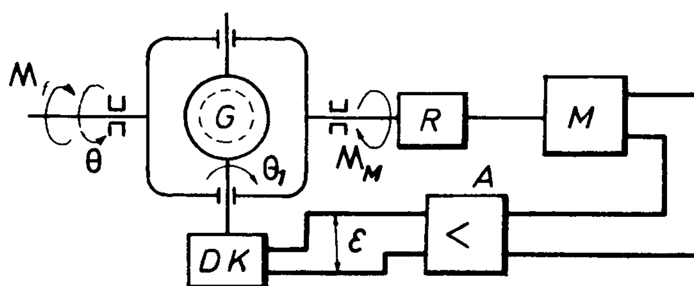
Slijedni sistemi momenta namijenjeni su automatskoj kompenzaciji momenata nastalih zbog djelovanja poremećajnih veličina. Poremećajni moment kompenzira se protumomentom što ga stvara motor slijednog sistema.



Slika 1.22.

Primjer 1.14.

Na sl. 1.23. prikazana je pojednostavnjena shema momentnog slijednog sistema – jednoosnog žiroskopskog stabilizatora. Žiroskopski stabilizator je namijenjen stabilizaciji osi orijentacije nekog gibajućeg objekta. Zadatak sistema jest da održi os orijentacije konstantnom, tj. $\theta = \theta^{\circ} = \text{const}$.



Slika 1.23.

Sistem žirostabilizatora sastoji se od žiroskopa G, davača kuta DK, pojačala A, motora M i reduktora R. Kao detektor primijenjen je žiroskop. Pojavom poremećajnog momenta M na osi stabilizacije, unutarnji okvir žiroskopa zakreće se za kut θ_1. Mehanički zakret θ_1 se preko DK pretvara u napon signala razlike ε, koji preko pojačala A, motora M i reduktora R stvara protumoment M_M. Moment M_M drži ravnotežu momentu M_f, a time je položaj orijentacijske osi žiroskopa ostao nepromijenjen.

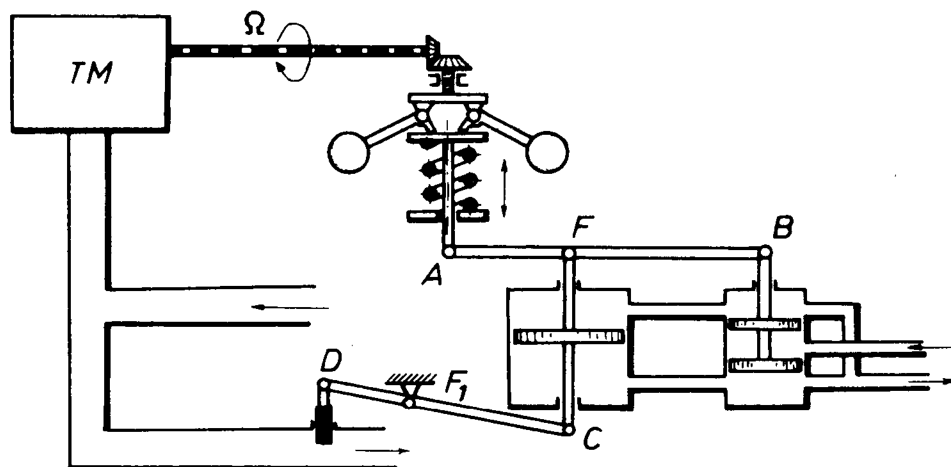
1.8. SAR s više povratnih veza

Bilo koji zatvoreni SAR sadrži barem jednu povratnu vezu pomoću koje se signal koji karakterizira stvarnu promjenu izlazne veličine $y(t)$ dovodi na ulaz sistema, gdje se uspoređuje s vodećom veličinom $u(t)$. Povratna veza kojom se izlazna veličina dovodi na element usporedbe s ulaznom veličinom ima naziv *glavna povratna veza.*

Osim glavne povratne veze u suvremenim sistemima se primjenjuju i *sporedne* (*dopunske*) *povratne veze*, kojima se postižu potrebna svojstva pojedinih funkcionalnih cjelina sistema odnosno sistema u cjelini. Sporedne povratne veze vrlo često se koriste kod pojačala, izvršnih elemenata i korekcijskih komponenata.

Primjer 1.15.

Na sl. 1.24. prikazana je shema SAR brzine vrtnje termičkog motora sa sporednom povratnom vezom kojom je obuhvaćen izvršni element regulatora – hidraulički motor.



Slika 1.24.

Za razliku od SAR (sl. 1.18), gdje je točka F poluge nepomična, u SAR (sl. 1.24), točka F je pomična, jer je kruto vezana za stap cilindra snage. Ova *kruta* povratna veza ostvaruje povratno djelovanje između pomaka stapa cilindra i stapa upravljajućeg ventila, tj. u hidrauličkom motoru ugrađena je dopunska (unutarnja) povratna veza.

Promjenom brzine vrtnje izlazne osovine termičkog motora, npr. za $\Omega > \Omega^{o}$, povećat će se centrifugalna sila detektora i protusila opruge (stiskanjem opruge), što uzrokuje zakretanje poluge AB oko pomičnog okretišta F u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu. Zakretanje poluge AB pomiče stap upravljajućeg ventila prema gore, radni fluid protiče u gornji dio cilindra snage i uzrokuje pomicanje klipa prema dolje. Pomak klipa zakreće polugu CD oko nepomičnog okretišta F_1 tako da povećava otvor ventila za odvod goriva, a time se smanjuje dovod goriva u termički motor, tj. smanjuje se brzina vrtnje Ω.

Kruta povratna veza djeluje tako da je pomak stapa cilindra snage proporcionalan pomaku stapa upravljajućeg ventila, odnosno integralni zakon ovisnosti izvršne veličine y_r (otvora ventila za dovod goriva) o signalu razlike sistema (1.9), pretvara se u proporcionalni zakon (1.7).

U sistemu bez dopunske povratne veze (sl. 1.18) hidraulički motor bi se trebao zaustaviti u stacionarnom stanju, tj. kada je $\Omega = \Omega^{o}$ zbog inercijskih svojstava sistema dolazi do neželjenog prigušenog osciliranja izlazne veličine. Da bi se neželjene oscilacije smanjile, potrebno je da do zaustavljanja hidrauličkog motora dođe prije trenutka postizanja $\Omega = \Omega^{o}$, što se ostvaruje primijenjenom krutom povratnom vezom.

1.9. Višestruki (multivarijabilni) SAR

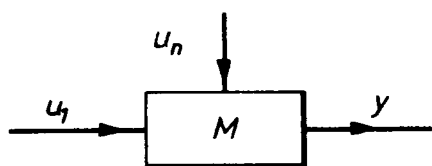
Višestruki ili multivarijabilni SAR, znače sisteme koji sadrže više ulaznih i izlaznih veličina. Ovi sistemi općenito sadrže više regulacijskih organa i više jednostrukih SAR. Ovisno o funkcionalnoj povezanosti između varijabli sistema razlikuju se višestruko zavisni i višestruko nezavisni SAR.

Višestruki sistemi uveliko se primjenjuju u procesnoj industriji pri upravljanju složenim objektima, u vojnoj tehnici, kozmičkim letjelicama i sl.

1.10. Kontinuirani i diskretni SAR

Prijenos signala kroz SAR vrši se primjenom modulatora. Obično modulator ima dva ulaza (sl. 1.25). Ulazne veličine su izvor informacije u_1 i veličina u_n „nosilac" informacije. Izlazna veličina modulatora je funkcija ulaznih veličina:

$$y = y(u_1, u_n) \tag{1.14}$$



Slika 1.25.



Slika 1.26.

Ovisno o karakteru funkcija $u_1(t)$ i $u_n(t)$ modulacija može biti kontinuirana i diskretna.

Sistemi s kontinuiranom modulacijom imaju naziv *kontinuirani SAR*. Ulazne i izlazne veličine svih elemenata sistema odnosno sistema u cjelini su kontinuirane funkcije vremena. Kontinuirana veličina $u_n(t)$ može biti konstantna ili harmonička. U SAR s električkim veličinama koristi se harmonička funkcija:

$$u_n(t) = A \sin(\omega t + \theta) \tag{1.15}$$

gdje je: A – amplituda
ω – kružna frekvencija
θ – početna faza signala.

Bilo koji od tri parametra (A, ω, θ) može se koristiti za prijenos informacije $u_1(t)$. U slučaju kada je amplituda od $u_n(t)$, funkcija ulazne veličine $u_1(t)$; $A = A(u_1)$, primijenjena je *amplitudna* modulacija, analogno za $\omega = \omega(u_1)$ i $\theta = \theta(u_1)$ primijenjena je *frekvencijska* odnosno *fazna* modulacija.

U električkim sistemima s izmjeničnom strujom vrlo često se primjenjuje amplitudna modulacija, pa jednadžba (1.14) ima oblik:

$$y(t) = u_1(t)\, u_n(t) = u_1 A \sin(\omega t + \theta) \tag{1.16}$$

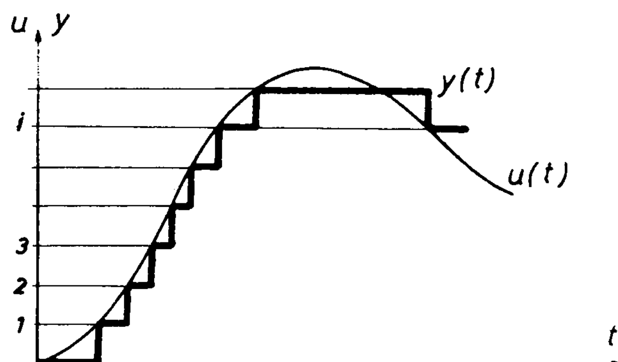
Kao primjer modulatora koji ostvaruju jednadžbu (1.16) mogu se navesti potenciometarski davači sa sinusoidalnim priključnim naponom, selsinski davač kuta razlike, magnetska pojačala s izmjeničnim izlazom itd.

Sistemi s diskretnom modulacijom sadrže barem jedan diskretni element *DE* koji vrši ulogu diskretnog modulatora (sl. 1.26).

Sistemi koji sadrže jedan ili više diskretnih elemenata imaju naziv *diskretni SAR*. Izlazna veličina diskretnog elementa je diskretna funkcija $y_2 = y_2(i)$; $(i = 1, 2, \ldots n)$.

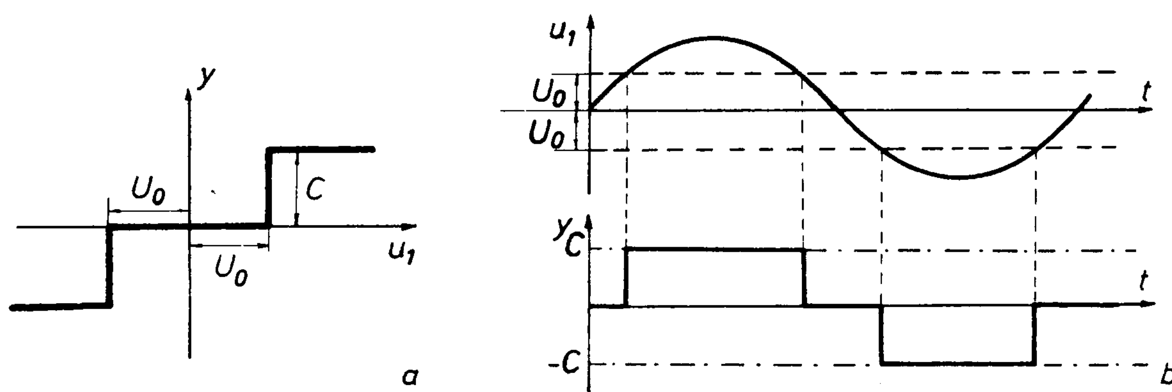
U primjeni su diskretni elementi koji na izlazu ostvaruju: diskretnost signala po nivou, diskretnost signala po vremenu i diskretnost signala po vremenu i nivou.

Signali diskretni po nivou ostvaruju se fiksiranjem diskretnih nivoa signala neovisno o vremenu. Diskretni element zamjenjuje iznos kontinuirane ulazne veličine s najbližim fiksiranim diskretnim iznosom izlazne veličine (sl. 1.27).



Slika 1.27.

U jednostavnijim slučajevima diskretnost signala po nivou ostvaruje se relejnim elementom *RE* (sl. 1.28).



Slika 1.28.

Izlazna veličina relejnog elementa poprima konačan broj fiksiranih iznosa. Na primjer, primjenom relejnog elementa sa statičkom karakteristikom (sl. 1.28.a) s ulaznom veličinom u_1 (t), sl. 1.28.b, izlazna veličina y (t) će se mijenjati skokovito svaki put kada ulazna veličina poprima iznos zone neosjetljivosti u_0.

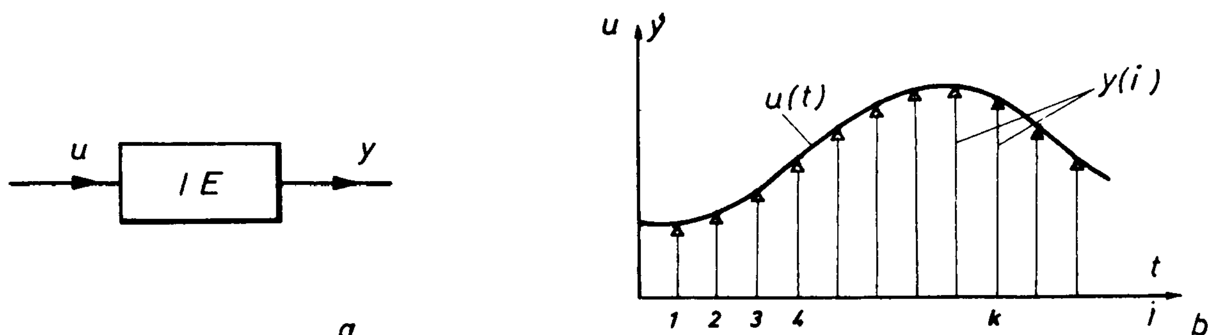
Sistemi koji sadrže jedan ili više relejnih elemenata imaju naziva *relejni SAŔ*.

Primjer 1.16.

Na sl. 1.29. prikazana je shema jednostavnijeg SAR temperature primjenom dvopoložajnog relejnog elementa.

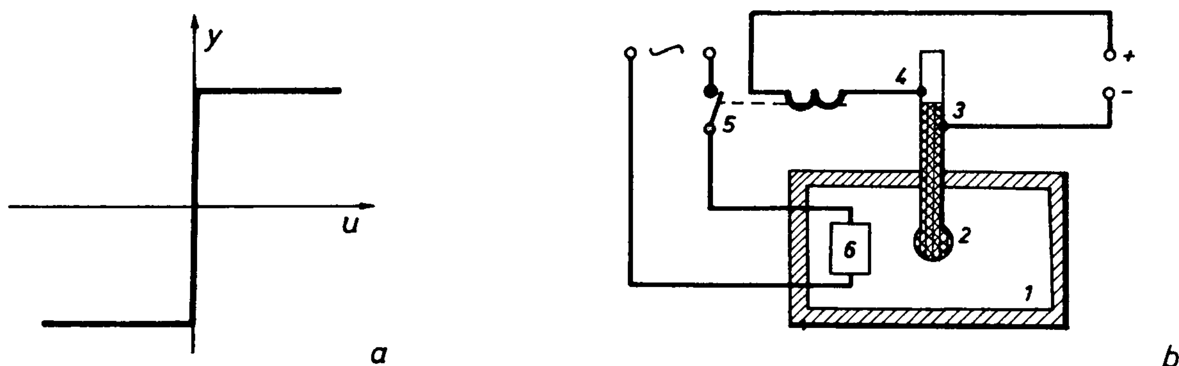
Temperatura peći 1 mjeri se živinim termometrom 2 u kojem su ugrađeni kontakti 3 i 4. Pri povećanju temperature stupac žive zatvara kontakte 3 i 4, uključuje krug releja 5 koji isključuje iz mreže električki grijač 6. Pri smanjenju temperature proces se ponavlja u suprotnom smjeru.

Signali diskretni po vremenu ostvaruju se fiksiranjem diskretnih momenata vremena neovisno o iznosima ulazne veličine. Diskretni element zamjenjuje kontinuiranu ulaznu veličinu sa slijedom moduliranih impulsa.



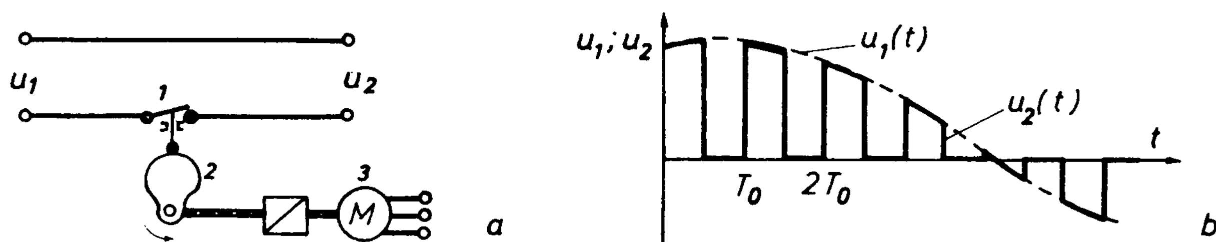
Slika 1.29.

Diskretni element koji ostvaruje diskretnost signala po vremenu naziva se još *impulsnim elementom* (*IE*) (sl. 1.30).



Slika 1.30.

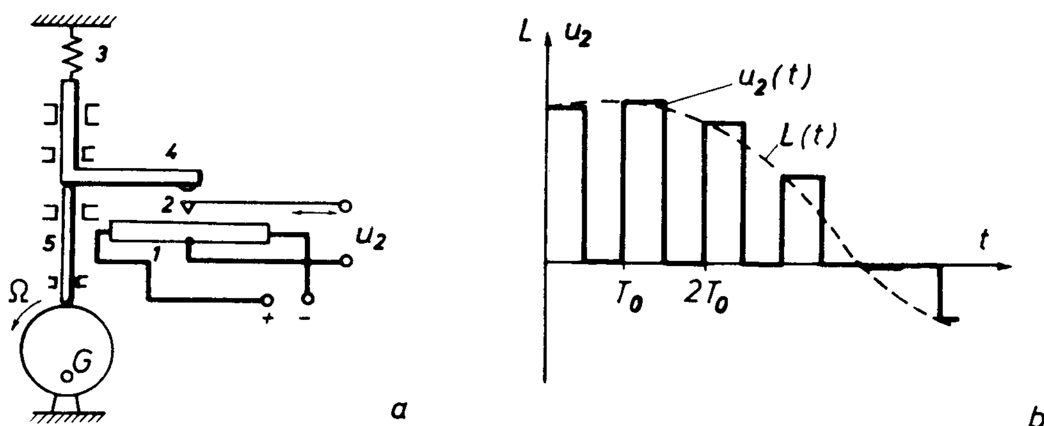
Kao jednostavniji primjer impulsnog elementa s amplitudno-impulsnom modulacijom (*AIM*) može poslužiti uređaj za periodičko otvaranje i zatvaranje kontakta električkog kruga sl. 1.31.



Slika 1.31.

Impulsni element (sl. 1.31) ostvaruje amplitudno-impulsnu modulaciju prve vrste (*AIM I*), tj. amplituda izlaznog slijeda impulsa u_2 mijenja se za vrijeme trajanja impulsa po zakonu kontinuirane ulazne veličine napona u_1. Perioda moduliranog slijeda impulsa T_0 određena je periodom ekscentra 2 kojeg preko reduktora okreće elektromotor 3.

Na sl. 1.32. prikazana je shema *IE* koji se sastoji iz potenciometra 1, pomičnog kontakta 2, opruge 3, poluge 4, osovine 5 i ekscentra 6. Ekscentar 6 okreće se konstantnom brzinom Ω i pomoću osovine 5 pokreće polugu 4 koja pritiskom na pomični kontakt 2 ostvaruje izlazni slijed impulsa u_2.

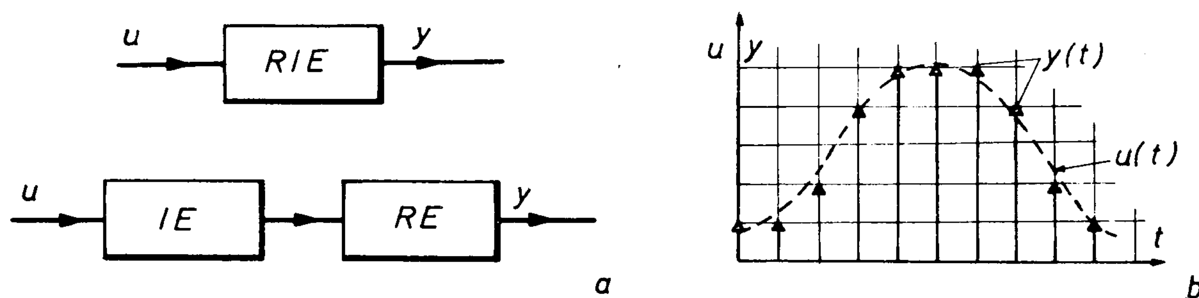


Slika 1.32.

Impulsni element (sl. 1.32) ostvaruje amplitudno-impulsnu modulaciju druge vrste (*AIM II*), tj. amplituda izlaznog slijeda impulsa u_2 konstantna je za vrijeme trajanja impulsa i proporcionalna je udaljenosti *L*, kontakta 2 od srednje točke namotaja potenciometra.

Period izlaznog slijeda impulsa određen je brzinom vrtnje ekscentra $T_0 = 2\pi/\omega$. Pomični kontakt 2 obično je spojen s detektorom regulirane veličine i za razliku od kliznog kontakta znatno povećava točnost mjerenja izlazne veličine, a time i SAR u cjelini. Diskretni sistemi koji sadrže amplitudno-impulsni element imaju naziv *linearni impulsni SAR*.

Signali diskretni po nivou i po vremenu ostvaruju se *relejno-impulsnim elementom* (*RIE*) koji se može realizirati serijskom vezom impulsnog elementa i relejnog elementa (sl. 1.33).



Slika 1.33.

U većini slučajeva relejno-impulsni elementi ostvaruju impulsno-kodnu modulaciju ulaznog signala. Kodiranjem kontinuiranih signala postiže se znatno veća točnost prijenosa informacija. Posebno visoka točnost postiže se digitalnim kodiranjem. U tehnici se vrlo često primjenjuje binarni kod koji se može relativno jednostavno realizirati raznim relejskim elektroničkim elementima. Sistemi s impulsno-kodnom modulacijom imaju još naziv *digitalni SAR*.

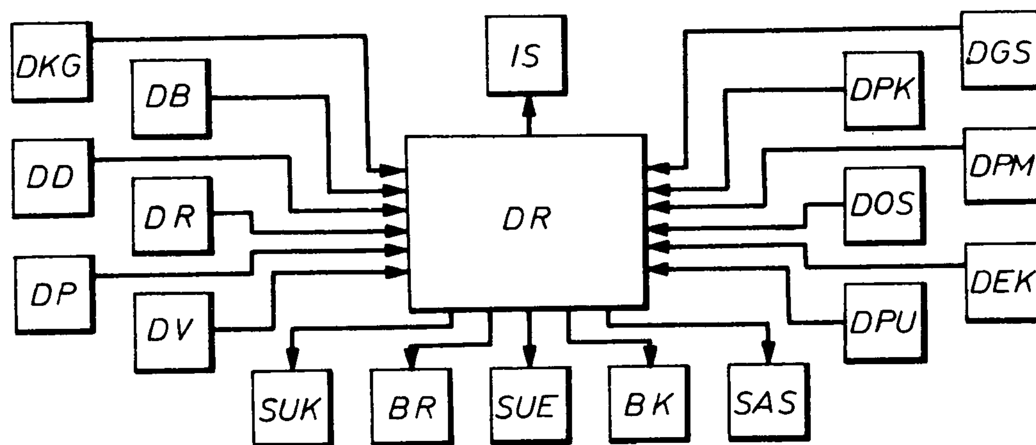
Funkcionalnost diskretnih sistema uvjetovana je primjenom *analogno-digitalnih* (*A/D*) i *digitalno-analognih* (*D/A*) pretvarača, pomoću kojih se vrši potrebna pretvorba kontinuiranih veličina u diskretne odnosno diskretnih veličina u kontinuirane.

Važno svojstvo diskretnih sistema (sistema s impulsnom modulacijom) jest mogućnost realizacije *višekanalnih SAR*, tj. mogućnost primjene jednog diskretnog regulatora za upravljanje većim brojem raznih procesa. Višekanalno upravljanje postiže se korištenjem vremena između dva impulsa za prijenos informacije sa drugog izvora.

Među razmotrenim diskretnim sistemima najviše se primjenjuju digitalni sistemi. Ti sistemi sadrže bilo jednostavnije digitalne računske uređaje ili digitalna računala s određenom namjenom. Primjenom digitalnih računala u sistemima automatskog upravljanja omogućena je kompleksna automatizacija složenih sistema. Na primjer, automatizacija visokih peći, valjaoničkih postrojenja, sistema za preradu nafte, upravljanje balističkim raketama, kozmičkim aparatima, brodskim procesima itd.

Primjer 1.17.

Na sl. 1.34. prikazana je funkcionalna shema sistema automatizacije broda, koja omogućava rješavanje zadataka automatizacije procesa vođenja broda, regulacije energetskog kompleksa, automatskog rukovanja teretom itd.



Slika 1.34.

Osnovni dio diskretnog sistema (sl. 34) je digitalno elektroničko računalo *DR* koje dobiva informacije u diskretnom obliku od dvije grupe davača. Prva grupa uključuje davače navigacijske informacije: davač žirokompasa *DGK*, davač brzine *DB*, davač dubine *DD*, davač radiolokatora *DR*, davač uređaja za određivanje položaja broda *DP* i davač ljuljanja (valjanje broda) *DV*. Informacija iz ove grupe davača služi za određivanje parametara gibanja broda kao i parametara objekata u okolici da bi se moglo pouzdano manevrirati. Druga grupa davača služi za dobivanje informacija o

procesima u energetskom kompleksu, pomoćnim mehanizmima i drugim sistemima opće namjene. U ovu grupu uključeni su davači glavnog stroja *DGS*, davači pomoćnih mehanizama glavnog stroja (pumpe, kompresori itd.) *DPK*, davači palubnih mehanizama *DPM*, davači općih brodskih sistema *DOS*, davači elektroenergetskog kompleksa *DEK* i davači pomoćnih uređaja brodskih sistema *DPU*.

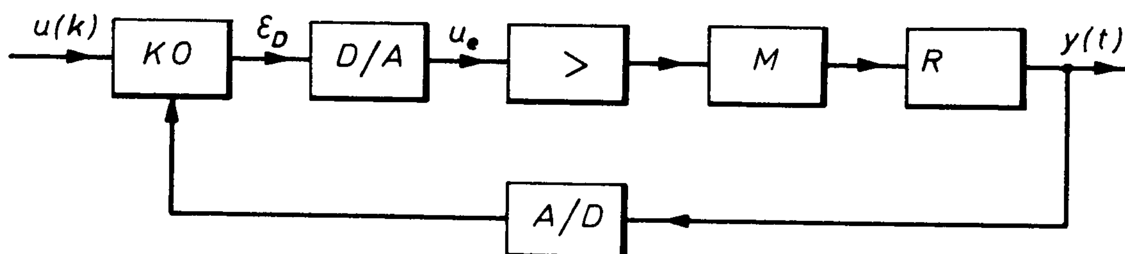
U prikazanom sistemu uključen je indikatorski sistem za ekranizaciju okolice *IS*, blok za registraciju svih osnovnih brodskih procesa *BR* i blok za signalizaciju kontrole izvršenja komandnih zadataka.

Digitalno računalo obrađuje primljene informacije, izračunava optimalna rješenja u obliku diskretnih signala. Ti signali dovode se kao upravljajuće veličine na izvršne mehanizme sistema automatskog upravljanja kursom *SUK*, sistema automatskog upravljanja energetskim kompleksom *SUE* i sistema automatske stabilizacije broda na valovima *SAS*.

Izvršni mehanizmi *SAR* u praksi su realizirani kao elementi kontinuiranog djelovanja. Većinom su to električki, hidraulički i pneumatski motori. Da bi diskretni *SAR* mogao udovoljiti postavljenim zahtjevima, neophodna je ugradnja *A/D* i *D/A* pretvarača kao elementa koji omogućavaju povezivanje kontinuiranog i diskretnog dijela sistema.

Primjer 1.18.

Na sl. 1.35. prikazana je funkcionalna shema digitalnog slijednog sistema namijenjenog pretvorbi diskretnog signala $u(k)$ u kontinuirani signal $y(t)$, kut zakreta izlazne osovine izvršnog elektromotora.



Slika 1.35.

Sistem na sl. 1.35, za razliku od odgovarajućeg kontinuiranog slijednog sistema, sadrži tri diskretna elementa: analogno-digitalni pretvarač *A/D*, koji mjeri kontinuiranu veličinu kut zakreta y i pretvara je u diskretnu veličinu y_D; komparator *KO*, koji uspoređuje diskretnu veličinu u_D (potrebni zakon promjene kuta zakreta izlazne osovine – vodeća veličina) s diskretnom veličinom y_D; Digitalno-analogni pretvarač koji diskretnu veličinu, signal razlike ε_D, pretvara u kontinuiranu veličinu napon u_e. Preostali dio slijednog sistema sadrži kontinuirane elemente: pojačalo, dvofazni asinhroni motor i reduktor.

Digitalna elektronička računala koja su namijenjena upravljanju sistemima razlikuju se od računala koja rade u stacionarnim uvjetima, tj. računala koja su namijenjena rješavanju raznih matematičkih zadataka. Prije svega, računala u sistemima automatskog upravljanja rade u stvarnom vremenskom mjerilu, snabdjevena su mrežom ulaznih i izlaznih uređaja kojima se automatski realizira dovod ulaznih veličina i odvod izlaznih veličina, odlikuju se visokom točnošću i pouzdanošću rada i

predstavljaju osnovno tehničko sredstvo kompleksne automatizacije u industriji, transportu, vojnim sistemima itd.

1.11. Linearni i nelinearni sistemi

Stanje dinamičkog sistema opisuje se prikladnim matematičkim aparatom. Općenito se ovisnost ulazne i izlazne veličine sistema prikazuje jednadžbom oblika:

$$D[u(t)] = D_o[y(t)] \tag{1.17}$$

Veličine D i D_0 u jednadžbi (1.17) zapravo su operatori koji su primijenjeni na funkcije $u(t)$ i $y(t)$. Konkretni oblik ovih operatora slijedi iz jednadžbi kojima se opisuje dinamičko stanje razmatranog sistema. S matematičkog stajališta razlikuju se linearni i nelinearni operatori.

Operator D definira se kao *linearni* operator samo onda kada se može primijeniti princip superpozicije:

$$D\left[\sum_k u_k(t)\right] = \sum_k D[u_k(t)] \tag{1.18}$$

$$D[c_u(t)] = cD[u(t)]; \qquad c = \text{const.}$$

Iz (1.18) vidljivo je da je rezultat djelovanja linearnog operatora na bilo koju linearnu kombinaciju razmatranih funkcija jednak linearnoj kombinaciji rezultata djelovanja operatora na svaku funkciju posebno.

Dinamički sistemi kod kojih se stanje sistema može opisati primjenom linearnog operatora, tj. principa superpozicije, nazivaju se još *linearnim* sistemima.

Sistemi automatskog upravljanja kod kojih se dinamičko stanje ne može karakterizirati linearnim operatorom nazivaju se *nelinearnim* sistemima.

Za razliku od linearnih sistema, za nelinearne sisteme nije razrađena opća teorija nelinearnih diferencijalnih jednadžbi, pa se dinamička analiza provodi raznim približnim postupcima.

1.12. Stacionarni i nestacionarni sistemi

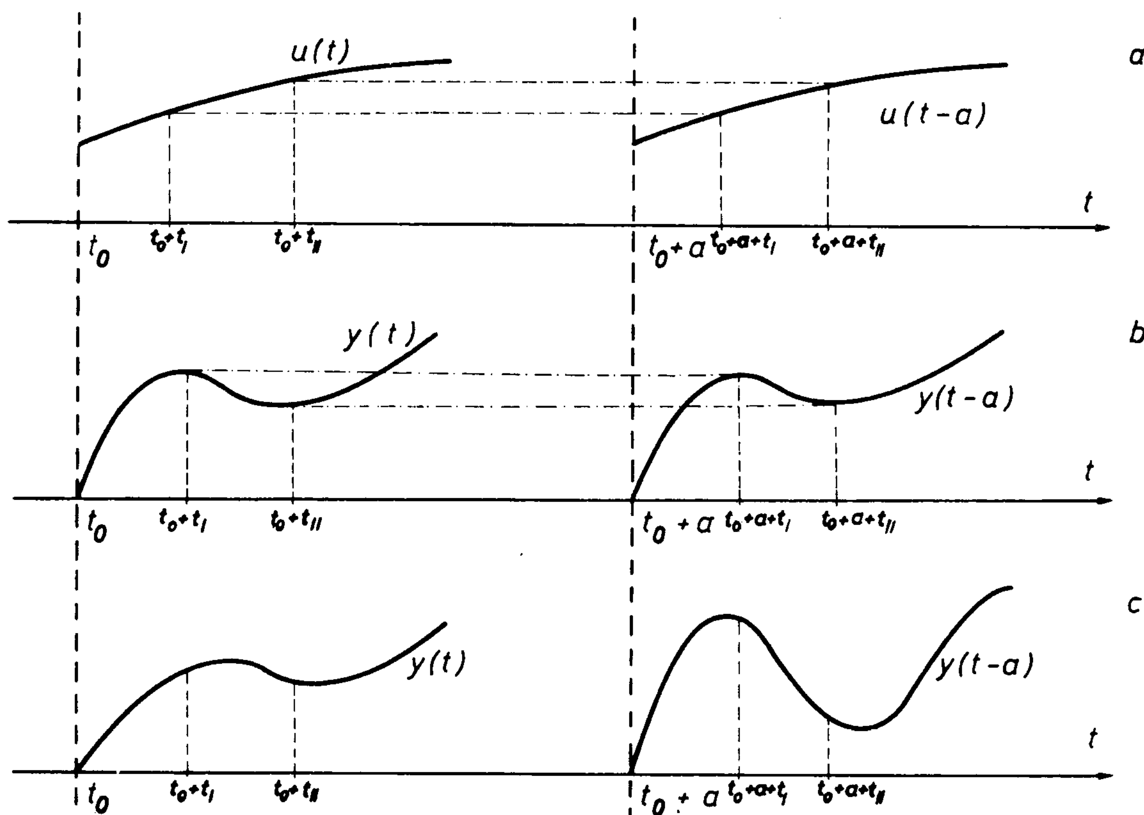
Općenito se stanje dinamičkog sistema opisuje operatorom sistema.

$$y(t) = Du(t) \tag{1.19}$$

Operator sistema D može biti zadan u raznim oblicima. Najčešće se zadaje sistemom jednadžbi kojima je opisan rad svih elemenata iz kojih se razmatrani sistem sastoji.

S obzirom na vremensku ovisnost parametara operatora, razlikuju se *stacionarni* sistemi kod kojih su svi parametri sistema konstantne veličine i *nestacionarni* sistemi kod kojih su jedan ili više parametara sistema vremenski promjenljive veličine. Na primjer, linearni i nelinearni sistemi koji se opisuju diferencijalnim jednadžbama s konstantnim koeficijentima ubrajaju se u stacionarne sisteme. Opći prikaz svojstava stacionarnog i nestacionarnog sistema automatskog upravljanja prikazan je na sl. 1.36. Pri neizmijenjenoj vremenski pomaknutoj ulaznoj funkciji, izlazna funkcija

stacionarnog sistema također je neizmijenjena i vremenski pomaknuta, (sl. 1.36.b) dok izlazna funkcija nestacionarnog sistema mijenja oblik ovisno o vremenu primjene ulazne funkcije (sl. 1.36.c).



Slika 1.36.

1.13. Determinirani i stohastički sistemi

Pod pojmom *determiniranih* sistema razumijevaju se dinamički sistemi koji se u jednakim uvjetima uvijek jednako ponašaju, tj. pri jednoj te istoj ulaznoj veličini izlazna veličina ovih sistema je uvijek jednaka i potpuno određena. Dinamički sistemi koji se u jednakim uvjetima u raznim slučajevima različito ponašaju nazivaju se *nedeterminiranim* sistemima. U determinirane sisteme ubrajaju se svi sistemi s konstantnim ili potpuno definiranim promjenljivim parametrima.

Kao primjer nedeterminiranog sistema može se navesti produkcija složenije proizvodne organizacije koja u pravilu pri jednakim uvjetima ima različitu dnevnu proizvodnju.

U mnogim slučajevima disperzija izlaznih veličina nedeterminiranog sistema potčinjava se statističkim zakonima. Sistemi u kojima pri određenoj ulaznoj veličini izlazna veličina ima slučajni karakter s nekom razdiobom vjerojatnosti nazivaju se *stohastičkim* sistemima. Praktički svi realni sistemi stohastičkog su karaktera, što je posljedica mnogih uzroka koji uvjetuju promjene parametara pojedinih elemenata sistema. U velikom broju tehničkih sistema promjena parametara je zanemariva, pa se oni tretiraju kao determinirani sistemi.

1.14. Adaptivni sistemi

U suvremenim sistemima automatskog upravljanja često je potrebno rješavati zadatke upravljanja objektima kod kojih u procesu eksploatacije, na unaprijed nepoznat način, dolazi do promjene svojstava i uvjeta rada. Automatsko upravljanje ovim objektima ostvaruje se primjenom *adaptivnih* sistema, tj. sistema koji sami dobivaju i koriste tekuću informaciju o svojstvima objekta i okolne sredine i automatski formiraju izvršnu veličinu potrebnu za ostvarivanje cilja upravljanja. Kao primjeri adaptivnih sistema mogu poslužiti sistemi automatskog upravljanja nadzvučnim avionima, sistemi automatskog upravljanja procesima u kemijskim reaktorima s katalizatorom, sistemi upravljanja mnogim vojnim gibajućim objektima itd.

Teorija adaptivnih sistema relativno je novo, teorijski nedovoljno istraženo područje teorije automatskog upravljanja.

1.15. Zahtjevi kojima trebaju udovoljiti dinamička svojstva SAR

Osim zahtjeva općetehničkog karaktera, kao što su: pouzdanost, neosjetljivost na smetnje, tehnologičnost konstrukcije, podobnost eksploatacije, minimalna cijena koštanja, optimalna težina i volumen itd., SAR s obzirom na specifičnu namjenu trebaju udovoljiti još cijelom nizu dodatnih zahtjeva. Među njima, kao osnovni, postavlja se zahtjev točnosti regulacije, tj. održavanja točnosti sistema (1.2) u propisanim granicama. S obzirom da se princip rada SAR sastoji u mjerenju i eliminiranju signala razlike, to nije moguće realizirati idealne sisteme kod kojih će iznos $\varepsilon(t)$ u svakom trenutku biti jednak nuli. Zato se uvijek pri projektiranju SAR nameće zadatak definiranja kriterija efikasnosti ili kvalitete regulacije kojem treba udovoljiti projektirani sistem. Realni sistemi udovoljavaju postavljenim kriterijima s određenim stupnjem približenja. U pravilu su sistemi s većim stupnjem približenja znatno složeniji, što otežava projektiranje i realizaciju sa stajališta općetehničkih zahtjeva. S obzirom da su općetehnički zahtjevi i zahtjevi visoke kvalitete međusobno suprotni, to se zadatak u projektiranju uvijek svodi na iznalaženje razumnog kompromisnog rješenja koje proizlazi iz određenih dopuštenih uvjeta rada sistema.

Općenito se pri projektiranju SAR postavljaju četiri kategorije zahtjeva:

- zahtjevi osiguranja stabilnosti sistema
- zahtjevi statičke točnosti sistema
- zahtjevi kvalitete prijelaznog procesa
- zahtjevi dinamičke točnosti sistema.

Pod pojmom *stabilnosti* razumijeva se svojstvo sistema da se nakon prestanka djelovanja vanjske veličine vraća u prvobitno stanje. Samo stabilni regulacijski sistemi mogu realizirati zadatke regulacije, pa se osiguranje stabilnosti nameće kao neophodan uvjet funkcionalnosti sistema.

Dinamička svojstva svakog sistema, pa i SAR, funkcije su parametara sistema i vanjskih veličina koje djeluju na sistem. Za velik broj realnih sistema moguće je dovoljno točno odrediti dinamička svojstva na osnovi pretpostavke da se vanjske veličine mogu tretirati određenim, za konkretni sistem, tipičnim determiniranim funkcijama. Te funkcije još se nazivaju *standardnim pobudnim* funkcijama. Na sl. 1.37. dati su grafički prikazi pobudnih funkcija kojima se najčešće nadomještaju svojstva realnih vodećih veličina.

Funkcija na sl. 1.37.a ima naziv *jedinična odskočna* (*skokovita*) *funkcija*, a definirana je:

$$u(t) = S(t) = \begin{cases} 0 \text{ za } t < 0 \\ 1 \text{ za } t \geq 0 \end{cases} \tag{1.20}$$

Deriviranjem izraza (1.20) dobije se *jedinična impulsna* funkcija:

$$\delta(t) = \frac{dS(t)}{dt} = \begin{cases} 0 \text{ za } t \neq 0 \\ \infty \text{ za } t = 0 \end{cases} \tag{1.21}$$

Primjenom odskočne funkcije dovoljno točno se nadomješta proces realizacije potrebnog nivoa vodeće veličine kod sistema automatske stabilizacije odnosno proces trenutnog zakreta komandne osi slijednog sistema kuta zakreta.

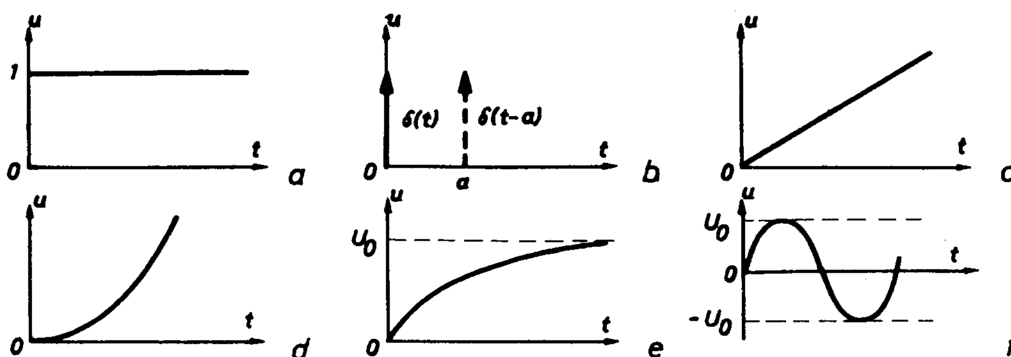
Na sl. 1.37.c prikazana je *nagibna* funkcija:

$$u(t) = \begin{cases} 0 \text{ za } t < 0 \\ t \text{ za } t \geq 0 \end{cases} \tag{1.22}$$

Nagibna funkcija koristi se pri analizi slijednih sistema kuta zakreta, a fizikalno odgovara konstantnoj brzini zakreta komandne osi.

Pri analizi sistema s konstantnim ubrzanjem promjene vodeće veličine, koristi se *parabolna* funkcija sl. 1.37.d:

$$u(t) = \begin{cases} 0 \text{ za } t \leq 0 \\ t^2 \text{ za } t > 0 \end{cases} \tag{1.23}$$



Slika 1.37.

Harmonička funkcija $u(t) = u^{o} \sin \omega t$ i eksponencijalna funkcija $u(t) = u^{o} e^{-rt}$ često se koriste pri ocjeni kvalitete i točnosti sistema. Općenito funkcije (1.20, 1.22. i 1.23) mogu biti pomnožene s nekom konstantom $k \neq 1$.

Oblici standardnih funkcija koje se koriste za analizu sistema pri djelovanju poremećajnih veličina prikazani su na sl. 1.38.

Funkcija (sl. 1.38.a) karakterizira npr. naglo povećanje ili smanjenje momenta tereta u sistemima regulacije brzine vrtnje, odnosno naglo opterećenje ili rasterećenje u sistemima regulacije napona generatora. Odgovarajući matematički opis ima oblik:

$$f(t) = \begin{cases} f_1 \text{ za } 0 \leq t \leq t_1 \\ f_2 \text{ za } \quad t > t_1 \end{cases} \tag{1.24}$$

Za slučaj smanjenja opterećenja, $f_1 > f_2$, odnosno za slučaj povećanja opterećenja, $f_1 < f_2$.

Funkcije (sl. 1.38.b, c, d, e) koriste se u analizi sistema podvrgnutih djelovanju periodičkih poremećajnih veličina. Matematički izrazi kojima se opisuju ove funkcije jesu:

Trokutasta periodička funkcija (sl. 1.35.b):

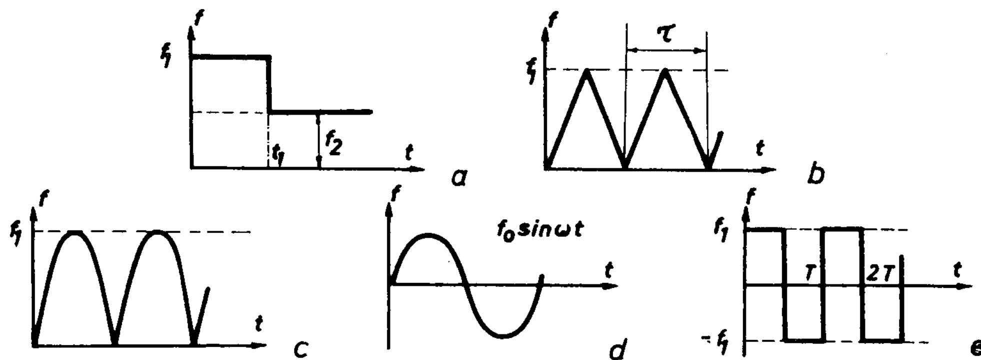
$$f(t) = f_1 \left[\frac{\tau}{2} + \frac{4\tau}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n-1)\pi t}{\tau}}{(2n-1)^2} \right] \tag{1.25}$$

Parabolna periodička funkcija (sl. 1.38.c):

$$f(t) = f_1 \left[\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi t}{\tau}}{n^2} \right] \tag{1.26}$$

Skokovita periodička funkcija, sl. 1.38.e:

$$f(t) = f_1 - 2f_1(t-\tau) + 2f_1(t-2\tau) - 2f_1(t-3\tau) + \dots \tag{1.27}$$



Slika 1.38.

Ovisno o specifičnostima i ciljevima analize pojedinih sistema općenito se kao vanjske veličine mogu koristiti i mnoge druge funkcije.

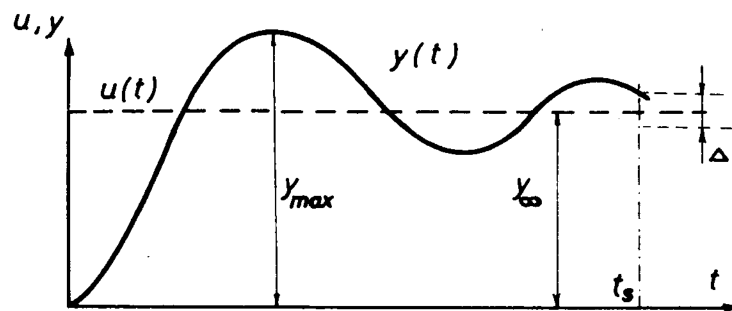
Pod utjecajem ulaznih veličina $u(t)$, $f(t)$ na izlazu sistema formira se izlazna veličina $y(t)$ koja općenito ima prijelazno i stacionarno stanje. Matematički oblik funkcije $y(t)$ dobije se kao rješenje jednadžbe (1.19). U slučajevima kada se u svojstvu ulazne funkcije primjenjuje odskočna funkcija, izlazna funkcija sistema naziva se *odzivnom* (prijelaznom) funkcijom sistema ili *vremenskim odzivom* sistema sl. 1.39.

Pomoću prijelazne (odzivne) funkcije karakteriziraju se osnovni pokazatelji kvalitete regulacije:

1. maksimalni otklon izlazne veličine y_{max},
2. stacionarni iznos izlazne veličine $y(\infty) = \lim_{t \to \infty} y(t)$,
3. vrijeme smirivanja prijelaznog procesa t_s.

Za $t > t_s$ vrijedi jednadžba:

$$|y(t) - y(\infty)| \leq \Delta \tag{1.28}$$



Slika 1.39.

Za usvajanje potrebnih znanja iz područja tehničke kibernetike nužno je poznavati teoriju linearnih stacionarnih sistema koja daje osnovni pristup analizi i sintezi bilo kojeg realnog sistema. U sljedećim poglavljima bit će opisani postupci analize linearnih stacionarnih kontinuiranih i diskretnih sistema koji se opisuju jednadžbama s konstantnim koeficijentima.

2

MATEMATIČKI OPIS KONTINUIRANIH LINEARNIH SISTEMA

2.1. Statički i dinamički režimi rada SAR

Sa stajališta matematičkog opisa procesa u sistemima automatskog upravljanja, prikazivanje sistema u obliku funkcionalne sheme nije dovoljno. Naime, funkcionalna shema prikazuje samo funkcionalne cjeline (elemente) i njihovo međusobno djelovanje, a ne obuhvaća funkcionalne ovisnosti izlaznih i ulaznih veličina dijelova sistema odnosno sistema u cjelini.

Funkcionalne ovisnosti između izlaznih i ulaznih veličina sistema odnosno dijelova sistema, iskazuju se odgovarajućim diferencijalnim ili integralno-diferencijalnim jednadžbama, tj. *matematičkim modelom sistema*. Pri određivanju matematičkog modela koriste se razni analitički i eksperimentalni postupci, kojima kao osnova služe fizikalni zakoni koji karakteriziraju ponašanje svake komponente sistema.

Analizom ponašanja većine različitih (po principu rada i konstrukciji) dijelova sistema, odnosno sistema u cjelini, došlo se do spoznaje da se veliki broj, po fizikalnoj prirodi različitih procesa, opisuje matematičkim modelom istog tipa. Ovo saznanje omogućava da se matematički model sistema određuje odgovarajućim kombinacijama tipičnih elementarnih matematičkih modela, tj. *tipičnih dinamičkih komponenata* (*članova*) *sistema*. Pri tome dinamičke komponente, za razliku od pojma elemenata sistema, općenito nisu konstrukcijski realizirani ili u funkcionalnoj shemi prikazani dijelovi sistema, iako u određenom broju slučajeva mogu odgovarati matematičkom opisu pojedinih elemenata sistema, dijelova elemenata sistema ili dijelova objekata regulacije.

Pri analizi i sintezi regulacijskog sistema razmatraju se statički i dinamički režimi rada.

Osnovni zadatak statičkog proračuna sastoji se u određivanju i osiguranju zadane točnosti rada sistema u stacionarnom (ravnotežnom) stanju.

Pri dinamičkoj analizi određuje se ponašanje sistema u prijelaznom režimu pod kojim se razumijeva proces prijelaza sistema iz jednog stacionarnog stanja u drugo stacionarno stanje. Sa fizikalnog stajališta prijelazno stanje sistema može se okarakterizirati kao stanje koje postoji u vrijeme promjene energetskih uvjeta pri kojima sistem prelazi iz jednog ravnotežnog stanja u drugo.

Općenito su realni sistemi u biti nelinearni, ali pri određenim uvjetima u velikom broju slučajeva moguće ih je analizirati primjenom linearne teorije.

Statički i dinamički režim rada sistema određuje se statičkim i dinamičkim režimima rada tipičnih dinamičkih komponenata sistema.

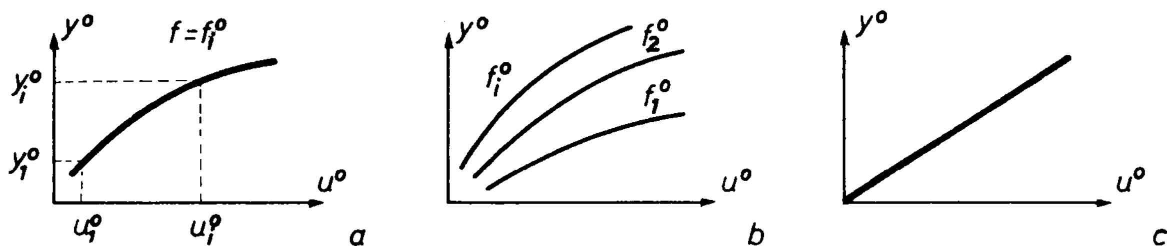
3 *

Statički režim dinamičke komponente opisuje se *jednadžbom statike* ili *statičkom karakteristikom*, kojim je prikazana funkcionalna ovisnost izlazne y i ulazne u veličine u stacionarnom stanju:

$$y = y(u) \tag{2.1}$$

Općenito jednadžba (2.1) može biti linearna, nelinearna, analitička i neanalitička, a određuje se analitičkim i eksperimentalnim postupcima. U teoriji linearnih sistema koriste se analitičke linearne i linearizirane statičke karakteristike.

Eksperimentalno određivanje statičke karakteristike dijela sistema (u većini slučajeva objekta regulacije) vrši se tako da se zadaju konstantni iznosi ulazne veličine $u = u_i^o$ i da se nakon završetka prijelaznog procesa snime odgovarajući iznosi izlazne veličine $y = y_i^o$, uz konstantne iznose poremećajne veličine $f = f_i^o$ (sl. 2.1).



Slika 2.1.

Pri analitičkom određivanju statičke karakteristike određuje se jednadžba statike u obliku:

$$y = y(u)$$

$$f(u, y) = 0 \tag{2.2}$$

$$u = u(\alpha); \qquad y = y(\alpha)$$

U procesu analize dinamičkog režima rada obično se rješavaju dva osnovna zadatka: određuje se stabilnost sistema i ocjenjuje se karakter prijelaznog procesa. Teoretska analiza provodi se na temelju matematičkog modela koji je kod većine linearnih sistema određen linearnim diferencijalnim jednadžbama s konstantnim koeficijentima. Pri sastavljanju diferencijalnih jednadžbi dinamičkih komponenata sistema primjenjuju se osnovni fizikalni zakoni odgovarajućeg znanstvenog područja. Na primjer, za dinamičke komponente električkih dijelova sistema koriste se Kirchhoffovi zakoni; za komponente mehaničke prirode koriste se Newtonovi zakoni; za pneumatske i hidrauličke komponente koriste se zakoni održanja energije i materije itd.

Radi određivanja linearnog matematičkog modela realnih dinamičkih sistema općenito se pristupa linearizaciji nelinearnih jednadžbi dinamičkih komponenata sistema.

2.2. Linearizacija nelinearnih jednadžbi dinamičkih komponenata SAR

Matematički model kontinuiranih stacionarnih sistema određen je diferencijalnom jednadžbom općeg oblika:

$$F\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, \dot{y}, y, u^{m}, u^{(m-1)}, \ldots, \dot{u}, u, f^{(q)}, f^{(q-1)}, \ldots, \dot{f}, f\right) = 0 \tag{2.3}$$

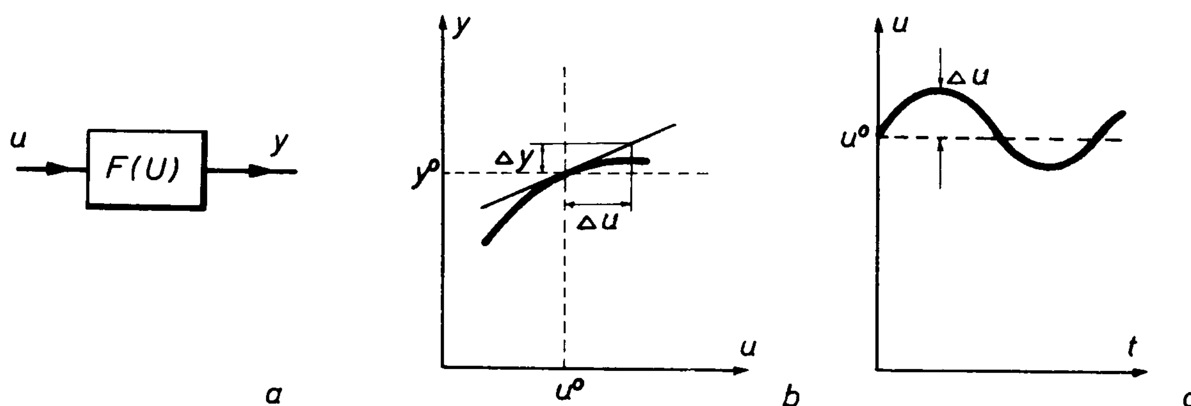
gdje su n, m, q – prirodni brojevi koji određuju najveći red derivacije veličine $y(t), u(t)$ i $f(t)$. U većini realnih sistema je $m<n$ i $q<n$. Rješenjem jednadžbe (2.3) dobije se tražena izlazna funkcija sistema $y(t)$.

Iz diferencijalne jednadžbe (2.3) za $y=y^{o}=\text{const.}$, $u=u^{o}=\text{const.}$ i $f=f^{o}=\text{const}$ proizlazi jednadžba statike sistema:

$$F(y^{o}, u^{o}, f^{o})=0 \tag{2.4}$$

Matematički modeli dinamičkih komponenata realnih sistema obično su nelinearne diferencijalne jednadžbe, što je većinom uzrokovano nelinearnim statičkim karakteristikama. Budući da rješavanje nelinearnih diferencijalnih jednadžbi zahtijeva primjenu raznih i dosta složenih matematičkih postupaka, nastoji se nelinearnu jednadžbu zamijeniti približnom linearnom jednadžbom, tj. vrši se *linearizacija* nelinearnih svojstava dinamičkih komponenata.

Linearizacija nelinearnih jednadžbi dinamičkih komponenata provodi se u odnosu na neki unaprijed određen režim rada. Najčešće se odabire statički režim koji je određen s konstantnim iznosima ulaznih i izlaznih veličina u^{o} i y^{o}. Uz pretpostavku malih dinamičkih odstupanja varijable u od statičkog režima u^{o}, nelinearna funkcija $y=F(u)$ (sl. 2.2), može se razviti u Taylorov red.



Slika 2.2.

Na osnovi izloženog i grafičkog prikaza (sl. 2.2), varijable dinamičke komponente prikazuju se izrazima:

$$\begin{aligned} u(t)&=u^{o}+\Delta u(t)\\ y(t)&=y^{o}+\Delta y(t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

odnosno

$$\begin{aligned} \Delta u(t)&=u(t)-u^{o}\\ \Delta y(t)&=y(t)-y^{o} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Razvojem funkcije $y=F(u)$ u Taylorov red i zanemarivanjem članova višeg reda, slijedi:

$$y\approx F(u^{o})+\left(\frac{dF}{du}\right)^{o}\cdot(u-u^{o})+\ \dots \tag{2.7}$$

gdje je: $\left(\frac{dF}{du}\right)^{o}=\left(\frac{dF}{du}\right)\Big|_{u=u^{o}}$.

Iz jednadžbi (2.6) i (2.7) proizlazi:

$$y-F\,(u^{o})=\Delta y\approx K\Delta u \tag{2.8}$$

gdje je: $K=\left(\dfrac{dF}{du}\right)^{o}$, koeficijent smjera tangente.

U teoriji automatskog upravljanja prikladno je da se diferencijalne jednadžbe prikazuju u operatorskom obliku. Pri tome se na lijevoj strani jednadžbe nalaze izlazna veličina i pripadne derivacije, dok su na desnoj strani smještene sve ulazne veličine i pripadne derivacije. S tog stajališta opći oblik diferencijalne jednadžbe koja se dobije linearizacijom jednadžbe (2.3) može se predočiti izrazom:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n-k)}}\right)^{o}\Delta y^{(n-k)}+\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial u^{(m-k)}}\right)^{o}\Delta u^{(m-k)}+\sum_{k=0}^{r}\left(\frac{\partial F}{\partial f^{(q-k)}}\right)^{o}\Delta f^{(q-k)}=0 \tag{2.9}$$

Operatorski oblik izraza (2.9) jeste:

$$(c_nD^n+c_{n-1}D^{n-1}+\ldots+c_1D+c_0)\,\Delta y=(b_mD^m+b_{m-1}D^{m-1}+\ldots+b_1D+b_0)\,\Delta u+$$
$$+(r_q\,D^q+r_{q-1}\,D^{q-1}+\ldots+r_1\,D+r_0)\,\Delta f \tag{2.10}$$

gdje je:

$$D^n=\frac{d^n}{dt^n};\qquad n=1,2\ldots \tag{2.11}$$

$$udt=\frac{1}{D}u \tag{2.12}$$

$$c_{n-k}=\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n-k)}}\right)^{o};\qquad k=0,1,2,\ldots,n \tag{2.13}$$

$$b_{m-k}=-\left(\frac{\partial F}{\partial x^{(m-k)}}\right)^{o};\qquad k=0,1,2,\ldots,m \tag{2.14}$$

$$r_{q-k}=-\left(\frac{\partial F}{\partial f^{(q-k)}}\right)^{o};\qquad k=0,1,2,\ldots,q \tag{2.15}$$

Jednadžba (2.10) može se pisati u obliku:

$$c\,(D)\,\Delta y\,(t)=b\,(D)\,\Delta u\,(t)+r\,(D)\,\Delta f\,(t) \tag{2.16}$$

gdje je:

$$c\,(D)=c_nD^n+c_{n-1}D^{n-1}+\ldots+c_1D+c_0 \tag{2.17}$$

$$b\,(D)=b_mD^m+b_{m-1}D^{n-1}+\ldots+b_1D+b_0 \tag{2.18}$$

$$r\,(D)=r_qD^q+r_{q-1}D^{n-1}+\ldots+r_1D+r_0 \tag{2.19}$$

Za određivanje dinamičkog ponašanja SAR koriste se standardni oblici polinoma $c\,(D)$, $b\,(D)$ i $r\,(D)$. Iz jednadžbi (2.16–2.19) za $c_0=c_1=\ldots=c_{\upsilon-1}=0$, i $c_\upsilon\neq0$, $0<\nu\leq n$, $b_0\neq0$, $r_0\neq0$, slijedi:

$$C(D)=(C_nD^{n-\upsilon}+C_{n-1}D^{n-1-\upsilon}+\ldots+1)\,D^{\upsilon} \tag{2.20}$$

$$K_\upsilon B\,(D)=K_\upsilon\,(B_mD^m+B_{m-1}D^{m-1}+1) \tag{2.21}$$

$$K_fR\,(D)=K_f\,(R_qD^q+R_{q-1}D^{q-1}+1) \tag{2.22}$$

gdje je:

$$C_i=\frac{c_i}{c_\upsilon}; \qquad i=0,1,2,\ldots,\nu \tag{2.23}$$

$$B_i=\frac{b_i}{b_0}; \qquad i=0,1,2,\ldots,m \tag{2.24}$$

$$R_i=\frac{r_i}{r_0}; \qquad i=0,1,2,\ldots,q \tag{2.25}$$

$$K_\upsilon=\frac{b_0}{c_\upsilon}; \qquad K_f=\frac{r_0}{c_\upsilon} \tag{2.26}$$

U slučajevima kada na sistem ili na dio sistema djeluje više poremećajnih veličina f_1, $f_2,\ldots,f_l$, opća jednadžba (2.16) poprima oblik:

$$c\,(D)\,\Delta y=b\,(D)\,\Delta u+\sum_{k=1}^{l} r_k\,(D)\cdot\Delta f_k \tag{2.27}$$

Iz (2.20 – 2.22) slijede dimenzije parametara (2.23 – 2.26):

$$[C_i]=s^{n-\upsilon-i}; \qquad [B_i]=s^{m-i}; \qquad [R_i]=s^{q-i};$$

$$K_\upsilon=\frac{[y]}{[u]}s^{-\upsilon}; \qquad K_f=\frac{[y]}{[f]}s^{-\upsilon}$$

Parametrima C_i, B_i i R_i određene su *vremenske konstante* sistema, a koeficijenti K_υ i K_f u slučajevima kada ulazne i izlazne veličine imaju istu dimenziju imaju naziv *koeficijenti pojačanja sistema.*

U daljnjem tekstu će se iz praktičnih razloga u diferencijalnim jednadžbama izostaviti simbol Δ, tj. otkloni izlaznih i ulaznih varijabli od zadanih statičkih iznosa bit će označeni s y umjesto Δy, odnosno s u umjesto Δu.

Iz (2.16), (2.20), (2.21) i (2.22) slijedi opći standardni oblik diferencijalnih jednadžbi koji se koristi u teoriji automatske regulacije:

$$C\,(D)\,D^\upsilon y=K_\upsilon B\,(D)\,u+K_f R\,(D)\,f \tag{2.28}$$

Prikazani postupci linearizacije nelinearnih diferencijalnih jednadžbi primjenjuju se u slučajevima kada se nelinearnosti mogu prikazati analitičkim funkcijama, a promjene varijabli u odnosu na (odabrani) statički režim mogu se smatrati dovoljno malenim. Tim uvjetima udovoljava velik broj kontinuiranih sistema automatskog upravljanja.

Primjer 2.1.

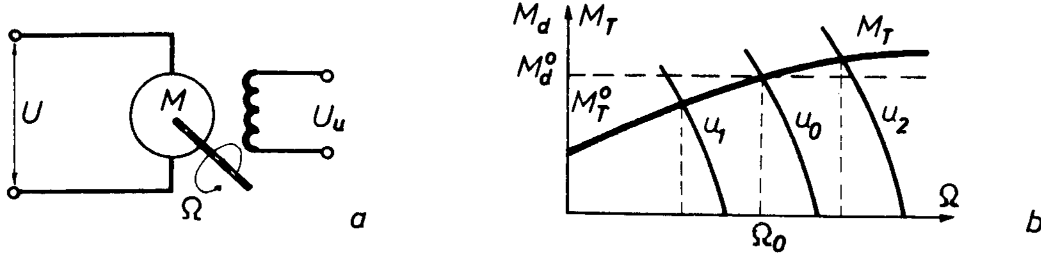
Na sl. 2.3.a,b prikazana je shema i statičke karakteristike istosmjernog elektromotora s nezavisnom uzbudom.

Pri određivanju diferencijalne jednadžbe motora primjenjuje se drugi Newtonov zakon:

$$I\frac{d\Omega}{dt}=M_d-M_T \tag{2.29}$$

gdje je:

Ω – kutna brzina osovine motora
I – moment inercije rotacijskih masa sveden na osovinu motora
M_d – moment vrtnje motora
M_T – moment tereta na osovini motora.



Slika 2.3.

Veličina M_d ovisi o kutnoj brzini Ω i o iznosu napona armature u; $M_d = M_d(\Omega, u)$. Moment opterećenja osovine motora ovisi o kutnoj brzini Ω i vremenu t; $M_T = M_T(\Omega, t)$. Te ovisnosti obično se zadaju grafički, a određene su uglavnom tipom motora i karakterom opterećenja. Tipične mehaničke karakteristike istosmjernog motora s nezavisnom uzbudom prikazane su na sl. 2.3.b. Kako je iz grafičkog prikaza vidljivo funkcije $M_d(\Omega)$ i $M_T(\Omega)$ su nelinearne analitičke funkcije argumenata Ω; odnosno jednadžba (2.29) je nelinearna diferencijalna jednadžba. Iz grafičkog prikaza (sl. 2.3.b) za $u = u^\circ$; $\Omega = \Omega^\circ$ slijedi statički režim rada motora (radna točka, kojom se obično određuju nominalni uvjeti rada).

$$M_d^\circ = M_T^\circ \tag{2.30}$$

Razlaganjem funkcija $M_d(\Omega, u)$ i $M_T(\Omega, t)$ u Taylorov red u odnosu na točku (Ω°, u°) i zanemarenjem članova viših od prvog reda slijedi:

$$M_d = M_d^\circ + \left(\frac{\partial M_d}{\partial \Omega}\right)^\circ \Delta\Omega + \left(\frac{\partial M_d}{\partial u}\right)^\circ \Delta u \tag{2.31}$$

$$M_T = M_T^\circ + \left(\frac{\partial M_T}{\partial \Omega}\right)^\circ \Delta\Omega + \Delta M_T(t) \tag{2.32}$$

Uvrštenjem (2.31) i (2.32) u (2.29) proizlazi:

$$I\frac{d\Omega}{dt} = \left(\frac{\partial M_d}{\partial \Omega}\right)^\circ \Delta\Omega + \left(\frac{\partial M_d}{\partial u}\right)^\circ \Delta u - \left(\frac{\partial M_T}{\partial \Omega}\right)^\circ \Delta\Omega - \Delta M_T(t) \tag{2.33}$$

Sređivanjem (2.33) slijedi linearizirana jednadžba (2.29)

$$I\frac{d\Omega}{dt} + \left[\left(\frac{\partial M_T}{\partial \Omega}\right)^\circ - \left(\frac{\partial M_d}{\partial \Omega}\right)^\circ\right]\Delta\Omega = -\Delta M_T(t) + \left(\frac{\partial M_d}{\partial u}\right)^\circ \Delta u \tag{2.34}$$

Jednadžba (2.34) svodi se na standardni oblik tako da se najprije napiše u obliku s bezdimenzijskim koeficijentima. Radi toga se svi koeficijenti podijele sa nominalnim iznosom momenta motora M_n:

$$\frac{1}{M_n} I \frac{d\Omega}{dt} + \frac{1}{M_n}\left[\left(\frac{dM_T}{d\Omega}\right)^\circ - \left(\frac{\partial M_d}{\partial \Omega}\right)^\circ\right]\Delta\Omega = -\frac{\Delta M_T(t)}{M_n} + \frac{1}{M_n}\left(\frac{\partial M_d}{\partial u}\right)^\circ \Delta u \tag{2.35}$$

Analogno varijable $\Delta\Omega$ i Δu svode se na bezdimenzijske tako da se iskazuju u relativnim iznosima. U tu svrhu odabiru se neki konstantni iznosi s kojima se dijele veličine $\Delta\Omega$ i Δu.

Vrlo često se za konstantni iznos izlazne veličine odabire njen nominalni iznos, a za konstantni iznos ulazne veličine odabire se maksimalni iznos. U jednadžbi (2.35) najprikladnije je uvesti bezdimenzijske varijable:

$$y=\frac{\Delta\Omega}{\Omega_n} \tag{2.36}$$

$$u=\frac{\Delta u}{u_{max}} \tag{2.37}$$

gdje je:

Ω_n – nominalni iznos brzine vrtnje
u_{max} – maksimalni napon armature motora.

Iz (2.35), (2.36) i (2.37) proizlazi:

$$\frac{\Omega_n}{\Omega_n}\frac{I}{M_n}\frac{d\Omega}{dt}+\frac{\Omega_n}{M_n}\left[\left(\frac{\partial M_T}{\partial\Omega}\right)^{\circ}-\left(\frac{\partial M_d}{\partial\Omega}\right)^{\circ}\right]\frac{\Delta\Omega}{\Omega_n}=-\frac{\Delta M_T(t)}{M_n}+\frac{u_{max}}{M_n}\left(\frac{\partial M_d}{\partial u}\right)^{\circ}\frac{\Delta u}{u_{max}} \tag{2.38}$$

Iz (2.38) i (2.10) dobije se operatorski oblik linearne diferencijalne jednadžbe motora:

$$(c_1 D+c_0)\,y=b_0 u-f \tag{2.39}$$

gdje je:

$$y=\frac{\Delta\Omega}{\Omega_n};\quad u=\frac{\Delta u}{u_{max}};\quad \left[\left(\frac{\partial M_T}{\partial\Omega}\right)^{\circ}-\left(\frac{\partial M_d}{\partial\Omega}\right)^{\circ}\right]\frac{\Omega_n}{M_n}=c_0;$$

$$\frac{\Delta M_T(t)}{M_n}=f(t);\quad \frac{I\Omega_n}{M_n}=a_1;\quad \frac{u_{max}}{M_n}\left(\frac{\partial M_d}{\partial u}\right)^{\circ}=b_0$$

$$\frac{1}{\Omega_n}\frac{d\Omega}{dt}=\frac{d\left(\frac{\Delta\Omega}{\Omega_n}\right)}{dt}=\frac{dy}{dt}=Dy$$

Standardni oblik diferencijalne jednadžbe (2.39) dobije se dijeljenjem cijele jednadžbe s koeficijentom c_0:

$$(T_1 D+1)\,y=Ku-K_f f \tag{2.40}$$

gdje je:

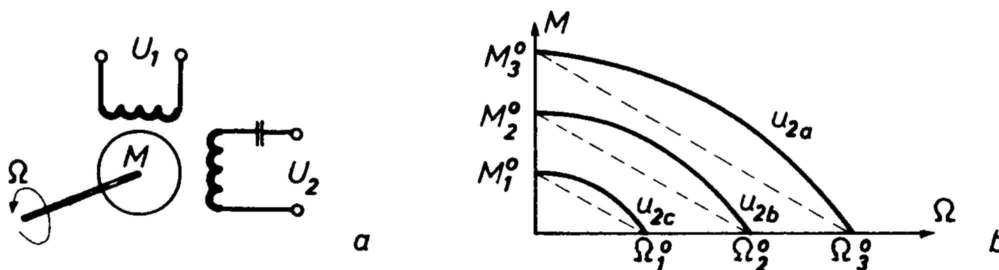
$T_1=\dfrac{c_1}{c_0}[s]$ – *vremenska konstanta* motora

$K=\dfrac{b_0}{c_0}=\dfrac{[y]}{[u]}$ – *koeficijent pojačanja* motora u odnosu na vodeću veličinu $u(t)$

$K_f=\frac{1}{c_0}=\frac{[y]}{[f]}$ – *koeficijent pojačanja* motora u odnosu na poremećajnu veličinu $f(t)$

Primjer 2.2.

Na sl. 2.4. prikazana je shema i statička karakteristika asinhronog dvofaznog motora.



Slika 2.4.

Pri određivanju linearne diferencijalne jednadžbe asinhronog dvofaznog motora, može se nelinearna statička karakteristika M (Ω) zamijeniti sekantom.

Ovaj motor se često koristi u sistemima automatske regulacije kao servo-motor u izvršnim mehanizmima sistema. U statoru motora smješten je uzbudni namotaj s uzbudnim naponom u_1 i upravljački namotaj na koji se obično dovodi napon s elektroničkog pojačala. U upravljačkom namotaju ugrađen je kondenzator C pomoću kojeg se postiže $\theta=90°$ među naponima u_1 i u_2. Fazni pomak je potreban za stvaranje obrtnog magnetskog polja.

Jednadžba momenata asinhronog dvofaznog motora je:

$$M_d=M_T+I\frac{d\Omega}{dt} \qquad (2.41)$$

gdje je:

$M_d=M_d(u_2, \Omega)$ – moment vrtnje motora
M_T – moment tereta na osovini motora
I – moment inercije rotacijskih masa sveden na osovinu motora.

Linearizirana statička karakteristika $M_d(u_2, \Omega)$ određena je jednadžbom sekante:

$$M_d=M_d^\circ-K_1\Omega=K_2u_2-K_1\Omega \qquad (2.42)$$

Iz (2.31) i (2.42) slijedi linearna diferencijalna jednadžba:

$$I\frac{d\Omega}{dt}+K_1\Omega=k_2u_2-M_T$$

odnosno u operatorskom obliku:

$$(c_1D+c_0)\Omega=k_2u_2-M_T \qquad (2.43)$$

gdje je:

$$c_1=I\ ; \qquad c_0=K_1\Omega\ ; \qquad D=\frac{d}{dt}$$

Dijeljenjem jednadžbe (2.43) s koeficijentom c_0, dolazimo do standardnog oblika linearne diferencijalne jednadžbe asinhronog dvofaznog motora:

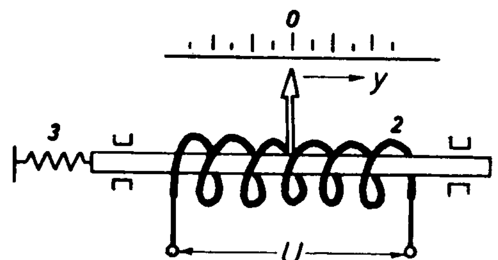
$$(T_1 D+1)\, y=Ku-K_f f$$

gdje je:

$$T_1=\frac{I}{c_1};\qquad K=\frac{K_2}{c_0};\qquad K_f=\frac{1}{c_0};\qquad \Omega=y;\qquad u_2=u;\qquad M_T=f$$

Primjer 2.3.

Na sl. 2.5. prikazana je shema elektromagnetskog detektora napona. Detektor se sastoji od jezgre elektromagneta 1, zavojnice 2 i povratne opruge 3.



Slika 2.5.

Ulazna veličina detektora je napon u, a izlazna veličina je pomak jezgre y. Detektor se opisuje jednadžbom gibanja jezgre i jednadžbom elektromagnetskih procesa:

$$m\ddot{y}+\mu\dot{y}+F_1(y)=F_2(i, y) \tag{2.44}$$

gdje je:

m – masa gibajućih dijelova
μ – koeficijent trenja
$F_1(y)$ – sila opruge
$F_2(i, y)$ – privlačna sila elektromagneta.

Jednadžba elektromagnetskih procesa jeste:

$$\frac{d\Phi}{dt}+iR=u$$

gdje je:

$\Phi=Li$ – magnetski tok elektromagneta
$L=L(y)$ – induktivitet zavojnice
R – omski otpor zavojnice.

Jednadžba detektora može se pisati u obliku:

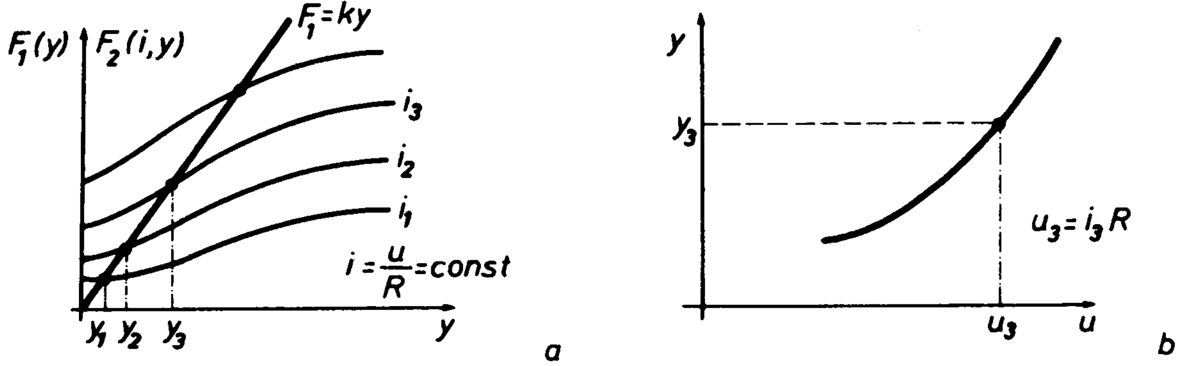
$$L\frac{di}{dt}+i\frac{dL}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}+iR=u \tag{2.45}$$

Prvi član u jednadžbi (2.45) predstavlja elektromotornu silu samoindukcije, a drugi član elektromotornu silu koja nastaje promjenom induktiviteta L do koje dolazi

zbog gibanja jezgre elektromagneta. Statički režim elektromagneta slijedi iz (2.44) i (2.45):

$$F_1(y)=F_2(i,y) \qquad iR=u \tag{2.46}$$

Rješenje jednadžbi (2.46) dobije se obično grafičkim postupkom (sl. 2.6).



Slika 2.6.

Statička karakteristika detektora (sl. 2.6.b) određuje se iz grafičkog rješenja statičkog režima (sl. 2.6.a).

Linearizacija jednadžbi (2.44) i (2.45) provodi se analogno postupku primijenjenom u primjeru 2.1. Kao rezultat linearizacije slijedi sistem od dvije linearne diferencijalne jednadžbe:

$$m\frac{d^2\Delta y}{dt^2}+\mu\frac{d\Delta y}{dt}+\left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^{\circ}-\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)^{\circ}\right]\Delta y=\left(\frac{\partial F_2}{\partial i}\right)^{\circ}\Delta i \tag{2.47}$$

$$L^{\circ}\frac{d\Delta i}{dt}+i^{\circ}\left(\frac{dL}{dy}\right)^{\circ}\frac{d\Delta y}{dt}+R\Delta i=u \tag{2.48}$$

Uvođenjem relativnih iznosa varijabli,

$$y=\frac{\Delta y}{y_n};\qquad u=\frac{\Delta u}{u_{\max}};\qquad i=\frac{\Delta i}{i_n}\quad \text{i zamjenom } D=\frac{d}{dt}$$

slijedi operatorski oblik jednadžbi (2.47) i (2.48):

$$(mD^2+\mu D+a)\,y=bi \tag{2.49}$$

$$(L^{\circ}+R)\,i+a_1 Dy=u \tag{2.50}$$

gdje je:

$$a=\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^{\circ}-\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)^{\circ};\qquad b=\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)^{\circ};\qquad a_1=i^{\circ}\left(\frac{dL}{dy}\right)^{\circ} \tag{2.51}$$

Iz (2.50) proizlazi:

$$i=\frac{u-a_1 Dy}{L_0 D+R} \tag{2.52}$$

Uvrštenjem (2.52) u (2.49) i sređivanjem proizlazi:

$$(c_3 D^3 + c_2 D^2 + c_1 D + c_0)\, y = b_0 u \tag{2.53}$$

Dijeljenjem (2.53) s koeficijentom c_0 dobivamo standardni oblik diferencijalne jednadžbe elektromagnetskog detektora napona:

$$(T_3^3 D^3 + T_2^2 D^2 + T_1 D + 1)\, y = ku \tag{2.54}$$

2.3. Prijenosne funkcije dinamičkih komponenata (funkcije prijenosa)

Određivanje općeg rješenja linearnih diferencijalnih jednadžbi direktnim integriranjem povezano je s dugotrajnim i složenim matematičkim postupcima, što je sa stajališta inžinjerske prakse neekonomično i nepraktično. U suvremenoj teoriji automatskog upravljanja za opis dinamičkog ponašanja sistema, osim linearnih diferencijalnih jednadžbi, primjenjuju se još prijenosne funkcije, prijelazne funkcije i amplitudno-fazne frekvencijske karakteristike.

Za određivanje funkcije $y(t)$ kao rješenja diferencijalne jednadžbe (2.28) potrebno je poznavati zakone promjene funkcija $u(t)$ i $f(t)$, i početne uvjete, tj. iznose funkcija i derivacija tih funkcija u trenutku $t=0$:

$$u(0); \quad u'(0); \ldots ; u^{(m)}(0); \quad f(0); \quad f'(0); \ldots ; f^{(q)}(0) \tag{2.55}$$

Kod realnih SAR za $t<0$ početni uvjeti (2.55) jednaki su nuli. Za analitičko određivanje funkcije $y(t)$ najprikladnija je primjena Laplaceove transformacije jednadžbe (2.28), a pri tome je:

$$Y(s) = L\{y(t)\} = \int_0^\infty y(t)\, e^{-st}\, dt \tag{2.56}$$

$$U(s) = L\{u(t)\} = \int_0^\infty u(t)\, e^{-st}\, dt \tag{2.57}$$

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \tag{2.58}$$

Primjenom (2.56 – 2.58) na jednadžbu (2.28) pri nultim početnim uvjetima:

$$\begin{aligned} y(0) &= y'(0) \ldots = y^{(n)}(0) = 0 \\ u(0) &= u'(0) = \ldots = u^{(m)}(0) = 0 \end{aligned} \tag{2.59}$$

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(q)}(0) = 0 \tag{2.60}$$

proizlazi:

$$\begin{aligned} (C_n s^{n-\upsilon} + C_{n-1} s^{n-\upsilon-1} + \ldots + 1)\, s^{\upsilon} Y(p) &= K\,(B_m s^m + B_{m-1} s^{m-1} + \ldots + 1)\, U(s) + \\ &+ K_f\,(R_q s^q + R_{q-1} s^{q-1} + \ldots + 1)\, F(s) \end{aligned} \tag{2.61}$$

gdje je:

$$\begin{aligned} L\{D^k y(t)\} &= s^k Y(s); \quad & k &= 0, 1, 2, \ldots, n \\ L\{D^k u(t)\} &= s^k U(s); \quad & k &= 0, 1, 2, \ldots, m \\ L\{D^k f(t)\} &= s^k F(s); \quad & k &= 0, 1, 2, \ldots, q \end{aligned} \tag{2.62}$$

skraćeni oblik jednadžbe (2.61) je:

$$C(s)s^{\upsilon}Y(s)=K_{\upsilon}B(s)U(s)+K_{f}R(s)F(s) \tag{2.63}$$

Jednadžbe (2.28) i (2.63) istog su oblika, ali se one međusobno suštinski razlikuju. Jednadžba (2.28) je diferencijalna jednadžba n-tog reda funkcije $y(t)$, dok je jednadžba (2.63) algebarska jednadžba prvog reda funkcije $Y(s)$. Jednadžba (2.63) može se odrediti direktno iz jednadžbe (2.28), tako da se simbol $D=\frac{d}{dt}$ formalno zamijeni kompleksnom varijablom $s=\sigma+j\omega$ što slijedi iz povezanosti Laplaceove i Fourierove transformacije.

Iz jednadžbe (2.63) proizlazi *standardni* oblik prijenosnih funkcija:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=G(s)=\frac{K_{\upsilon}B(s)}{s^{\upsilon}C(s)} \tag{2.64}$$

$$\frac{Y(s)}{F(s)}=G_{f}(s)=\frac{K_{f}R(s)}{s^{\upsilon}C(s)} \tag{2.65}$$

Jednadžba (2.64) ima naziv *prijenosna funkcija* dinamičke komponente sistema u odnosu na vodeću veličinu.

Jednadžba (2.65) ima naziv *prijenosna funkcija* dinamičke komponente sistema u odnosu na poremećajnu veličinu.

Općenito pod *prijenosnom funkcijom* bilo kojeg sistema ili dijela sistema razumijeva se odnos Laplaceove transformacije izlazne veličine sistema prema Laplaceovoj transformaciji ulazne veličine sistema uz sve početne uvjete jednakim nuli.

U teoriji automatskog upravljanja uobičajeno je da se prijenosne funkcije pišu u standardnom obliku, jer on omogućava lakše sagledavanje fizikalnosti procesa koji se odvijaju u dinamičkom sistemu.

Iz (2.64) i (2.65) slijedi da su prijenosne funkcije razlomljene racionalne funkcije kompleksne varijable s. Polinomi u brojniku i nazivniku $B(s)$ i $C(s)$ imaju realne koeficijente određene fizikalnim svojstvima sistema. Kod realnih sistema gotovo je uvijek stupanj polinoma u brojniku manji od stupnja polinoma u nazivniku. tj. ($m \leq n$; $q \leq n$).

Usporedbom izraza (2.64) i (2.65) vidljivo je da funkcije $G(s)$ i $G_f(s)$ imaju jedan te isti nazivnik $s^{\upsilon}C(s)=c(s)$. Polinom $c(s)$ se naziva *karakteristični polinom* dinamičkog sistema odnosno dinamičke komponente sistema, a jednadžba:

$$c(s)=0 \tag{2.66}$$

naziva se *karakterističnom jednadžbom* dinamičkog sistema odnosno dinamičke komponente sistema.

Karakteristična jednadžba algebarska je jednadžba n-tog reda ($n=0, 1, 2, \ldots$) koja ima n-korijena $s_1, s_2, \ldots, s_n$ koji općenito mogu biti realni, višestruki i konjugirano kompleksni.

Korijeni polinoma $c(s)$ imaju naziv *polovi* prijenosne funkcije, a korijeni polinoma u brojniku imaju naziv *nule* prijenosne funkcije. Prikaz prijenosne funkcije pomoću polova i nula ima opći oblik:

$$G(s)=\frac{b_0}{c_0}\,\frac{(s-n_1)(s-n_2)\ldots(s-n_m)}{(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)} \tag{2.67}$$

Rješenje algebarske jednadžbe (2.63) je:

$$Y(s)=\frac{K_v B(s)}{s^v C(s)} U(s)+\frac{K_f R(s)}{s^v C(s)} \cdot F(s) \tag{2.68}$$

Iz (2.64), (2.65) i (2.68) proizlazi:

$$Y(s)=G(s) U(s)+G_f(s) F(s) \tag{2.69}$$

odnosno:

$$Y(s)=Y_1(s)+Y_2(s) \tag{2.70}$$

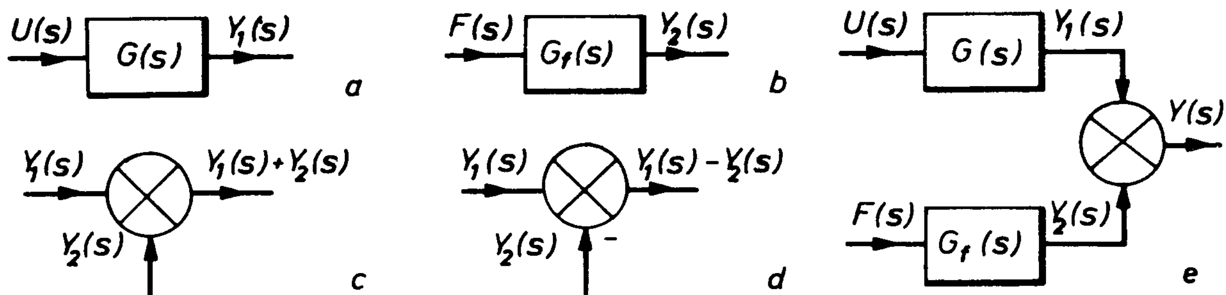
gdje je:

$$Y_1(s)=G(s) U(s) \tag{2.71}$$

$$Y_2(s)=G_f(s) F(s) \tag{2.72}$$

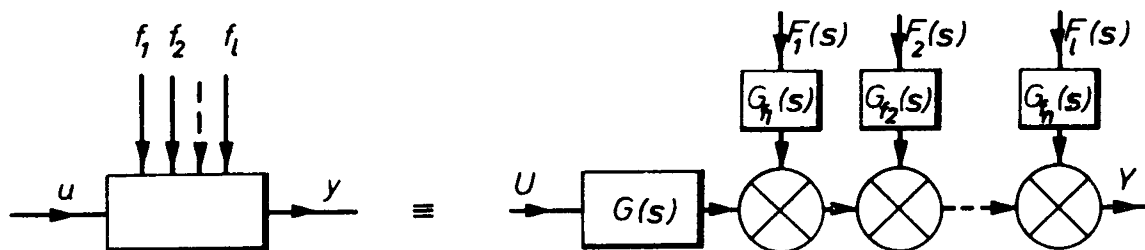
Jednadžbe (2.69), (2.71) i (2.72) prikladno je prikazivati u grafičkom obliku (sl. 2.7) gdje se izlazna veličina svakog od pravokutnika dobije kao rezultat umnoška ulazne veličine i prijenosne funkcije dinamičke komponente zapisane unutar pravokutnika.

Grafički prikaz (sl. 2.7) naziva se *strukturnom shemom* (strukturna shema se često u literaturi naziva i strukturnim blokom ili blokom dijagrama) dinamičke komponente, pod kojom treba razumijevati grafički prikaz jednadžbi koje povezuju Laplaceove transformacije izlaznih i ulaznih varijabli.



Slika 2.7.

U slučaju da na linearnu dinamičku komponentu djeluje veći broj vanjskih veličina, prijenosne funkcije i strukturne sheme određuju se primjenom principa superpozicije (sl. 2.8).



Slika 2.8.

Izlazna veličina dinamičke komponente (sl. 2.8) jest:

$$Y(s)=G(s) U(s)+\sum_{i=1}^{l} G_{fi}(s) F_i(s) \tag{2.73}$$

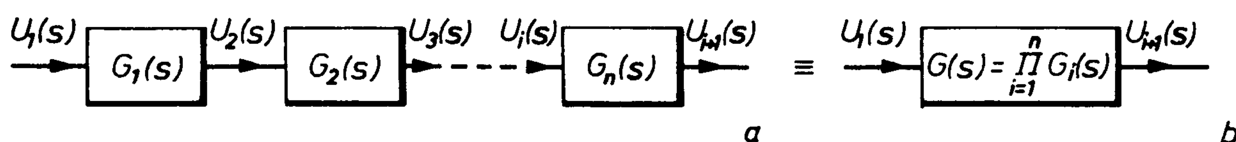
gdje je:

$$G_{fi}(s)=\frac{Y(s)}{F_i(s)} \tag{2.74}$$

Općenito, strukturne se sheme složenijih dinamičkih komponenata ili sistema sastoje iz međusobno povezanih strukturnih shema jednostavnijih dinamičkih komponenata.

Razlikuju se tri načina povezivanja: *serijska veza*, *paralelna veza* i *povratna veza*.

Kod *serijskog* povezivanja dinamičkih komponenata izlazna veličina prethodne komponente istovremeno je ulazna veličina sljedeće komponente (sl. 2.9). Razumijeva se da se razmatraju komponente s usmjerenim djelovanjem, tj. djelovanja se prenose samo u jednom smjeru od ulaza prema izlazu; naime, pri promjeni ulazne veličine dolazi do promjene izlazne veličine, ali promjena izlazne veličine ne utječe na promjenu ulazne veličine. Svojstvo usmjerenog djelovanja zapravo se postiže pojačanjem snage ulazne veličine.



Slika 2.9.

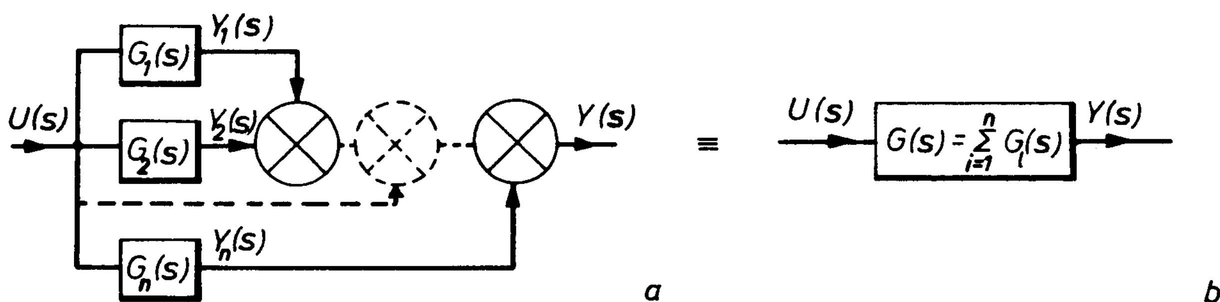
Prijenosna funkcija dinamičke komponente prikazane strukturnom shemom (sl. 2.9) je:

$$G(s)=\prod_{i=1}^{n} G_i(s)=G_1(s)\,G_2(s)\,G_3(s)\ldots G_n(s) \tag{2.75}$$

gdje je:

$$G_i(s)=\frac{U_{i+1}(s)}{U_i(s)}; \qquad i=1,\,2,\ldots,\,n \tag{2.76}$$

Kod *paralelnog* povezivanja dinamičkih komponenata sve komponente imaju istu ulaznu veličinu $U(s)$, a izlazna veličina dobije se zbrajanjem izlaznih veličina svih komponenata (sl. 2.10).



Slika 2.10.

Prijenosna funkcija strukturne sheme (sl. 2.10):

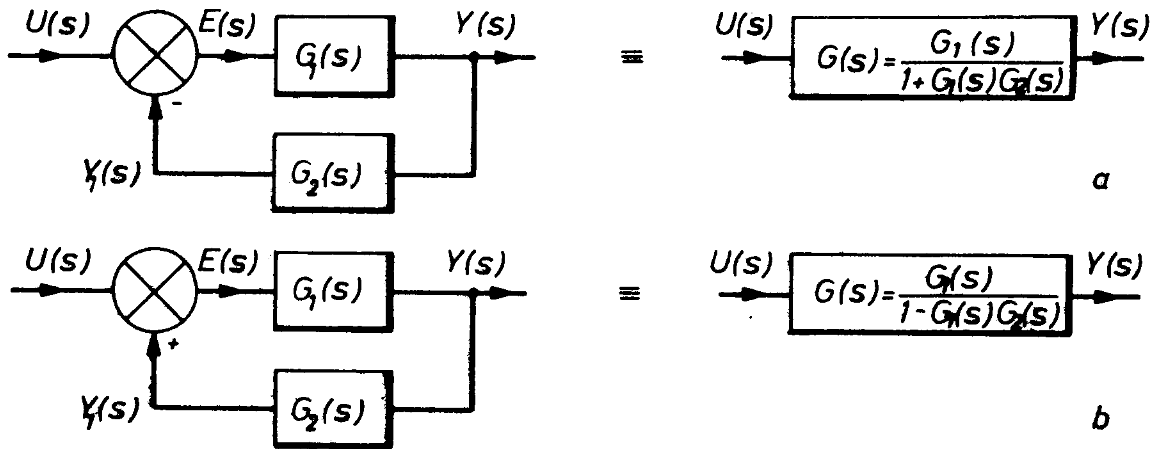
$$\frac{Y(s)}{U(s)}=G(s)=\sum_{i=1}^{n} G_i(s) \tag{2.77}$$

gdje je:

$$G_i(s)=\frac{Y_i(s)}{U(s)}; \qquad i=1, 2, \ldots, n \tag{2.78}$$

Strukturna shema povezivanja dinamičkih komponenata *povratnom vezom* prikazana je na sl. 2.11.

Primjenom principa povratne veze postižu se stabilizacijska i dinamička svojstva sistema. Općenito, povratna veza može biti pozitivna ili negativna. U SAU se u pravilu primjenjuje negativna povratna veza, a pozitivna se povratna veza primjenjuje u nekim specifičnim slučajevima u svojstvu dopunske povratne veze.



Slika 2.11.

Prijenosna funkcija dinamičke komponente (sl. 2.11.a) određuje se pomoću prijenosnih funkcija $G_1(s)$ i $G_2(s)$:

$$Y(s)=G_1(s)E(s) \tag{2.79}$$

$$E(s)=U(s)-Y_1(s) \tag{2.80}$$

$$Y_1(s)=G_2(s)\,Y(s) \tag{2.81}$$

Uvrštenjem (2.80) i (2.81) u (2.79) i sređivanjem proizlazi:

$$Y(s)=G_1(s)U(s)-G_1(s)\,G_2(s)\,Y(s) \tag{2.82}$$

odnosno:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)\,G_2(s)}=G(s) \tag{2.83}$$

Analogno za dinamičku komponentu (sl. 2.11.b) proizlazi:

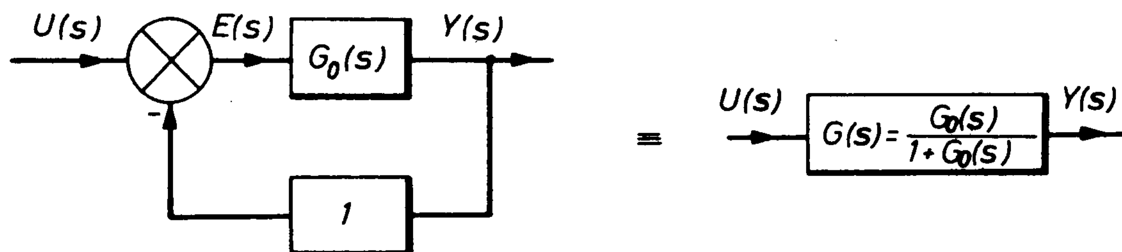
$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{G_1(s)}{1-G_1(s)\,G_2(s)}=G(s) \tag{2.84}$$

Od posebnog interesa u teoriji SAR su dinamičke komponente (sistemi) obuhvaćeni *jediničnom negativnom povratnom vezom* (sl. 2.12).

Prijenosna funkcija dinamičke komponente (sl. 2.12) proizlazi iz (2.79 – 2.81) za $G_2(s)=1$, i $G_1(s)=G_0(s)$.

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} \tag{2.85}$$

Jednadžbe (2.75), (2.77), (2.83) i (2.85) vrlo često se primjenjuju u teoriji sistema automatskog upravljanja, a posebno u teoriji linearnih stacionarnih sistema.



Slika 2.12.

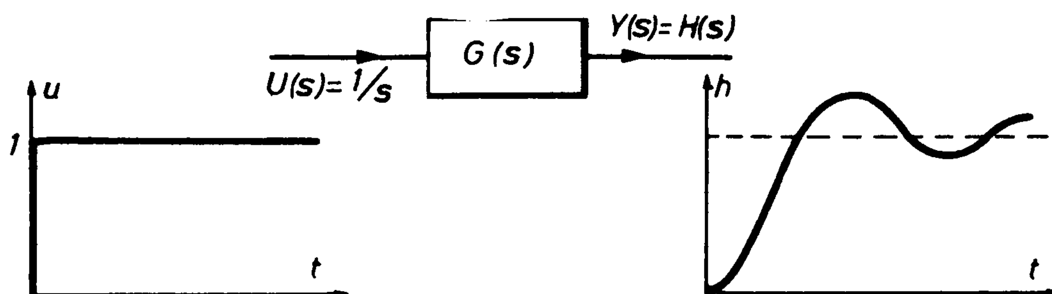
2.4. Vremenske karakteristike dinamičkih komponenata

Pod vremenskom karakteristikom dinamičke komponente ili sistema razumijeva se vremenska ovisnost izlazne veličine $y(t)$ o ulaznoj veličini $u(t)$, uz uvjet da je prije djelovanja ulazne veličine dinamička komponenta bila u stanju mirovanja.

Općenito, kada je na ulazu dinamičke komponente primijenjena standardna pobudna funkcija, vremenska karakteristika naziva se *vremenski odziv* ili *odzivna funkcija*.

Za određivanje vremenskog odziva najviše se kao pobudne funkcije upotrebljavaju odskočna (skokovita) funkcija (1.20) i delta funkcija (1.21).

Vremenski odziv dinamičke komponente ili sistema na odskočnu ulaznu funkciju naziva se još *odskočni odziv* ili *prijelazna funkcija* $h(t)$, (sl. 2.13).



Slika 2.13.

Prijelazna funkcija može se odrediti eksperimentalno i teoretski. Pri teoretskom određivanju prijelazne funkcije potrebno je riješiti diferencijalnu jednadžbu dinamičke komponente (2.27) za slučaj kada su poremećajne veličine $f_k=0$.

$$c(D)\,h(t)=b(D)\,S(t) \tag{2.86}$$

Primjenom Laplaceove transformacije na (2.86) proizlazi:

$$C(s)\,H(s)=B(s)\cdot\frac{1}{s} \tag{2.87}$$

odnosno:

$$H(s)=\frac{B(s)}{C(s)}\cdot\frac{1}{s}=G(s)\cdot\frac{1}{s} \tag{2.88}$$

Primjenom inverzne Laplaceove transformacije proizlazi:

$$h(t)=\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\,G(s)\right\} \tag{2.89}$$

Početni (za $t \to 0-$) i konačni iznos (za $t \to \infty$) prijelazne funkcije $h(t)$ može se odrediti primjenom teorema o početnom i konačnom iznosu:

$$h(0-)=\lim_{s\to\infty} s\,H(s)=\lim_{s\to\infty} G(s) \tag{2.90}$$

uvrštenjem u (2.90):

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{c_n s^n+c_{n-1}s^{n-1}+\ldots+c_1 s+c_0} \tag{2.91}$$

proizlazi:

$$h(0-)=\begin{cases} 0 & \text{za } m<n \\ \dfrac{b_m}{c_n} & \text{za } m=n \\ \infty & \text{za } m>n \end{cases} \tag{2.92}$$

Konačni iznos prijelazne funkcije slijedi iz:

$$h_{(\infty)}=\lim_{s\to 0} sH(s)=\lim_{s\to 0} \mathrm{G}(\mathrm{s}) \tag{2.93}$$

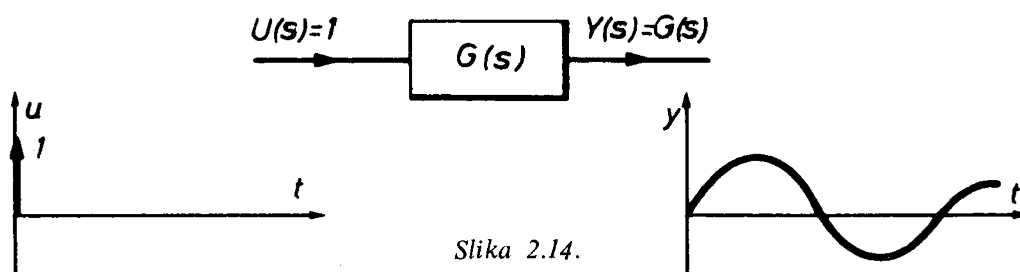
Iz (2.91) i (2.93) proizlazi:

$$h_{(\infty)}=\begin{cases} K=\dfrac{b_0}{c_0}; & \text{za } c_0\neq 0 \\ \infty\ ; & \text{za } c_0=0 \end{cases} \tag{2.94}$$

Ako na linearnu dinamičku komponentu sistema djeluje skokovita (odskočna) funkcija pomnožena s nekom konstantom $u^0 \neq 1$, odzivna funkcija se određuje izrazom:

$$y(t)=u^0\cdot h(t) \tag{2.95}$$

Vremenski odziv dinamičke komponente ili sistema na delta funkciju ima naziv *impulsni odziv* ili *impulsna prijelazna funkcija* $g(t)$ (sl. 2.14).



Slika 2.14.

Pri teoretskom određivanju impulsne prijelazne funkcije potrebno je riješiti diferencijalnu jednadžbu:

$$c(D)\,g(t)=b(D)\,\delta(t) \tag{2.96}$$

Primjenom Laplaceove transformacije na (2.96) proizlazi:

$$\mathrm{L}\{g(t)\}=G(s)=\frac{B(s)}{C(s)} \tag{2.97}$$

$$\mathrm{L}\{\delta(t)\}=1 \tag{2.98}$$

odnosno:

$$g(t)=\mathrm{L}^{-1}\{G(s)\} \tag{2.99}$$

Početni i konačni iznosi impulsne prijelazne funkcije određeni su jednadžbama:

$$g(0-)=\lim_{s\to\infty} sG(s) \tag{2.100}$$

$$g(\infty)=\lim_{s\to 0} sG(s) \tag{2.101}$$

Ako je $G(s)$ određena prema (2.91) to uvrštenjem u (2.100) i (2.101) proizlazi:

$$g(0-)=\begin{cases} 0; & \text{za } m<n-1 \\ \dfrac{b_m}{c_n}; & \text{za } m=n-1 \\ \infty; & \text{za } m>n-1 \end{cases} \tag{2.102}$$

$$g(\infty)=\begin{cases} 0; & \text{za } c_0\neq 0 \\ \dfrac{b_0}{c_1}; & \text{za } c_0=0,\ c_1\neq 0 \\ \infty; & \text{za } c_0=c_1=0 \end{cases} \tag{2.103}$$

U slučajevima kada je na ulazu linearne dinamičke komponente primijenjena funkcija $u^{\circ}\cdot\delta(t)$ gdje je $u^{\circ}\neq 1$, impulsna prijelazna funkcija određuje se izrazom:

$$y(t)=u^{\circ} g(t) \tag{2.104}$$

Iz (2.88) i (2.99) proizlazi povezanost između funkcija $h(t)$ i $g(t)$:

$$\mathrm{L}\left\{\frac{dh(t)}{dt}\right\}=sH(s)-h(0-)=G(s)-h(0+) \tag{2.105}$$

Kod realnih sistema u izrazu (2.91) $m<n$, pa iz (2.92) slijedi $h(0-)=0$. Iz (2.105) i (2.99) proizlazi:

$$\frac{dh(t)}{dt}=\mathrm{L}^{-1}\{G(s)\}=g(t) \tag{2.106}$$

Iz izraza (2.106) vidljivo je da postoji jednoznačna veza između funkcija $h(t)$ i $g(t)$, pa se u konkretnim slučajevima koristi samo jedna od ovih karakteristika. Većinom se primjenjuje prijelazna funkcija $h(t)$ jer se eksperimentalnim putem lakše određuje od

funkcije $g(t)$. Funkcije $g(t)$ i $h(t)$ također kao i diferencijalne jednadžbe i prijenosne funkcije u potpunosti karakteriziraju dinamička svojstva sistema.

Općenito, poznavanjem funkcija $g(t)$ ili $h(t)$ moguće je odrediti vremenski odziv sistema ili dijela sistema na po volji odabranu pobudnu funkciju $u(t)$. Funkcija $u(t)$ općenito se može prikazati pomoću Fourierovog reda ukoliko je $u(t)$ periodička funkcija ili pomoću Fourierove transformacije kada je $u(t)$ neperiodička funkcija.

Općenito, primjenom konvolucijskog integrala bilo koja funkcija, pa i pobudna funkcija, može se prikazati nizom odskočnih funkcija ili impulsnih prijelaznih funkcija.

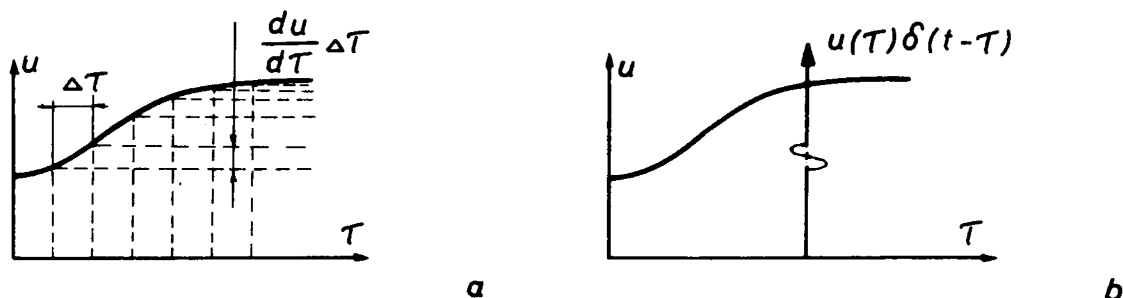
Za odskočnu pobudnu funkciju proizlazi:

$$u(t)=u(\alpha)\cdot S(t)+\left.\int_0^t \frac{du(\tau)}{d\tau}\cdot S(t-\tau)\,d\tau\right|_{\alpha\to 0} \tag{2.107}$$

Za impulsnu pobudnu funkciju:

$$u(t)=\int_0^t x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau \tag{2.108}$$

Na sl. 2.15. prikazana je grafička interpretacija izraza (2.107) i (2.108).



Slika 2.15.

Analogno određivanju funkcije $u(t)$, primjenom integrala konvolucije može se odrediti odzivna funkcija na temelju poznavanja funkcija $h(t)$ i $g(t)$:

$$y(t)=u(0)\,h(t)+\int_0^t h(t)\frac{du(t-\tau)}{d\tau}\,d\eta \tag{2.109}$$

$$y(t)=\int_0^t g(t)\,u(t-\tau)\,d\tau \tag{2.110}$$

U usporedbi s diferencijalnim jednadžbama i prijenosnim funkcijama, u prednosti vremenskih karakteristika mogu se navesti preglednost i mogućnost eksperimentalnog određivanja, a u nedostatke mogu se navesti složeni matematički izrazi kojima se određuju prijelazne i impulsne prijelazne funkcije sistema opisanih diferencijalnim jednadžbama višeg reda.

2.5. Frekvencijske karakteristike dinamičkih komponenata

Ako na ulazu dinamičke komponente s prijenosnom funkcijom $G(s)$ djeluje harmonijska funkcija određene amplitude i frekvencije, izlazna veličina komponente također će se mijenjati nakon prijelaznog stanja po strogo harmonijskom zakonu s jednakom frekvencijom, ali općenito izmijenjenom amplitudom i fazom. Određivanje parametara izlazne harmonijske funkcije pomoću vremenskih karakteristika povezano je s dosta složenim i sa stajališta prakse neprikladnim matematičkim operacijama, pa se u teoriji SAR primjenjuju jednostavniji i efikasniji frekvencijski postupci.

Primjena frekvencijskih postupaka polazi od pretpostavke da je ulazna funkcija dinamičke komponente ili sistema s prijenosnom funkcijom $G(s)$, harmonijska funkcija zadane amplitude, frekvencije i faze:

$$u = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \tag{2.111}$$

ili

$$u = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \tag{2.112}$$

gdje su:

A_1, ω, φ_1 – amplituda, frekvencija i početna faza ulazne veličine $u(t)$. Izlazna veličina dinamičke komponente određena je jednadžbom (2.16) za $f(t)=0$.

$$c(D)\,y(t) = b(D)\,u(t) \tag{2.113}$$

Iz (2.111) i (2.113) proizlazi:

$$c(D)\,y(t) = b(D)\,A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \tag{2.114}$$

Primjenom Laplaceove transformacije, rješenje jednadžbe (2.114) jest:

$$Y(s) = A_1 G(s)\,(\omega \cos\varphi_1 + s \sin\varphi_1)/(s^2 + \omega^2) \tag{2.115}$$

odnosno:

$$Y(s) = \frac{A_1 B(s)[\omega \cos\varphi_1 + s \sin\varphi_1]}{C(s)[s^2 + \omega^2]} \tag{2.116}$$

gdje je:

$$B(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_{m_0}$$

$$C(s) = c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \ldots + c_1 s + c_{n_0}$$

$$m < n$$

Rastavljanjem izraza (2.116) na parcijalne razlomke proizlazi:

$$y(s) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{d_i}{s - s_i} \tag{2.117}$$

gdje je:

$$d_i = \lim_{s \to s_i} (s - s_i)\,Y(s); \qquad i = 1, 2, \ldots n, n+1, n+2 \tag{2.118}$$

s_i – korijeni karakteristične jednadžbe:

$$(c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \ldots + c_1 s + c_0)(s^2 + \omega^2) = 0 \tag{2.119}$$

Iz (2.119) proizlazi:

$$c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \ldots + c_1 s + c_0 = 0 \tag{2.120}$$

$$s^2 + \omega^2 = 0 \tag{1.121}$$

Iz (2.121) proizlaze korijeni s_{n+1} i s_{n+2}

$$s_{n+1} = +j\omega; \qquad s_{n+2} = -j\omega \tag{2.122}$$

Uvrštenjem (2.122) u (2.118) proizlazi:

$$d_{n+1} = \lim_{s \to j\omega} (s - j\omega)\, Y(s) \tag{2.123}$$

Iz (2.123) i (2.115) proizlazi:

$$d_{n+1} = \lim_{s \to j\omega} (s - j\omega) \frac{A_1 G(s)(\omega \cos \varphi_1 + s \sin \varphi_1)}{(s + j\omega)(s - j\omega)} \tag{2.124}$$

Sređivanjem izraza (2.124) i uvrštenjem $j = e^{j\pi/2}$ proizlazi:

$$d_{n+1} = \frac{1}{2} A_1 G(j\omega)\, e^{j\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right)} \tag{2.125}$$

gdje je:

$$G(j\omega) = G(s)\Big|_{s = j\omega} \tag{2.126}$$

odnosno:

$$G(j\omega) = \left| G(j\omega) \right| e^{j \arg G(j\omega)} \tag{2.127}$$

Uvrštenjem (2.127) i (2.125) dobiva se izraz za koeficijent d_{n+1}:

$$d_{n+1} = \frac{A_1}{2} |G(j\omega)|\, e^{j\left[\arg^{G(j\omega) + \varphi_1 - \frac{\pi}{2}}\right]} \tag{2.128}$$

Analognim postupkom dobiva se rješenje za koeficijent d_{n+2} koje je konjugirano kompleksno rješenju d_{n+1}.

$$d_{n+2} = \frac{A_1}{2} |G(j\omega)|\, e^{j\left[\arg G(-j\omega) - \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right]} \tag{2.129}$$

Uvrštenjem (2.128) i (2.129) u (2.117) i primjenom inverzne Laplaceove transformacije proizlazi:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} d_i e^{s_i t} S(t) + (d_{n+1} e^{j\omega t} + d_{n+2} e^{-j\omega t})\, S(t) \tag{2.130}$$

Opće rješenje (2.130) sastoji se iz prijelaznog procesa, tj. stanja prijelaznog režima rada i stanja statičkog režima rada.

Kod stabilnih dinamičkih komponenata prelazni proces se tokom vremena prigušuje ($Re\{s_i\} < 0$), tj.

$$\lim_{t \to \infty} y_1(t) = \lim_{t \to \infty} \sum_{i=1}^{n} d_i e^{s_i t} = 0 \tag{2.131}$$

statički režim određen je izrazom:

$$y_2(t)=d_{n+1}e^{j\omega t}+d_{n+2}e^{-j\omega t}=2\,Re\,d_{n+1}e^{j\omega t} \tag{2.132}$$

gdje je: Re – oznaka realnog dijela kompleksne veličine.

Uvrštenjem u (2.132) izraza (2.128) i sređivanjem proizlazi jednadžba statičkog režima:

$$Y_2(t)=A_1\,|G(j\omega)|\sin[\omega t+\arg G(j\omega)+\varphi_1] \tag{2.133}$$

odnosno:

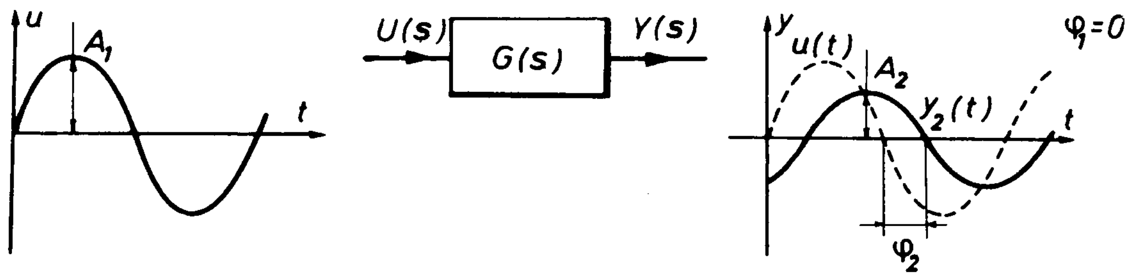
$$Y_2(t)=A_2\sin(\omega t+\varphi_2) \tag{2.134}$$

gdje je:

$$A_2=A_1\,|G(j\omega)| \tag{2.135}$$

$$\varphi_2=\arg G(j\omega)+\varphi_1 \tag{2.136}$$

Iz (2.133 – 2.136) je vidljivo da je izlazna veličina dinamičke komponente podvrgnute djelovanju harmonijske funkcije također harmonijska funkcija iste frekvencije, ali općenito izmijenjene amplitude $A_2 \neq A_1$ i faze $\varphi_2 \neq \varphi_1$ (sl. 2.16).



Slika 2.16.

Iz (2.134 – 2.136) je vidljivo da je za izračunavanje izlazne harmonijske funkcije dinamičke komponente dovoljno poznavanje kompleksne funkcije $G(j\omega)$:

$$G(j\omega)=G(s)\Big|_{s=j\omega\quad(0\le\omega\le\infty)} \tag{2.137}$$

odnosno:

$$G(j\omega)=\frac{b_m(j\omega)^m+b_{m-1}(j\omega)^{m-1}+\ldots+b_0}{c_n(j\omega)^n+c_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\ldots+c_0} \tag{2.138}$$

Kompleksna funkcija $G(j\omega)$ naziva se još *frekvencijskom prijenosnom funkcijom*. U praksi se koriste prikladniji oblici zapisivanja frekvencijske prijenosne funkcije:

$$G(j\omega)=|G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}=A(\omega)\,e^{j\varphi(\omega)} \tag{2.139}$$

odnosno:

$$G(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega) \tag{2.140}$$

gdje je:

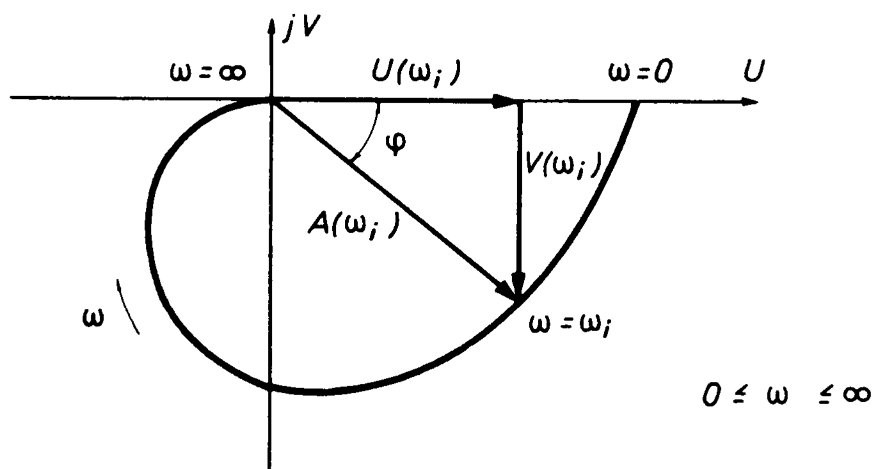
$$U(\omega)=Re\,G(j\omega) \tag{2.141}$$

$$V(\omega)=Im\,G(j\omega) \tag{2.142}$$

Veličine u (2.139 – 2.142) imaju nazive:

$A(\omega)$ – *amplitudna frekvencijska karakteristika*
$\varphi(\omega)$ – *fazna frekvencijska karakteristika*
$U(\omega)$ – *realna frekvencijska karakteristika*
$V(\omega)$ – *imaginarna frekvencijska karakteristika.*

Grafički prikaz frekvencijske prijenosne funkcije u kompleksnoj ravnini (U, jV) ima naziv *amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika* (sl. 2.17).



Slika 2.17.

Hodograf vektora $G(j\omega)$ određuje se pri fiksiranim iznosima $\omega = \omega_i$, izračunavanjem vektora s modulom $A(\omega_i)$ i fazom $\varphi(\omega_i)$ pri promjeni frekvencije u granicama $0 \leq \omega \leq \infty$. Zrcalni dio karakteristike u gornjoj poluravnini kompleksne ravnine dobije se zamjenom u frekvencijskoj prijenosnoj funkciji $+\omega$ sa $-\omega$. Taj dio hodografa nema fizikalnog smisla, ali općenito može biti od teorijskog interesa.

Pri određivanju hodografa vektora $G(j\omega)$, jednadžbu (2.138) prikladno je svesti na oblik:

$$G(j\omega) = \frac{U_b(\omega) + jV_b(\omega)}{U_n(\omega) + jV_n(\omega)} \tag{2.143}$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{\frac{U_b^2(\omega) + V_b^2(\omega)}{U_n^2(\omega) + V_n^2(\omega)}} \tag{2.144}$$

$$\varphi(\omega) = \arg[U_b(\omega) + jV_b(\omega)] - \arg[U_n(\omega) + jV_n(\omega)] \tag{2.145}$$

gdje je:

$U_b(\omega)$; $V_b(\omega)$ – realna i imaginarna frekvencijska karakteristika brojnika izraza (2.143)
$U_n(\omega)$; $V_n(\omega)$ – realna i imaginarna frekvencijska karakteristika nazivnika izraza (2.143).

Pri određivanju frekvencijskih karakteristika $U(\omega)$ i $V(\omega)$ izraz (2.143) treba svesti na oblik:

$$G(j\omega) = \frac{[U_b(\omega) + jV_b(\omega)][U_n(\omega) - jV_n(\omega)]}{U_n^2 + V_n^2} \tag{2.146}$$

odnosno:

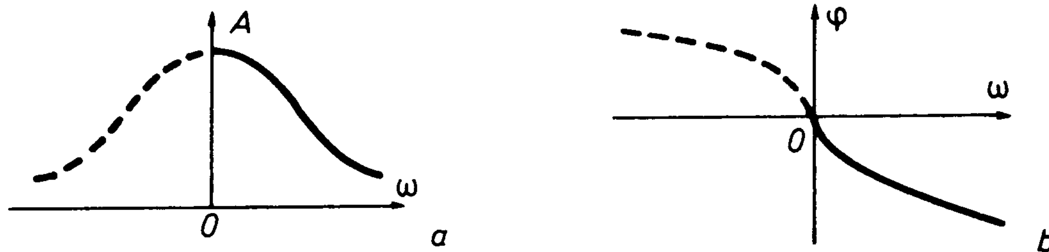
$$G(j\omega)=\frac{U_b(\omega)\,U_n(\omega)+V_b(\omega)\,V_n(\omega)}{U_n^2+V_n^2}+j\frac{U_n(\omega)\,V_b(\omega)+U_b(\omega)\,V_n(\omega)}{U_n^2+V_n^2} \tag{2.147}$$

Iz (2.140) i (2.147) proizlazi:

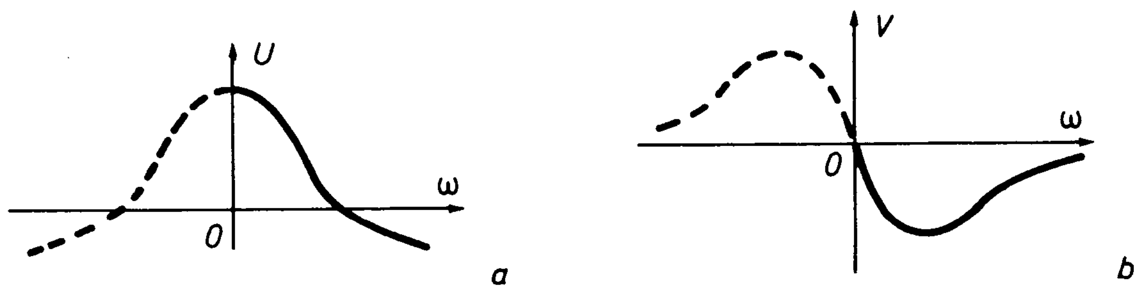
$$U(\omega)=\frac{U_b(\omega)\,U_n(\omega)+V_b(\omega)\,V_n(\omega)}{U_n^2+V_n^2} \tag{2.148}$$

$$V(\omega)=\frac{U_n(\omega)\,V_b(\omega)-U_b(\omega)\,V_n(\omega)}{U_n^2+V_n^2} \tag{2.149}$$

Opći oblici karakteristika $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $U(\omega)$ i $V(\omega)$, prikazani su na sl. 2.18. i 2.19.



$U_n^2+V^2$ *Slika 2.18.*



Slika 2.19.

Osim kompleksne funkcije $G(j\omega)$ u mnogim slučajevima koristi se inverzna kompleksna funkcija:

$$G^{-1}(j\omega)=\frac{1}{G(j\omega)}=A^{-1}(\omega)\,e^{-j\varphi(\omega)} \tag{2.150}$$

odnosno:

$$\frac{1}{G(j\omega)}=\frac{c_n(j\omega)^n+c_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\ldots+c_0}{b_m(j\omega)^m+b_{n-1}(j\omega)^{m-1}+\ldots+b_0} \tag{2.151}$$

Obično je izračunavanje točaka inverzne amplitudno-fazne frekvencijske karakteristike jednostavnije, jer je u velikom broju slučajeva $n>m$. Inverzni oblik hodografa (sl. 2.17) prikazan je u inverznoj kompleksnoj ravnini (sl. 2.20).

Frekvencijske prijenosne funkcije međusobno povezanih dinamičkih komponenata dobiju se uvrštenjem $s=j\omega$ u jednadžbama (2.75–2.85).

Frekvencijska prijenosna funkcija serijski povezanih dinamičkih komponenata (sl. 2.9) određena je izrazom:

$$G(j\omega)=\prod_{i=1}^{n} G_i(j\omega)=G_1(j\omega)\,G_2(j\omega)\ldots G_n(j\omega) \tag{2.152}$$

odnosno:

$$G(j\omega)=A(\omega)\,e^{j\varphi(\omega)}=\prod_{i=1}^{n} A_i(\omega)\cdot\exp\left[\left(j\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\omega)\right)\right] \tag{2.153}$$

Iz (2.152) i (2.153) vidljivo je da se amplitudna frekvencijska karakteristika serijski povezanih dinamičkih komponenata može dobiti množenjem amplitudnih karakteristika svih komponenata $A_i(\omega)$, dok se fazna frekvencijska karakteristika $\varphi(\omega)$ može dobiti zbrajanjem faznih frekvencijskih karakteristika svih komponenata $\varphi_1(\omega)$.

Frekvencijska prijenosna funkcija paralelno povezanih dinamičkih komponenata (sl. 2.10) određena je

$$G(j\omega)=\sum_{i=1}^{n} G_i(j\omega)=\sum_{i=1}^{n} U_i(\omega)+j\sum_{i=1}^{n} V_i(\omega) \tag{2.154}$$

odnosno:

$$G(j\omega)=A(\omega)\,e^{j\varphi(\omega)} \tag{2.155}$$

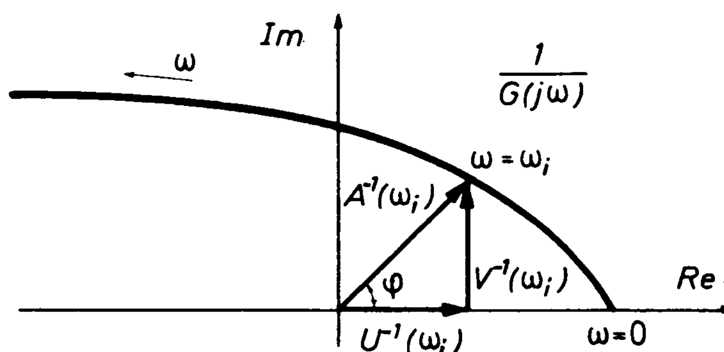
gdje je:

$$A(\omega)=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)} \tag{2.156}$$

$$U(\omega)=\sum_{i=1}^{n} U_i(\omega) \tag{2.157}$$

$$V(\omega)=\sum_{i=1}^{n} V_i(\omega) \tag{2.158}$$

Pri određivanju frekvencijske prijenosne funkcije dinamičkih komponenata povezanih povratnom vezom, primjenjuju se postupci razrađeni za slučaj primjene *jedinične* povratne veze (sl. 2.12).



Slika 2.20.

Iz (2.85) za $s = j\omega$ slijedi:

$$G_z(j\omega) = \frac{G_0(j\omega)}{1 + G_0(j\omega)} \tag{2.159}$$

odnosno:

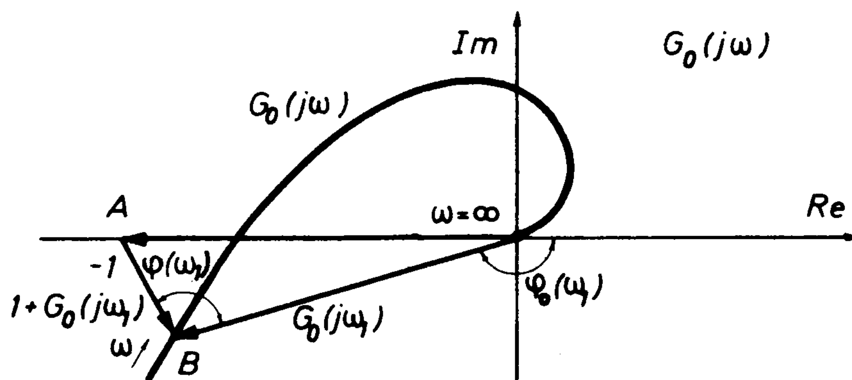
$$G_z(j\omega) = M(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} \tag{2.160}$$

gdje je:

$$M(\omega) = \left| \frac{G_0(j\omega)}{1 + G_0(j\omega)} \right| \tag{2.161}$$

$$\varphi(\omega) = \arg G_0(j\omega) - \arg[1 + G_0(j\omega)] \tag{2.162}$$

Iz (2.159 – 2.162) proizlazi da je primjenom grafoanalitičkog postupka moguće odrediti hodograf karakteristike $G_z(j\omega)$ ako je poznat hodograf karakteristike $G_0(j\omega)$ (sl. 2.21).



Slika 2.21.

Iz grafičkog prikaza (sl. 2.21) i izraza (2.159 – 2.162) proizlazi:

$$M(\omega_1) = \frac{G_0(j\omega_1)}{1 + G_0(j\omega_1)} = \frac{OB}{AB} \tag{2.163}$$

$$\varphi(\omega_1) = \arg G_z(j\omega_1) \tag{2.164}$$

Analognim postupkom za $\omega = \omega_i$, određuju se točke hodografa $G_z(j\omega_i)$.

S obzirom da se u praksi najviše koriste zatvoreni regulacijski sistemi, za određivanje kompleksne funkcije sistema zatvorenog jediničnom povratnom vezom, razrađeni su grafoanalitički postupci na bazi upotrebe *nomograma zatvaranja sistema.* Vrlo često koriste se nomogrami kojima se na osnovi poznate amplitudno-fazne frekvencijske karakteristike otvorenog sistema određuje amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika sistema zatvorenog jediničnom povratnom vezom. [Prilog II]

Kompleksna frekvencijska prijenosna funkcija (2.159) primjenom (2.140 – 2.142) prikazana je u obliku:

$$G_z(j\omega) = \frac{U(\omega) + jV(\omega)}{1 + U(\omega) + jV(\omega)} \tag{2.165}$$

Iz (2.161), (2.162) i (2.165), provođenjem algebarskih operacija i sređivanjem, proizlazi:

$$M^2(\omega)=\frac{U^2(\omega)+V^2(\omega)}{[1+U(\omega)]^2+V^2(\omega)} \tag{2.166}$$

$$\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{V(\omega)}{U(\omega)+U^2(\omega)+V^2(\omega)} \tag{2.167}$$

Transformiranjem jednadžbe (2.166) proizlazi jednadžba nomograma u kompleksnoj ravnini otvorenog sistema, pomoću kojeg se određuje amplitudna karakteristika sistema zatvorenog jediničnom povratnom vezom:

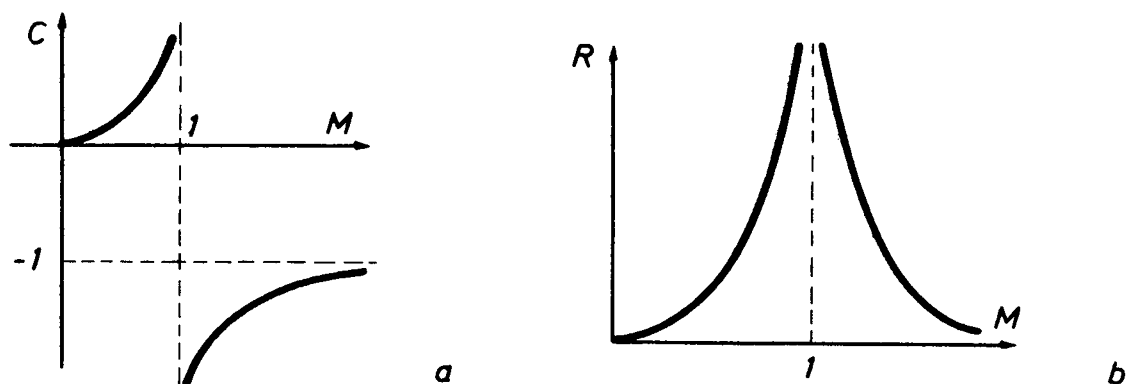
$$\left[U+\frac{M^2}{M^2-1}\right]^2+V_1^2=\frac{M^2}{(M^2-1)^2} \tag{2.168}$$

Jednadžba (2.168) za $M=\text{const}$ je jednadžba kružnice u kompleksnoj ravnini s koordinatama centra $(-C, j0)$ i radijusom R. Centar i polumjer kružnice određeni su izrazima:

$$C=\frac{M^2}{M^2-1} \tag{2.169}$$

$$R=\frac{M}{M^2-1} \tag{2.170}$$

Funkcionalne ovisnosti (2.169) i (2.170) prikazane su na slici 2.22.a, b.



Slika 2.22.

Iz jednadžbi (2.196) i (2.170) za različite iznose $M=\text{const}$ proizlazi familija kružnica u kompleksnoj ravnini $[U, jV]$, sl. 2.23.

Iz izraza (2.168 – 2.170) i grafičkih prikaza na sl. 2.22. i sl. 2.23, mogu se navesti sljedeća svojstva nomograma za određivanje karakteristike $M(\omega)$:

- Za $M(\omega)=0$, centar kružnice nalazi se u koordinatnom početku s polumjerom $R=0$.
- Za $0<M(\omega)<1$, centar kružnice pomiče se u smjeru osi $+U(\omega)$, a polumjer monotono raste.

Slika 2.23.

– Za $M(\omega)=1$, kružnica se deformira u pravac paralelan imaginarnoj osi na udaljenosti $U=-\frac{1}{2}$.

– Za $1<M(\omega)<\infty$, centar kružnice pomiče se iz točke $(-\infty, jo)$ u točku $(-1, jo)$ a polumjer R monotono opada od $R=\infty$ do $R=0$.

Transformiranjem jednadžbe (2.167) proizlazi jednadžba nomograma za određivanje fazne frekvencijske karakteristike $\varphi(\omega)$:

$$\left(U+\frac{1}{2}\right)^2+\left[V-\frac{1}{2N}\right]^2=\frac{N^2+1}{4N^2} \qquad (2.171)$$

gdje je: $N_1=\operatorname{tg}\varphi$.

Jednadžba (2.171) za $N=\text{const}$ je jednadžba kružnice u kompleksnoj ravnini $[U, jV]$ s koordinatama centra $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2N}\right)$ i polumjerom R određenim izrazom:

$$R=\frac{1}{2N}\sqrt{N^2+1} \qquad (2.172)$$

Iz jednadžbe (2.171) za različite iznose $N=\text{const}$ proizlazi familija kružnica u kompleksnoj ravnini $G_0(j\omega)$ (sl. 2.24).

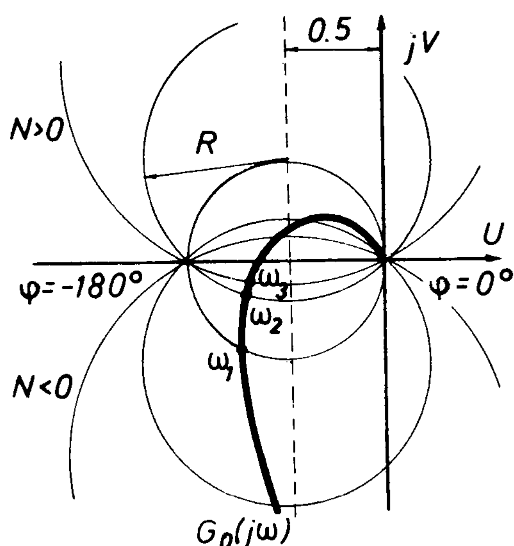
Iz izraza (2.171, 2.172) i grafičkih prikaza (sl. 2.24.a, b), mogu se navesti sljedeća svojstva nomograma za određivanje karakteristike $\varphi(\omega)$:

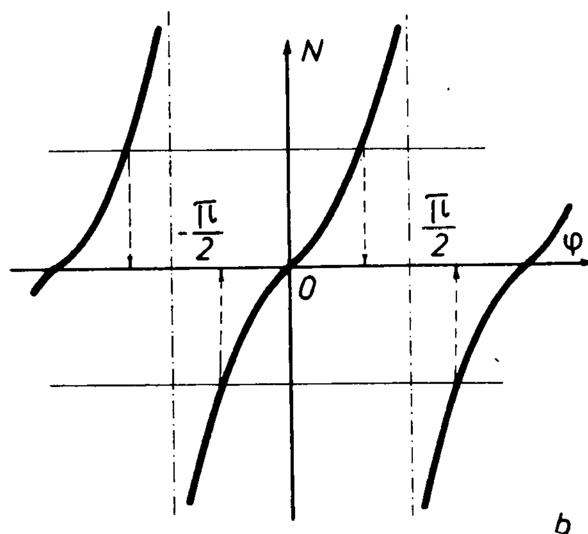
– U području kompleksne ravnine gdje je $V(\omega)>0$, indeks kružnice $N>0$, odnosno za $V(\omega)<0$, $N<0$.

- Sve kružnice prolaze kroz točke $(-1, jo)$ i $(0, 0)$. Za $N=0$, kružnica se deformira u pravac $V=0$.
- Svakoj kružnici $N=\text{const}$ odgovaraju dva iznosa φ, tj. φ_1 i $-\varphi_2$, pri tome je uvijek $\varphi_1+\varphi_2=\pm 180$ (sl. 2.4.b).

Pri određivanju amplitudno-fazne frekvencijske karakteristike (2.160) pomoću nomograma (sl. 2.23. i 2.24) postupa se na sljedeći način:

- Poznata amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika otvorenog sistema $G_0(j\omega)$ ucrta se u nomograme za određivanje $M(\omega)$ i $\varphi(\omega)$.
- Točka amplitudne karakteristike $M(\omega_i)$ određena je u presjecištu krivulje $G_0(j\omega_i)$ i kružnice na kojoj je naznačen iznos $M(\omega_i)$. Na primjer u točki $G_0(j\omega_3)$ sl. 2.23, krivulja $G_0(j\omega)$ siječe kružnicu $M=5$ pri $\omega=\omega_3$. Analogno se određuje potreban broj točaka $M(\omega)$.
- Točka fazne karakteristike $\varphi(\omega_i)$ određena je presjecištem krivulje $G_0(j\omega_i)$ i kružnice s indeksom N (sl. 2.24).





Slika 2.24.

Nomogrami zatvaranja sistema (sl. 2.23. i sl. 2.24), u daljnjem će se tekstu nazivati M i N nomogrami, odnosno M, N kružni dijagram.

Osim nomograma modula $M(\omega)$ i faze $\varphi(\omega)$ u ravnini $G_0(j\omega)$ pri analizi zatvorenih sistema, često je potrebno poznavati realnu i imaginarnu frekvencijsku karakteristiku $G_z(j\omega)$ kao funkcije realne i imaginarne frekvencijske karakteristike $G_0(j\omega)$.

Frekvencijska prijenosna funkcija zatvorenog sistema može se prikazati u obliku:

$$G_z(j\omega)=P(\omega)+jQ(\omega) \qquad (2.173)$$

gdje je:

$$P(\omega)=Re\{G_z(j\omega)\}; \qquad Q(\omega)=Im\{G_z(j\omega)\}$$

Jednadžba (2.165) može se svesti na oblik:

$$G_z(j\omega)=\frac{U+U^2+V^2}{(1+U)^2+V^2}+j\frac{V}{(1+U)^2+V^2} \tag{2.174}$$

Iz jednadžbi (2.173) i (2.174) proizlazi:

$$P(\omega)=\frac{U+U^2+V^2}{(1+U)^2+V^2} \tag{2.175}$$

$$Q(\omega)=\frac{V}{(1+U)^2+V^2} \tag{2.176}$$

Jednadžba (2.175) može se pisati u obliku:

$$PU^2+2PU+P+PV^2-U^2-U-V^2=0 \tag{2.177}$$

odnosno:

$$U^2+\frac{2P-1}{P-1}U+V^2+\frac{P}{P-1}+\left[\frac{2P-1}{2(P-1)}\right]^2-\left[\frac{2P-1}{2(P-1)}\right]^2=0 \tag{2.178}$$

Iz (2.178) proizlazi jednadžba nomograma za određivanje realne frekvencijske karakteristike zatvorenog sistema u kompleksnoj ravnini $G_0(j\omega)$:

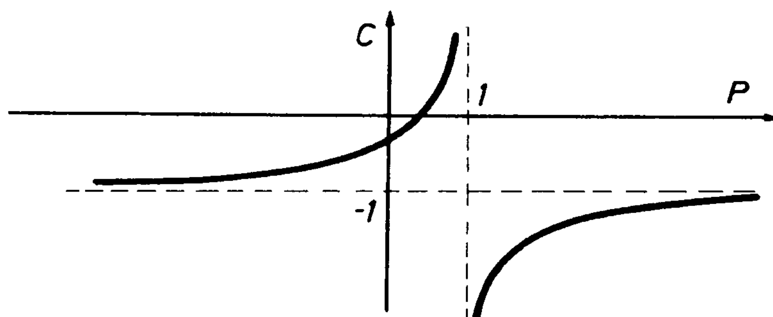
$$\left[U+\frac{2P-1}{2(P-1)}\right]^2+V^2=\frac{1}{4(P-1)^2} \tag{2.179}$$

Jednadžba (2.179) za $P=\text{const}$ je jednadžba kružnice u kompleksnoj ravnini s koordinatama centra (C, jo) i polumjerom R. Centar i polumjer kružnice određeni su izrazima:

$$C=-\frac{2P-1}{2(P-1)} \tag{2.180}$$

$$R=\frac{1}{2(P-1)} \tag{2.181}$$

Funkcionalna ovisnost (2.180) prikazana je na sl. 2.25.

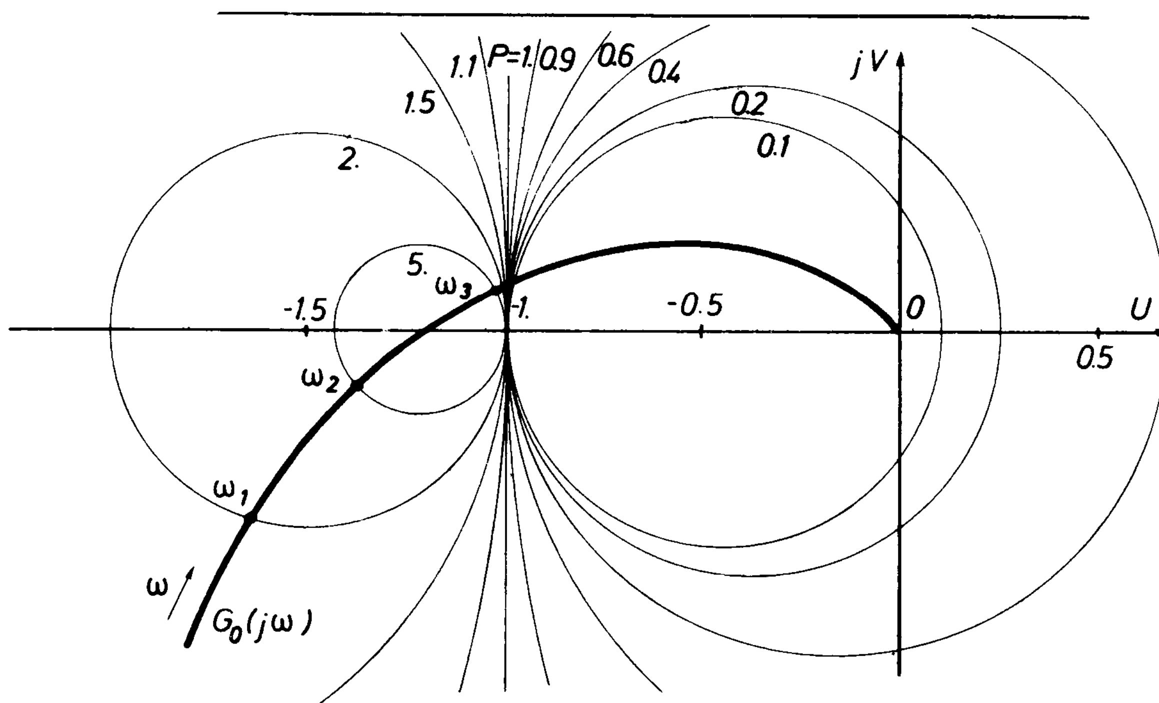


Slika 2.25.

Iz izraza (2.179) za različite $P=\text{const}$ proizlazi familija kružnica u kompleksnoj ravnini $[U, jV]$ (sl. 2.26).

Iz izraza (2.179 – 2.181) i grafičkih prikaza (sl. 2.25. i sl. 2.26), mogu se navesti sljedeća svojstva nomograma za određivanje karakteristike $P(\omega)$:

- Sve kružnice s indeksom $P = \text{const}$, sijeku realnu os u točki $(-1, jo)$.
- Pravac $P(\omega) = 1$, prolazi kroz točku $(-1, jo)$ i dijeli kompleksnu ravninu $G_0(j\omega)$ na područja $P > 1$ i $P < 1$.
- Za $R = 0{,}5$, dobije se kružnica s indeksom $P(\omega) = 0$, ona prolazi kroz točke $(-1, jo)$ i $(0, 0)$.



Slika 2.26.

Pri određivanju imaginarne frekvencijske karakteristike pomoću nomograma u kompleksnoj ravnini $G_0(j\omega)$, potrebno je jednadžbu (2.176) transformirati u oblik:

$$[(1+U)^2 + V^2] - \frac{V}{Q} + \frac{1}{4Q^2} - \frac{1}{4Q^2} = 0 \tag{2.182}$$

odnosno:

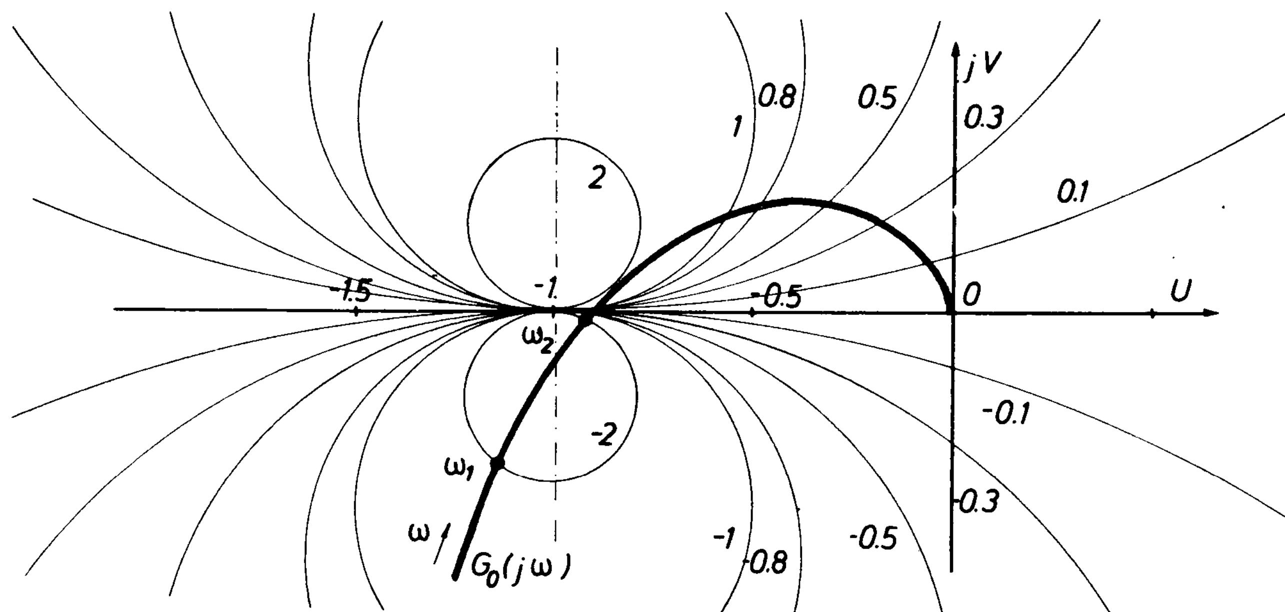
$$(U+1)^2 + \left(V - \frac{1}{2Q}\right)^2 = \frac{1}{(2Q)^2} \tag{2.183}$$

Jednadžba (2.183) za $Q = \text{const}$ jednadžba je kružnice s centrom na pravcu koji prolazi kroz točku $(-1, jo)$, a paralelan je s imaginarnom osi. Centar $(-1, jC)$ i polumjer kružnice $Q = \text{const}$ određeni su izrazima:

$$C = -\frac{1}{2Q} \tag{2.184}$$

$$R = \frac{1}{|2Q|} \tag{2.185}$$

Iz izraza (2.183 – 2.185) za razne $Q = \text{const}$, proizlazi familija kružnica u kompleksnoj ravnini (U, jV) (sl. 2.27).



Slika 2.27.

Iz izraza (2.183 – 2.185) i grafičkog prikaza (sl. 2.27) mogu se navesti sljedeća svojstva nomograma za određivanje karakteristike $Q(\omega)$:

- Sve kružnice s indeksom $Q = \text{const}$, tangiraju realnu os u točki $(-1, jo)$.
- Pravac $V(\omega) = 0$, dijeli kompleksnu ravninu $G_0(j\omega)$ na dva područja. Područje iznad realne osi odgovara indeksima $Q > 0$, a područje ispod realne osi odgovara indeksima $Q < 0$.

Pri određivanju frekvencijskih karakteristika $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ primjenom P i Q nomograma (sl. 2.26. i sl. 2.27) postupa se na ovaj način:

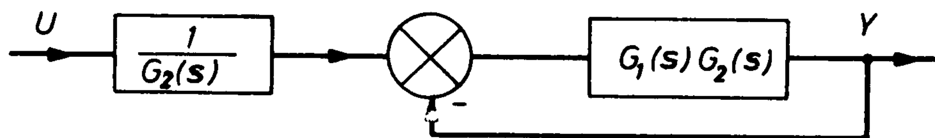
- Poznata amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika otvorenog kruga $G_0(j\omega)$ ucrta se u nomograme (sl. 2.26. i sl. 2.27).
- U točkama presjeka krivulje $G_0(j\omega)$ s kružnicama indeksa P i indeksa Q, određen je iznos $P(\omega_i)$ odnosno $Q(\omega_i)$.

Na primjer, za $\omega = \omega_1$ amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika $G_0(j\omega_1)$ siječe kružnicu $P = 2$ (sl. 2.26) i kružnicu $Q = -2$ (sl. 2.27), pa je prema (2.173) točka amplitudno-fazne frekvencijske karakteristike određena koordinatama $G_z(j\omega_1) = 2 - j2$.

Ako je dinamička komponenta ili sistem obuhvaćen povratnom vezom $G_2(s) \neq 1$ (sl. 2.11.a), G, N, P i Q nomogrami koriste se tako da se prijenosna funkcija (2.83) piše u obliku:

$$G_z(s) = \frac{1}{G_2(s)} \frac{G_1(s) G_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s)} \tag{2.186}$$

Strukturna shema izraza (2.186) prikazana je na sl. 2.28.



Slika 2.28.

Uvrštenjem u (2.186):

$$G_1(s) \cdot G_2(s) = G_a(s) \tag{2.187}$$

proizlazi:

$$G_z(s) = \frac{1}{G_2(s)} \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)} = \frac{1}{G_2(s)} \cdot G_b(s) \tag{2.188}$$

Frekvencijska prijenosna funkcija (2.188) je:

$$G_z(j\omega) = \frac{1}{G_2(j\omega)} \cdot G_b(j\omega) \tag{2.189}$$

Pri određivanju amplitudno-fazne frekvencijske karakteristike $G_z(j\omega)$ najprije se pomoću M i N nomograma odredi amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika $G_b(j\omega)$, a zatim se analitičkim ili grafoanalitičkim postupkom izvrši množenje s funkcijom $G_2^{-1}(j\omega)$.

Analogno postupku određivanja nomograma u kompleksnoj ravnini $G_0(j\omega)$, određuju se i nomogrami u inverznoj kompleksnoj ravnini $G_0^{-1}(j\omega)$.

Pri upotrebi inverzne kompleksne ravnine jednadžba (2.159) se piše u obliku:

$$G_z(j\omega) = \frac{1}{1 + G_0^{-1}(j\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega) \tag{2.190}$$

gdje je:

$$G_0^{-1}(j\omega) = \frac{1}{G_0(j\omega)} = B(\omega) + jC(\omega) \tag{2.191}$$

Iz (2.160), (2.190) i (2.191) proizlazi:

$$|G_z(j\omega)| = M(\omega) = \frac{1}{|1 + B(\omega) + jC(\omega)|} \tag{2.192}$$

odnosno:

$$\frac{1}{M^2} = (1 + B)^2 + C^2 \tag{2.193}$$

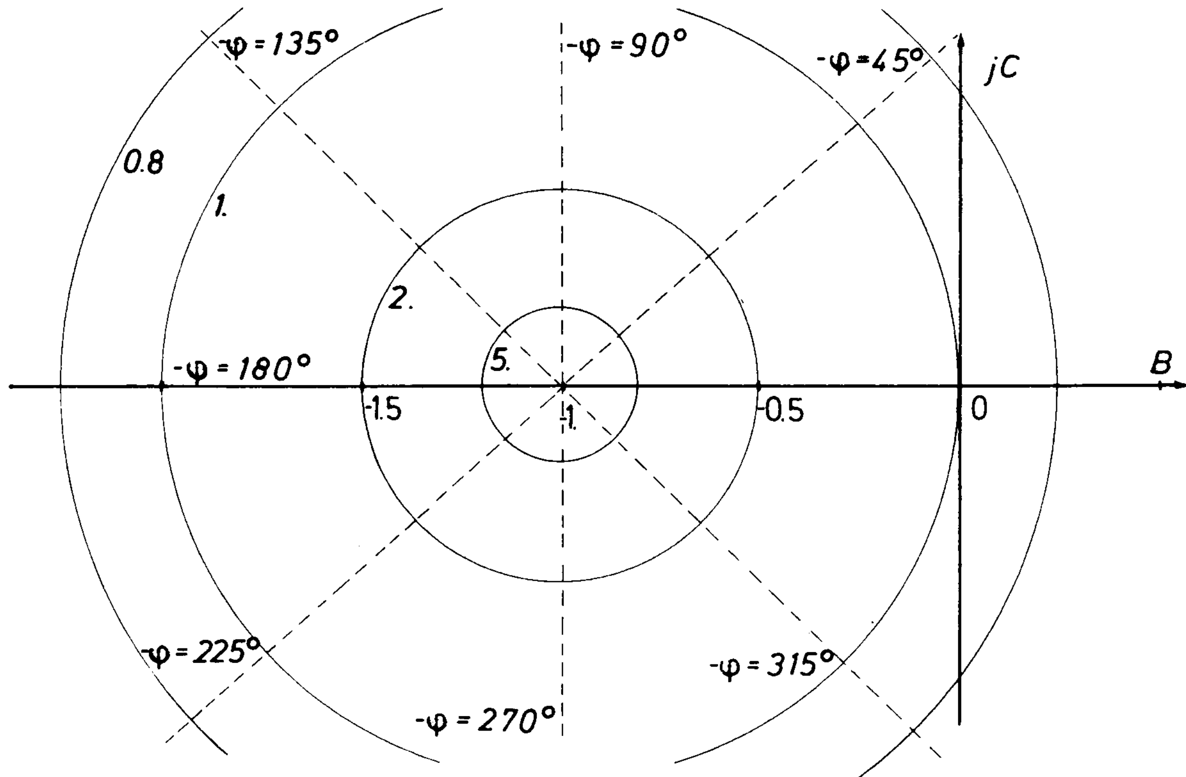
Jednadžba (2.193) za $M = \text{const}$ jednadžba je kružnice u kompleksnoj ravnini $G_0^{-1}(j\omega)$. Za različite $M = \text{const}$ dobije se familija koncentričnih kružnica s centrom u točki $(-1, jo)$ i polumjerom $R = \frac{1}{M}$ (sl. 2.29).

5*

Jednadžba N – nomograma u ravnini $G_0^{-1}(j\omega)$ proizlazi iz (2.192):

$$-\operatorname{tg}\varphi = N = \frac{C}{1+B} \tag{2.194}$$

Za različite $N=\text{const}$ dobije se funkcija pravaca koji prolaze kroz točku $(-1, jo)$ (sl. 2.29).



Slika 2.29.

Iz (2.190) i (2.191) proizlazi:

$$P(\omega) = \frac{1+B}{(1+B)^2 + C^2} \tag{2.195}$$

$$Q(\omega) = \frac{C}{(1+B)^2 + C^2} \tag{2.196}$$

odnosno:

$$\left(B + \frac{2P-1}{2P}\right)^2 + C^2 = \frac{1}{(2P)^2} \tag{2.197}$$

$$(B+1)^2 + \left(C + \frac{1}{2Q}\right)^2 = \frac{1}{(2Q)^2} \tag{2.198}$$

Usporedbom (2.179) i (2.197) te (2.183) i (2.198) proizlazi zaključak: Nomogram $P(\omega)$ u inverznoj ravnini $G_0^{-1}(j\omega)$ može se odrediti iz nomograma $P(\omega)$ u ravnini $G_0(j\omega)$ tako da se indeks P zamijeni s $P=1-P$. Na primjer, za kružnicu u ravnini $G_0(j\omega)$ s indeksom $P=1{,}3$, u inverznoj ravnini $G_0^{-1}(j\omega)$ bit će indeks $P=1-1{,}3=-0{,}3$.

Analognim rasuđivanjem dolazi se do zaključka da indeksu Q u ravnini $G_0(j\omega)$ odgovara indeks $-Q$ u ravnini $G_0^{-1}(j\omega)$.

2.6. Logaritamske frekvencijske karakteristike – Bodeov dijagram

Proces određivanja frekvencijskih karakteristika otvorenih sistema znatno je jednostavniji i brži primjenom logaritamskih karakteristika koje se dobiju logaritmiranjem frekvencijske prijenosne funkcije otvorenog sistema:

$$\ln G_0(j\omega)=\ln A(\omega)\,e^{j\varphi_0(\omega)}=\ln A(\omega)+j\varphi_0(\omega) \qquad (2.199)$$

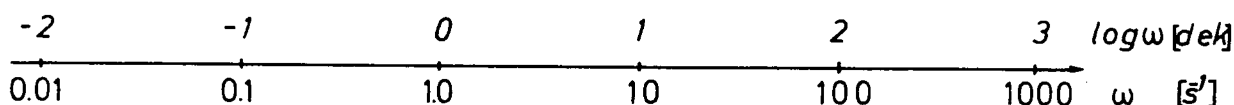
odnosno:

$$L(\omega)[\mathrm{dB}]=20\log A(\omega)=20\cdot 0{,}434\ln A(\omega) \qquad (2.200)$$

$$\varphi(\omega)=\mathrm{arctg}\frac{I_m\{G_0(j\omega)\}}{Re\{G_0(j\omega)\}} \qquad (2.201)$$

Grafički prikazi funkcija $L(\omega)$ i $\varphi(\omega)$ imaju naziv *logaritamska amplitudna frekvencijska karakteristika* i *logaritamska fazna frekvencijska karakteristika*.

Pri grafičkom prikazivanju funkcija $L(\omega\Phi$ i $\varphi(\omega)$, na apscisnoj osi se umjesto veličine ω nanosi veličina $\log\omega$ u *dekadama*, tj. u intervalu frekvencija koji odgovara promjeni ω za deset puta: $\log 10\omega-\log\omega=1$ (sl. 2.30).



Slika 2.30.

Na ordinatnim osima se u linearnom mjerilu nanose $L(\omega)$ u decibelima i $\varphi_0(\omega)$ u stupnjevima. Ordinata $L(\omega)$ može se izraziti i pomoću veličine $A(\omega)$, pri tome prema (2.200) slijedi sljedeći odnos:

A	0,01	0,1	0,2	1	1,12	2	2	10	100	1 000
L	−40	−20	−14	0	1	3	6	20	40	60

Primjena logaritamskih frekvencijskih karakteristika posebno je prikladna pri određivanju karakteristike $L(\omega)$ i $\varphi(\omega)$ serijski povezanih dinamičkih komponenata. Logaritmiranjem izraza (2.153) proizlazi:

$$\log A(\omega)=\log\prod_{i=1}^{n}A_i(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\log A_i(\omega) \qquad (2.202)$$

odnosno:

$$L(\omega)=\sum_{i=1}^{n} 20 \log A_i(\omega)=\sum_{i=1}^{n} L_i(\omega) \qquad (2.203)$$

$$\varphi(\omega)=\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\omega) \qquad (2.204)$$

Budući da logaritam algebarske sume funkcija nije jednak sumi logaritama tih funkcija, karakteristike $L(\omega)$ i $\varphi(\omega)$ paralelno spojenih komponenata i komponenata obuhvaćenih povratnim vezama manje su prikladne od postupaka izloženih u točki 2.5.

Primjenom logaritamskog mjerila općenito se smanjuje nagib amplitudnih frekvencijskih karakteristika, pa se $L(\omega)$ serijski povezanih dinamičkih komponenata može odrediti kao asimptotska krivulja karakteristike sastavljene iz dijelova pravaca $L_i(\omega)$.

Nagib karakteristike $\varphi(\omega)$ serijski povezanih komponenata primjenom logaritamskog mjerila se povećava, a to donekle otežava određivanje grafičkog prikaza. Ovaj nedostatak u praksi se prevladava primjenom posebnih šablona.

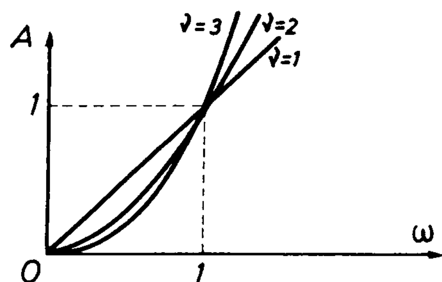
Pri određivanju karakteristike $L(\omega)$ obično nisu potrebne neke računske operacije. Na primjer, za dinamičku komponentu s prijenosnom funkcijom

$$G(s)=Ks^{\nu}, \qquad (\nu=0, 1, \dots) \qquad (2.205)$$

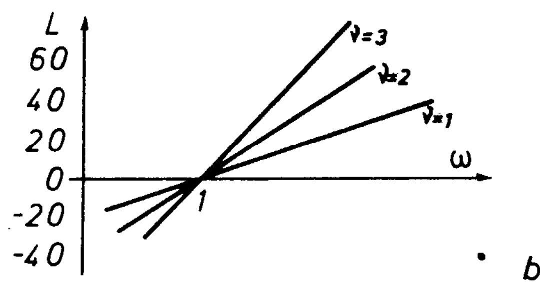
amplitudna frekvencijska karakteristika $A(\omega)$ određena je izrazom:

$$|G(j\omega)|=A(\omega)=K\omega^{\nu} \qquad (2.206)$$

Grafički prikaz funkcije (2.206) sl. 2.31.a, određen je izračunavanjem točaka karakteristika za $K=1$, $\nu=1, 2, 3$.



Slika 2.31.a



Slika 2.31.b

Logaritmiranjem izraza (2.206) proizlazi:

$$L(\omega)=20 \log K+20\nu \log \omega \qquad (2.207)$$

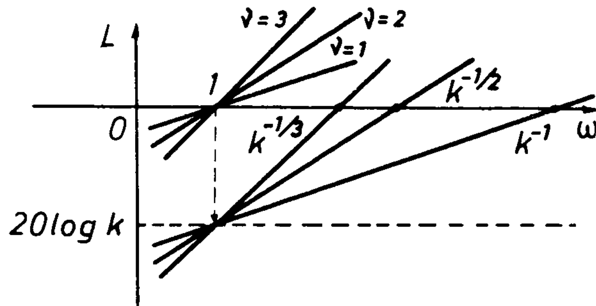
Grafički prikaz jednadžbe (2.207) sl. 2.31.b familija je pravaca kroz točku $\omega=1$ i $L=20 \log K$, s nagibom $+20\nu$ dB/dek. Na sl. 2.32. i 2.33. prikazana je funkcija $L(\omega)$ za slučaj $K<1$ odnosno $K>1$.

U navedenom primjeru za $K \lesseqgtr 1$, karakteristika $L(\omega)$ može se odrediti tako da se grafički zbroje karakteristike $L(\omega)$ sl. 2.31.b s pravcem $20 \log K$, ili da se odredi točka $L(\omega_c)=0$ i da se kroz tu točku povuče pravac pod nagibom $+20\nu$ dB/dek. Točka ω_c u kojoj karakteristika $L(\omega_c)$ siječe os 0 dB je frekvencija pri kojoj je modul frekvencijske prijenosne funkcije jednak jedinici:

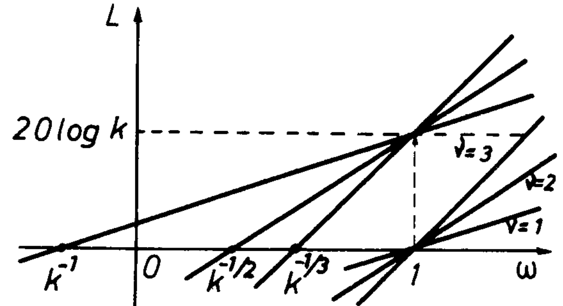
$$|G(j\omega_c)| = 1 \tag{2.208}$$

$$20 \log |G(j\omega_c)| = 0 \tag{2.209}$$

Frekvencija ω_c definirana prema (2.208) ili (2.209) naziva se još *frekvencijom presjeka*.



Slika 2.32.



Slika 2.33.

Za razmatrani primjer iz (2.206) i (2.209) proizlazi:

$$20 \log K + 20\nu \log \omega = 0 \tag{2.210}$$

odnosno:

$$K\omega^{\nu} = 1; \qquad \omega_c = K^{-\frac{1}{\nu}} \tag{2.211}$$

U slučajevima kada je poznata logaritamska amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika otvorenog sistema, određivanje frekvencijskih karakteristika $M(\omega)$, $N(\omega)$, $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ vrši se pomoću M, N, P i Q nomograma konstruiranih u ravnini $20 \log |G_0(j\omega)|$ s koordinatama $(A[\text{dB}], \varphi)$.

Nomogram M, N u ravnini $(A[\text{dB}], \varphi)$ ima naziv *Nicholsov dijagram*, a konstruira se primjenom izraza koji proizlazi iz jednadžbe (2.159):

$$G_z(j\omega) = \frac{G_0(j\omega)}{1 + G_0(j\omega)} = \frac{A(\omega)\, e^{j\varphi_0(\omega)}}{1 + A(\omega)\, e^{j\varphi_0(\omega)}} = M(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} \tag{2.212}$$

odnosno:

$$\frac{1}{G_z(j\omega)} = \frac{1}{M(\omega)} \cos \varphi(\omega) - j \frac{1}{M(\omega)} \sin \varphi(\omega) = 1 + \frac{1}{A(\omega)} \cos \varphi_0(\omega) -$$

$$- j \frac{1}{A(\omega)} \sin \varphi^0(\omega) \tag{2.213}$$

Iz (2.213) proizlaze jednadžbe:

$$M(\omega) = \frac{A(\omega)}{[A(\omega) + 2A(\omega) \cos \varphi(\omega) + 1]^{1/2}} \tag{2.214}$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{A(\omega) \sin \varphi_0(\omega)}{A(\omega) \cos \varphi_0(\omega)} \tag{2.215}$$

$$A(\omega)=\left[1-\frac{1}{2M(\omega)}\cos\varphi(\omega)+\frac{1}{M^2(\omega)}\right]^{-1/2} \tag{2.216}$$

$$\varphi_0(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{\sin\varphi(\omega)}{\cos\varphi(\omega)M(\omega)} \tag{2.217}$$

Na osnovi izraza (2.216) i (2.217) određuje se Nicholsov dijagram [prilog II]. Konstrukcija dijagrama vrši se tako da se u ravnini A[dB], $\varphi_0(\omega)$ crtaju krivulje koje odgovaraju geometrijskom mjestu točaka konstantnog iznosa M pri promjeni φ i krivulja konstantnog iznosa φ pri promjeni M.

Bitna svojstva Nicholsova dijagrama jesu:

- sve krivulje dijagrama simetrične su s obzirom na os $\varphi_0=-180°$
- indeksi M po iznosu i predznaku konstantni su u odnosu na os simetrije
- indeksi φ mijenjaju samo predznak u odnosu na os simetrije
- u slučajevima kada se koristi samo polovina dijagrama, a faza otvorenog sistema se mijenja u intervalu $-180<\varphi_0(\omega)<-360$, indeks kuta φ se uzima sa suprotnim predznakom
- za $A(\omega)\gg 1$; $M(\omega)\approx 1$
- za $L(\omega)=20\log A(\omega)>20$ dB; $\varphi^0(\omega)\approx 0$
- za $A(\omega)\ll 1$; $M(\omega)\approx A(\omega)$; $\varphi_0(\omega)\approx\varphi(\omega)$.

Pri upotrebi Nicholsova dijagrama postupa se na ovaj način:

U ravnini A[dB], φ_0 ucrta se frekvencijska karakteristika otvorenog sistema $G_0(j\omega)$,

U točkama presjeka karakteristike $G_0(j\omega)$ s krivuljama $M=\text{const}$ i $\varphi=\text{const}$, za $\omega=\omega_i$, odrede se točke karakteristike zatvorenog sistema $M(\omega_i)$ i $\varphi(\omega_i)$.

Analogno P i Q kružnim dijagramima u kompleksnoj ravnini otvorenog sistema $G_0(j\omega)$, konstruiraju se P i Q nomogrami u ravnini A[dB], φ_0. Jednadžbe tih nomograma proizlaze iz izraza (2.159) i (2.173).

$$G_z(j\omega)=\frac{G_0(j\omega)}{1+G_0(j\omega)}=\frac{A(\omega)e^{j\varphi_0(\omega)}}{1+A(\omega)e^{j\varphi_0(\omega)}}=P(\omega)+jQ(\omega) \tag{2.218}$$

odnosno:

$$P(\omega)=\frac{A^2(\omega)+A(\omega)\cos\varphi_0(\omega)}{A^2(\omega)+2A(\omega)\cos\varphi_0(\omega)+1} \tag{2.219}$$

$$Q(\omega)=\frac{A(\omega)\sin\varphi_0(\omega)}{A^2(\omega)+2A(\omega)\cos\varphi_0(\omega)+1} \tag{2.220}$$

P i Q nomogrami određeni prema (2.219) i (2.220) dani su u prilogu II.



ELEMENTARNE DINAMIČKE KOMPONENTE SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

Standardna prijenosna funkcija (2.64) općenito se može prikazati strukturnom shemom sastavljenom od elementarnih dinamičkih komponenata:

$$G(s)=\frac{K_v B(s)}{s^v C(s)}=\frac{\prod_{i=1}^{n} k_i \prod_{i=1}^{p}(T_i s\pm 1)\prod_{i=1}^{n}(T_i^2 s^2 \pm 2\xi_i T_i s \pm 1)}{s^v \prod_{j=1}^{m}(T_j s\pm 1)\prod_{j=1}^{q}(T_j^2 s^2 \pm 2\xi_j T_j s \pm 1)} \tag{3.1}$$

Prijenosne funkcije elementarnih dinamičkih komponenata definirane prema (3.1) jesu:

$$G_i(s)=T_i s\pm 1; \qquad T_i^2 s^2 \pm 2\xi_i T_i s \pm 1; \qquad T_i^2 s^2 \pm 1; \qquad s^2; \qquad K,$$

$$\frac{1}{T_j s\pm 1}; \qquad \frac{1}{T_j^2 s^2 \pm 2\xi_j T_j s \pm 1}; \qquad \frac{1}{T_j^2 s^2 \pm 1}; \qquad \frac{1}{s^v}$$

Prikaz standardne prijenosne funkcije pomoću elementarnih dinamičkih komponenata odgovara tehničkoj realizaciji funkcionalnih cjelina sistema. U brojnim primjerima parametri elementarnih komponenata jednoznačno su određeni konstrukcijskim parametrima funkcionalnih dijelova sistema.

S obzirom na svojstva odzivnih karakteristika razlikuju se *pozicione*, *integralne* i *derivativne* elementarne komponente.

3.1. Pozicione dinamičke komponente

U pozicione komponente ubrajaju se sve tipične komponente koje imaju linearnu statičku karakteristiku, odnosno komponente opisane diferencijalnom jednadžbom oblika:

$$C(D)\,y(t)=Ku(t) \tag{3.2}$$

gdje je:

$y(t)$ – izlazna veličina komponente
$u(t)$ – ulazna veličina komponente
$C(D)$ – polinom najviše drugog reda, pri čemu je $C(0)=1$;
K – koeficijent pojačanja komponente.

Proporcionalna komponenta (*P-komponenta*) najjednostavnija je dinamička komponenta, a opisuje se jednadžbom (3.2) za $C(D)=1$:

$$y(t)=Ku(t) \tag{3.3}$$

Kao primjeri proporcionalnih komponenata mogu se navesti: djelitelji napona, istosmjerno pojačalo, reduktor, mehanička poluga i sl. Pri tome se pretpostavlja da se prijenos signala s ulaza na izlaz komponente vrši trenutačno, tj. inercija komponente se zanemaruje.

Ako na ulazu proporcionalne komponente djeluje sinusoidalna veličina:

$$u(t)=U_m \sin \omega t \tag{3.4}$$

izlazna veličina će biti također sinusoidalna veličina:

$$y(t)=Y_m \sin \omega t \tag{3.5}$$

gdje je:

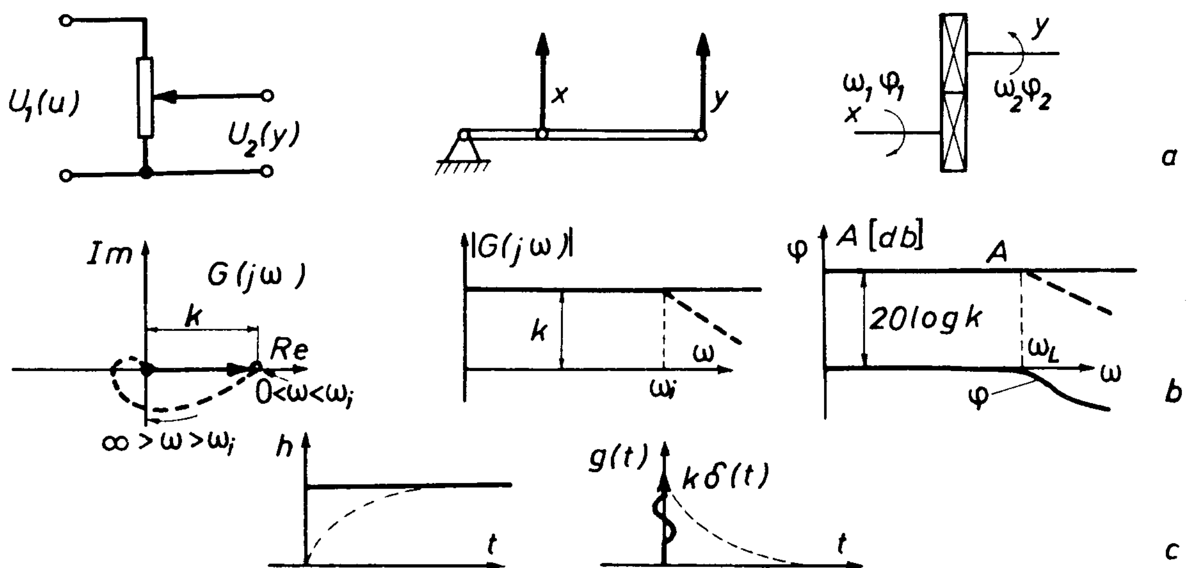
$$Y_m=KU_m$$

odnosno u kompleksnom obliku:

$$Y(j\omega)=KU(j\omega) \tag{3.6}$$

$$G(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}=K \tag{3.7}$$

Frekvencijske i odzivne karakteristike komponente (3.7) prikazane su na sl. 3.1.



Slika 3.1.

Općenito realne komponente mogu se analizirati kao proporcionalne komponente samo u određenom frekvencijskom području s frekvencijom manjom od neke frekvencije, tj. $\omega<\omega_i$. Naime, pri visokim frekvencijama jednadžbe (3.3 – 3.7) ne mogu se primijeniti na realne komponente; na primjer, kod djelitelja napona dolazi do izražaja kapacitet i induktivitet provodnika, a kod mehaničkih prijenosa mijenja se

elastičnost poluga i osovina. Na sl. 3.1. za slučaj $\omega_t < \omega < \infty$, crtkanim linijama su pokazane odgovarajuće karakteristike realnih komponenata. S obzirom da je u realnim SAR zastupljeno područje dosta niskih frekvencija ($\omega \ll \omega_t$) to se realne proporcionalne komponente mogu smatrati idealnim, a njihova svojstva dovoljno se točno opisuju jednadžbama (3.3 – 3.7).

U proporcionalne komponente SAR također se mogu svrstati pojačala moduliranih signala, kod kojih je frekvencija modulacije mnogo veća od najveće frekvencije ulaznog signala.

Aperiodska (inercijska) komponenta prvog reda. Ova komponenta često se susreće u SAR, a opisuje se diferencijalnom jednadžbom oblika:

$$(TD+1)\,y=K \tag{3.8}$$

odnosno prijenosnim funkcijama:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K}{Ts+1} \tag{3.9}$$

$$G^{-1}(s)=\frac{U(s)}{Y(s)}=\frac{1}{K}(Ts+1) \tag{3.10}$$

gdje je:

T – vremenska konstanta, K – koeficijent pojačanja komponente.

S aperiodskom dinamičkom komponentom prvog reda mogu se opisati mnogi linearizirani procesi u SAR: napon generatora, brzina vrtnje raznih motora, električki grijači, elektronička i magnetska pojačala, $R-C$ i $R-L$ četveropoli i dr.

Prijelazna funkcija komponente dobije se kao rješenje jednadžbe (3.8) za slučaj da je u svojstvu ulazne veličine $u(t)$ primijenjena jedinična skokovita (odskočna) funkcija (1.20).

Iz (3.9) proizlazi:

$$Y(s)=\frac{K}{Ts+1}\cdot U(s)=\frac{K}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s} \tag{3.11}$$

Primjenom inverzne Laplaceove transformacije na izraz (3.11) proizlazi:

$$y(t)=h(t)=\mathsf{L}^{-1}\left[\frac{K}{s(Ts+1)}\right] \tag{3.12}$$

odnosno:

$$h(t)=\mathsf{L}^{-1}\left\{K\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right]\right\}=K\,(1-e^{-t/T})\,S(t) \tag{3.13}$$

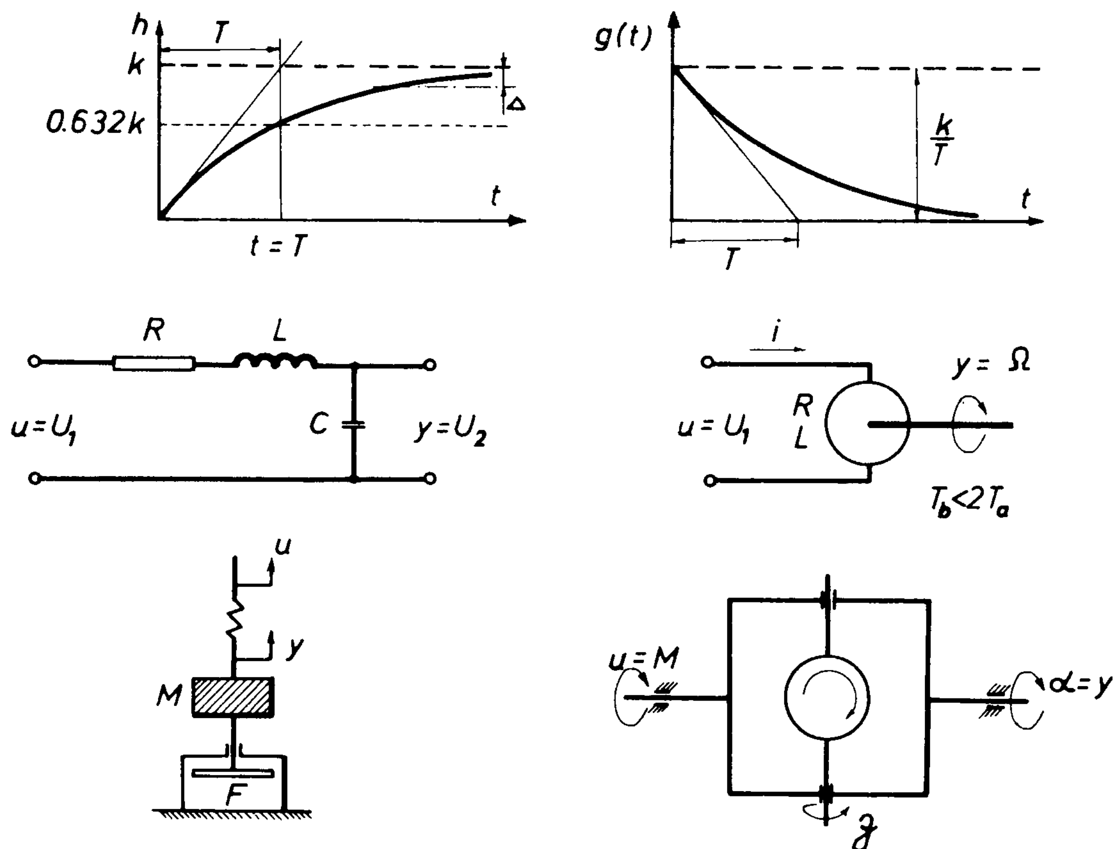
Teoretski prijelazni proces (3.13) traje beskonačno dugo, ali u praksi za aperiodsku komponentu pod vremenom prijelaznog procesa razumijeva se vremenski interval t_S (sl. 3.2) određen uvjetom:

$$K-h(t)\leq\Delta \tag{3.14}$$

gdje je:

Δ – unaprijed zadan pozitivni broj, obično je određen jednadžbom:

$$\Delta=(0{,}01\div 0{,}05)K \tag{3.15}$$



Slika 3.2.

Impulsna prijelazna funkcija proizlazi iz (2.106) i (3.13):

$$g(t)=\frac{K}{T}e^{-t/T}\cdot S(t) \tag{3.16}$$

Zamjenom u (3.9) i (3.10) $s=j\omega$, slijede frekvencijske prijenosne funkcije:

$$G(j\omega)=\frac{K}{1+j\omega T} \tag{3.17}$$

$$G^{-1}(j\omega)=\frac{1}{K}(1+j\omega T)=\frac{1}{K}+j\frac{\omega T}{K} \tag{3.18}$$

odnosno:

$$A(\omega)=\frac{K}{|1+j\omega T|} \tag{3.19}$$

$$\varphi(\omega)=\text{arctg}\,\omega T \tag{3.20}$$

$$U(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2T^2} \tag{3.21}$$

$$V(\omega)=-\frac{K\omega T}{1+\omega^2T^2} \tag{3.22}$$

Iz (3.21) i (3.22) proizlazi jednadžba hodografa amplitudno-fazne frekvencijske karakteristike (sl. 3.3):

$$\left(U-\frac{K}{2}\right)^2+V^2=\frac{K^2}{4} \tag{3.23}$$

Iz (3.23) očito je da je karakteristika $G(j\omega)$ u ravnini $[U, jV]$, kružnica s radijusom $R=\frac{K}{2}$ i koordinatama centra $C\left(\frac{K}{2}, j0\right)$.

Logaritamska amplitudna frekvencijska karakteristika komponente proizlazi iz (3.20) i (3.19):

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log K-10\log[1+(\omega T)^2] \tag{3.24}$$

Pri grafičkom prikazu izraza (3.24) koriste se dvije približne asimptotske karakteristike u područjima $0<\omega T\leq 1$ i $\omega T\geq 1$. Jednadžbe asimptotskih karakteristika proizlaze iz (3.24):

$$L_a(\omega)=\begin{cases} L_n(\omega)=20\log K; & \text{za } 0<\omega T\leq 1 \\ L_v(\omega)=20\log K-10\log\omega T; & \text{za } \omega T\geq 1 \end{cases} \tag{3.25}$$

gdje je:

$L_n(\omega)\approx L(\omega)$ u području niskih frekvencija, $\omega\ll 1/T$.
$L_v(\omega)\approx L(\omega)$ u području visokih frekvencija, $\omega\gg 1/T$.

Za $\omega=1/T$, iz (3.24) proizlazi:

$$L_n(\omega)=L_v(\omega)=20\log K \tag{3.26}$$

Razlika između točke karakteristike $L(\omega)$ i asimptotske karakteristike $L_a(\omega)$, određena je jednadžbom:

$$\Delta L(\omega)=L(\omega)=L_a(\omega) \tag{3.27}$$

Za $\omega=\frac{1}{T}$, izraz (3.27) ima maksimum:

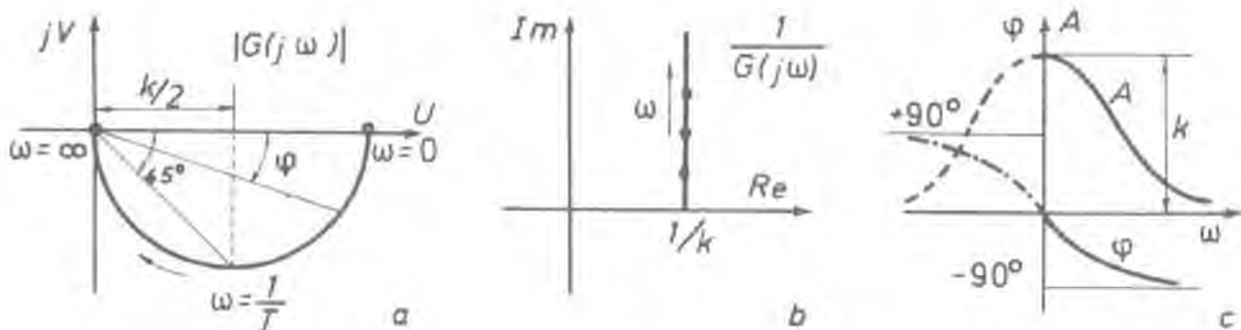
$$\Delta L(\omega)=20\log K-10\log 2-20\log K\approx 3\,\text{dB} \tag{3.28}$$

S obzirom da je maksimalna razlika između točke $L(\omega)$ i asimptotske $L_a(\omega)$ karakteristike oko 3 dB, asimptotske karakteristike uveliko se primjenjuju u analizi i sintezi SAR. U tablici 3.1. navedeni su iznosi $\Delta L(\omega)$ određeni prema (3.27).

Tablica 3.1.

ωT	0,1	0,25	0,4	0,5	1	2	2,5	4	10
$\Delta L(\omega)$	0,04	0,32	0,65	1	3	1	0,65	0,32	0,04

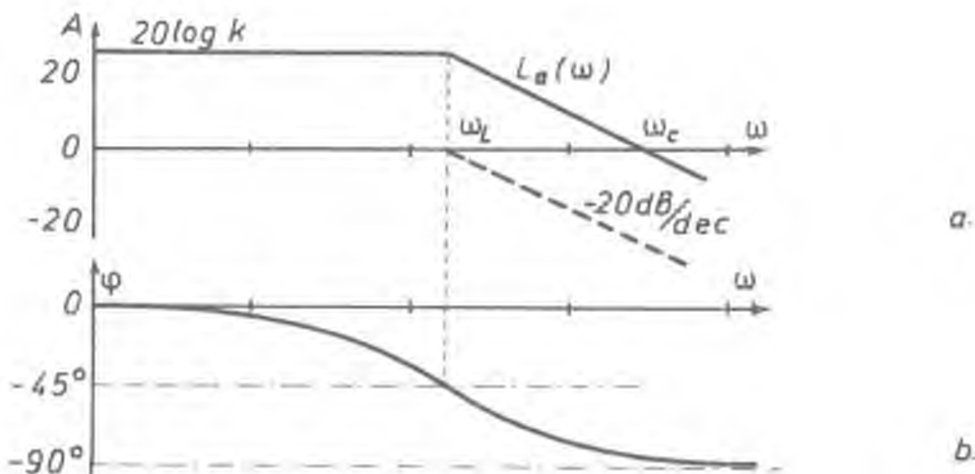
Frekvencija $\omega = \frac{1}{T}$ pri kojoj je $L_n(\omega) = L_v(\omega)$, ima naziv *frekvencija loma* ω_L.



Slika 3.3.

Pri crtanju karakteristike $L_a(\omega)$ postupa se na sljedeći način (sl. 3.4.a):

- ucrta se karakteristika $20 \log K$
- ucrta se karakteristika $-20 \log \omega T$, to je pravac iz točke $\omega_L = \frac{1}{T}$ pod nagibom od -20 dB/dek
- grafičkim zbrajanjem odredi se karakteristika $L_a(\omega) = 10 \log K - 20 \log \omega T$.



Slika 3.4.

Pri određivanju fazne karakteristike u logaritamskom mjerilu dovoljno je izračunati točke $\varphi(\omega)$ u intervalu od 0° do −45°, tj. do $\omega_L = \frac{1}{T}$, dok je dio karakteristike od −45° do −90° koso simetričan u odnosu na točku ω_L, tj.:

$$\varphi(\omega T) = \frac{\pi}{2} - \varphi(\omega T) \tag{3.29}$$

Radi bržeg određivanja karakteristike $\varphi(\omega)$ u praksi se koriste posebne šablone ili tablice.

Iz karakteristika (sl. 3.3) odnosno (sl. 3.4), može se zaključiti da aperiodska komponenta ima svojstva niskog propusta, tj. porastom frekvencije ulazne harmonijske funkcije smanjuje se amplituda izlazne harmonijske funkcije, a fazni pomak

između ulazne i izlazne veličine, ovisno o frekvenciji, povećava se od $\varphi=0$ do $\varphi=-90°$. Takvo ponašanje aperiodskih komponenata prvog reda uvjetovano je inercijskim svojstvima koja su matematički izražena vremenskom konstantom T.

Usporedbom jednadžbi (3.3) i (3.8) te funkcija $h(t)$ (sl. 3.1. i 3.2) proizlazi zaključak da je ponašanje aperiodske komponente I reda u stacionarnom stanju jednako ponašanju proporcionalne komponente.

Aperiodska komponenta drugog reda opisuje se diferencijalnom jednadžbom oblika:

$$(T^2D^2+2\xi TD+1)\,y=Ku \tag{3.30}$$

$$1\leq\xi<\infty \tag{3.31}$$

gdje je:
- T – vremenska konstanta
- ξ – koeficijent prigušenja.

Prijenosna funkcija komponente (3.30) je:

$$G(s)=\frac{K}{T^2s^2+2\xi Ts+1}=\frac{K}{T_a^2s^2+T_bs+1} \tag{3.32}$$

Određivanjem korijena karakteristične jednadžbe

$$T^2s^2+2\xi Ts+1=0 \tag{3.33}$$

prijenosna funkcija (3.32) može se pisati u obliku:

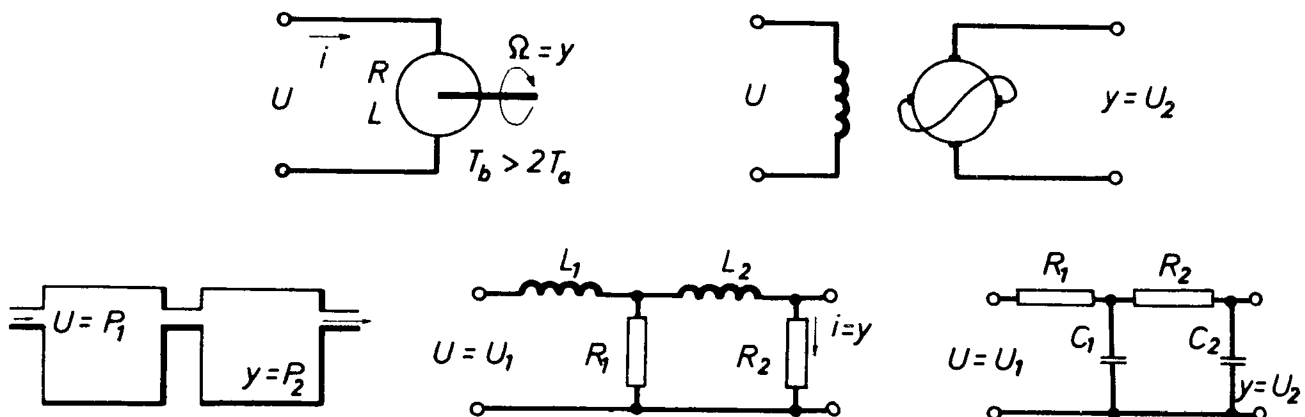
$$G(s)=\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)} \tag{3.34}$$

gdje je:

$$T_1=-\frac{1}{s_1};\qquad T_2=-\frac{1}{s_2} \tag{3.35}$$

Aperiodska komponenta drugog reda je ekvivalentna serijskoj vezi dvije aperiodske komponente prvog reda s općim koeficijentom pojačanja K i vremenskim konstantama T_1 i T_2.

Primjeri nekih aperiodskih komponenata drugog reda prikazani su na sl. 3.5.



Slika 3.5.

Iz (3.34) proizlazi prijelazna funkcija aperiodske komponente drugog reda:

$$h(t) = K \mathsf{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)} \right\} \tag{3.36}$$

Za slučaj $T_1 > T_2$ izraz u zagradi jednadžbe (3.36) može se prikazati pomoću parcijalnih razlomaka:

$$\frac{1}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{T_1 - T_2} \cdot \frac{1}{s - s_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot \frac{1}{s - s_2} \tag{3.37}$$

Iz (3:36) i (3.37) i tablica inverznih Laplaceovih transformacija proizlazi:

$$h(t) = K \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right) \cdot S(t) \tag{3.38}$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = g(t) = \frac{K}{T_1 - T_2} (e^{-t/T_2} - e^{-t/T_2}) \cdot S(t) \tag{3.39}$$

Uvrštenjem u (3.38) i (3.39), $T_1 = T_2 = T$, slijedi:

$$h(t) = K \left[1 - \left(1 + \frac{t}{T} \right) e^{-t/T} \right] \cdot S(t) \tag{3.40}$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = g(t) = \frac{K}{T} t e^{-\frac{t}{T}} \cdot S(t) \tag{3.41}$$

Zamjenom u (3.32) i (3.34) $p = j\omega$, dobiju se frekvencijske prijenosne funkcije:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 - \omega^2 T^2 + j2\xi T\omega} \tag{3.42}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)} \tag{3.43}$$

Iz (3.42) odnosno (3.43) proizlazi izraz za amplitudne i fazne frekvencijske karakteristike:

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}} \tag{3.44}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \cdot \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}} \tag{3.45}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \dfrac{2\xi T\omega}{1 - \omega^2 T^2}; & 0 \leq \omega \leq \dfrac{1}{T} \\ -\pi - \operatorname{arctg} \dfrac{2\xi T\omega}{1 - \omega^2 T^2}; & \dfrac{1}{T} \leq \omega < \infty \end{cases} \tag{3.46}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \omega T_1 - \operatorname{arctg} \omega T_2 \tag{3.47}$$

Logaritmiranjem jednadžbe (3.45) proizlazi izraz za određivanje logaritamske amplitudne frekvencijske karakteristike:

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log K-20\log\sqrt{1+\omega^2T_1^2}-20\log\sqrt{1+\omega^2T_2^2} \tag{3.48}$$

Pri grafičkom određivanju asimptotske karakteristike $L(\omega)$ najprije se odrede frekvencije loma $\omega_{L1}=\frac{1}{T_1}$ i $\omega_{L2}=\frac{1}{T_2}$ i iznos $20\log K$. Zatim se kroz točke ω_{L1} i ω_{L2} povuku vertikalni pravci. Za slučaj $T_1>T_2$ i $\omega<\frac{1}{T_1}$, karakteristika $L(\omega)$ se aproksimira asimptotom (pravac pod nagibom 0 dB):

$$L(\omega)\approx 20\log K \tag{3.49}$$

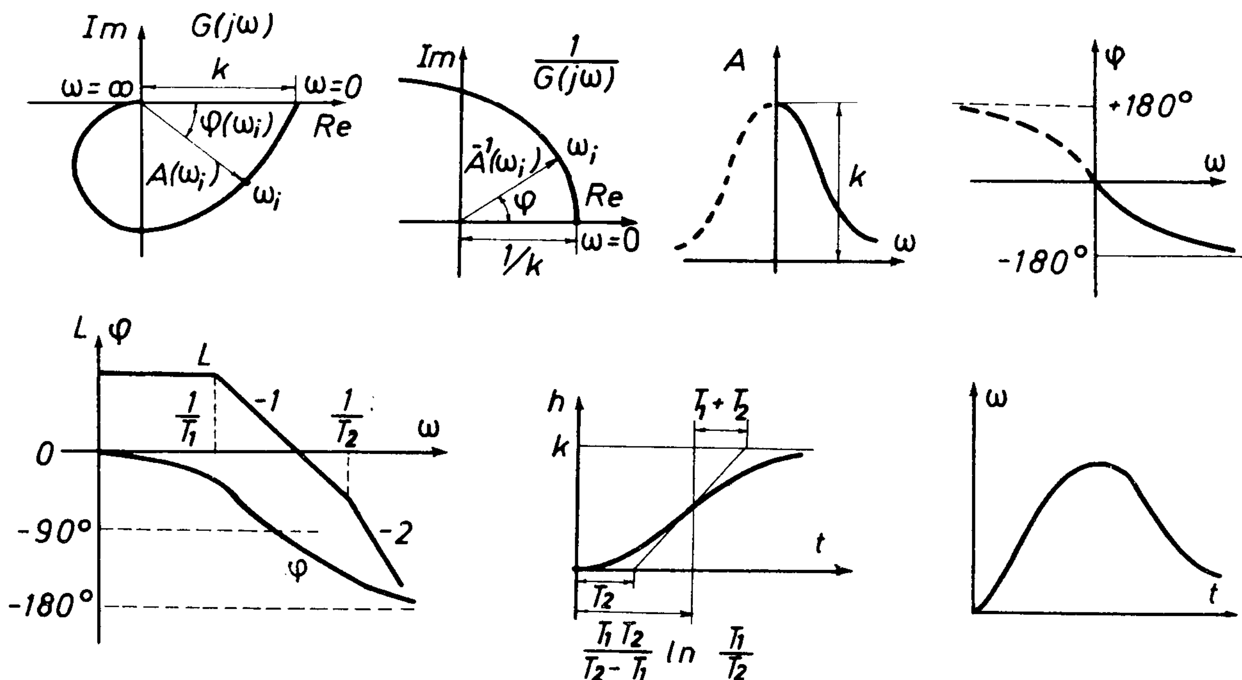
U području $\frac{1}{T_1}<\omega<\frac{1}{T_2}$, karakteristika $L(\omega)$ aproksimira se asimptotom (pravac pod nagibom -20 dB/dek):

$$L(\omega)\approx 20\log\frac{K}{\omega T_1} \tag{3.50}$$

U području frekvencija $\omega>\frac{1}{T_2}$, jednadžba (3.48) aproksimira se izrazom:

$$L(\omega)=20\log\frac{K}{\omega^2T_1T_2} \tag{3.51}$$

što odgovara pravcu pod nagibom -40 dB/dek.



Slika 3.6.

U teoriji SAR uobičajeno je da se nagibi asimptotskih karakteristika ± 20 dB/dek; ± 40 dB/dek; ± 60 dB/dek označavaju s ± 1; ± 2; ± 3 itd., a to će se koristiti u daljnjem tekstu.

Na sl. 3.6. prikazane su frekvencijske i odzivne karakteristike aperiodske komponente drugog reda.

Analogno određivanju asimptotskih karakteristika, fazna karakteristika $\varphi(\omega)$ najlakše se određuje šablonama ili izračunavanjem prema (3.46) odnosno (3.47).

Usporedbom karakteristika (sl. 3.2, 3.3, 3.4. i 3.6) vidljivo je da aperiodska komponenta drugog reda u odnosu na aperiodsku komponentu prvog reda sadrži dvije vremenske konstante, tj. veću inerciju, prijelazni proces se sporije odvija, a fazni pomak na vrlo visokim frekvencijama $\omega \gg \frac{1}{T_2}$ iznosi $\varphi_{(\infty)} = -180°$.

Oscilatorna komponenta vrlo se često koristi u analizi SAR, a opisuje se diferencijalnom jednadžbom (3.30); za $0 < \xi < 1$.

$$(T^2 D^2 + 2\xi T D + 1)\, y = Ku \tag{3.52}$$

Karakteristična jednadžba određena je izrazom:

$$T^2 s^2 + 2\xi T s + 1 = 0.$$

Korijeni karakteristične jednadžbe oscilatorne komponente su konjugirano-kompleksne veličine s negativnim realnim dijelom:

$$s_{1,2} = -\omega_0 \xi \pm j\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} \tag{3.53}$$

Vremenska konstanta oscilatorne komponente povezana je s frekvencijom slobodnih oscilacija (oscilacije bez prigušenja) ω_0 – *prirodna frekvencija sistema*:

$$\omega_0 = \frac{1}{T} \tag{3.54}$$

Perioda neprigušenih oscilacija komponente jest:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi T \tag{3.55}$$

Vrlo često se diferencijalna jednadžba oscilatorne komponente piše u obliku:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = K_1 \tag{3.56}$$

gdje je:

$$K_1 = \frac{K}{T^2} = K\omega_0^2 \tag{3.57}$$

Kao primjeri oscilatorne komponente mogu se navesti: elastični mehanički sistemi, električki oscilatorni krug, razni elektromehanički sistemi, žiroskopski elementi itd. (sl. 3.7.a).

Primjenom Laplaceove transformacije na (3.52) proizlazi:

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} = \frac{K}{T_a^2 s^2 + T_b s + 1} \tag{3.58}$$

uvrštenjem u (3.58) $s=j\omega$, proizlazi:

$$G(j\omega)=\frac{K}{1-\omega^2T^2+j\omega 2\xi T} \tag{3.59}$$

odnosno:

$$A(\omega)=\frac{K}{\sqrt{[1-\omega^2T^2]^2+4\xi^2\omega^2T^2}} \tag{3.60}$$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}-\operatorname{arctg}\dfrac{2\xi T\omega}{1-\omega^2T^2}; & 0<\omega\leq\dfrac{1}{T}\\ -\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{2\xi\omega}{1-\omega^2T^2}; & \dfrac{1}{T}\leq\omega\leq\infty\end{cases} \tag{3.61}$$

Određivanjem ekstrema izraza (3.60) proizlazi jednadžba kojom je određen maksimalni iznos amplitudne frekvencijske karakteristike:

$$\max A(\omega)=A(\omega_{max})=\frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \tag{3.62}$$

$$\omega_{max}=\omega_0\sqrt{1-2\xi^2}<\omega_0 \tag{3.63}$$

$$\xi<0.707 \tag{3.64}$$

Za $\xi=0$ iz (3.63) i (3.54) proizlazi:

$$\omega_{max}=\omega_0 \tag{3.65}$$

Frekvencija maksimuma karakteristike $A(\omega)$, tj. ω_{max} ima još naziv *rezonantna* frekvencija oscilatorne komponente.

Logaritamska karakteristika $L(\omega)$ određena je izrazom:

$$L(\omega)=20\log\frac{K}{\sqrt{[1-T^2\omega^2]^2+4\xi^2T^2\omega^2}} \tag{3.66}$$

Pri grafičkom određivanju karakteristike $L(\omega)$, izraz (3.66) prikladno je pisati u obliku:

$$L(\omega)=L_a(\omega)+\Delta L(\omega) \tag{3.67}$$

gdje je:

$$L_a(\omega)=\begin{cases}20\log K; & \text{za } \omega T\leq 1\\ 20\log K-40\log\omega T; & \text{za } \omega T\geq 1\end{cases} \tag{3.68}$$

Za $0.3\leq\xi\leq 1$, jednadžba (3.67) može se aproksimirati asimptotskom karakteristikom

$$L(\omega)\approx L_a(\omega)=20\log K-40\log\omega T \tag{3.69}$$

U slučajevima kada je koeficijent prigušenja $\xi<0.3$ karakteristika $L(\omega)$ se određuje točnim izračunavanjem prema (3.66) ili upotrebom u tu svrhu konstruiranih nomograma (prilog II).

6*

Logaritamska fazna frekvencijska karakteristika za $\xi > 0.3$ određuje se primjenom približnih jednadžbi:

$$\varphi(\omega) \approx -2\xi T\omega \quad \text{za } \omega T < 0.4$$
$$\varphi(\omega) \approx -\pi + \frac{2\xi}{\omega T} \quad \text{za } \omega T > 2.5 \qquad (3.70)$$

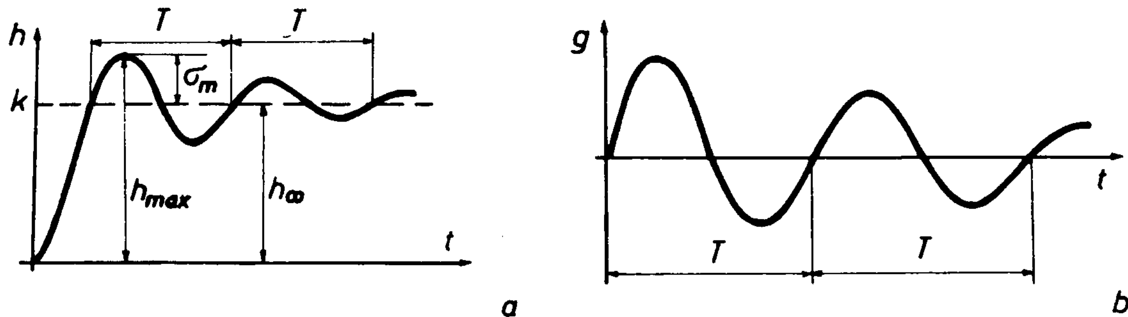
Prijelazna funkcija $h(t)$ i impulsna prijelazna funkcija $g(t)$ određene su izrazima:

$$h(t) = K\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega t + \varphi)\right] S(t) \qquad (3.71)$$

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}; \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \qquad (3.72)$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = g(t) = K\frac{\omega_0^2}{\omega} e^{-\omega_0\xi t} \sin\omega t \cdot S(t) \qquad (3.73)$$

Prijelazna funkcija $h(t)$ i impulsna prijelazna funkcija $g(t)$ imaju karakter prigušenih oscilacija (sl. 3.7.a).



Slika 3.7.

Vrijeme smirivanja prijelaznog procesa t_s određuje se kao vremenski interval nakon kojeg vrijedi nejednadžba:

$$|h(t) - h(\infty)| \leq \Delta \qquad (3.74)$$

Veličina Δ se obično kreće u granicama:

$$\Delta = (0.01 \div 0.05)K \qquad (3.75)$$

Određivanjem ekstrema jednadžbe (3.71) proizlazi maksimalni iznos prijelazne funkcije

$$h_{\max} = K\left[1 + \exp\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right] \qquad (3.76)$$

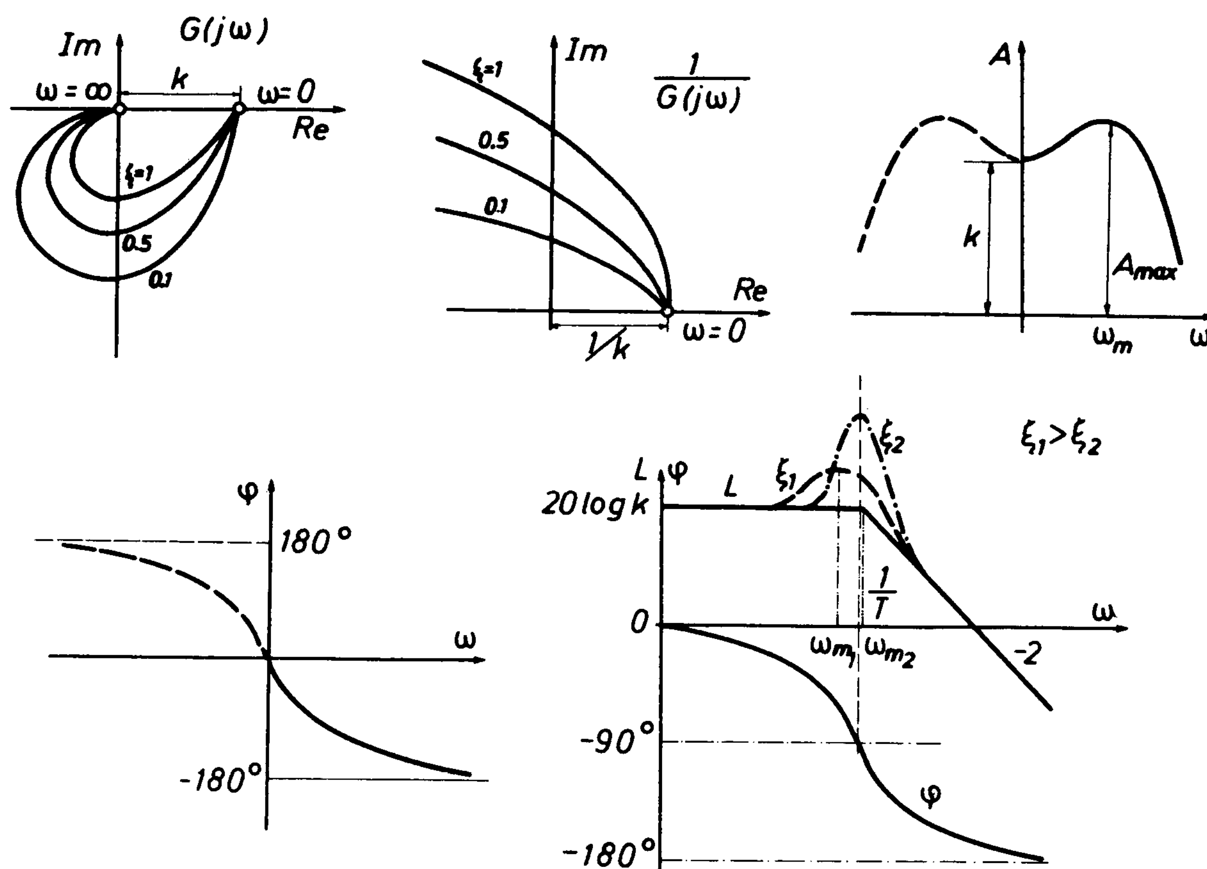
odnosno relativni iznos:

$$\sigma_m = \frac{h_{\max} - h_{(\infty)}}{h_{(\infty)}} = \exp\left(\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \qquad (3.77)$$

Frekvencijske karakteristike oscilatorne komponente prikazane su na sl. 3.8.

Oscilatorna komponenta bez prigušenja opisuje se diferencijalnom jednadžbom oblika:

$$(T^2 D^2 + 1)\, y = Ku \tag{3.78}$$



Slika 3.8.

Sve karakteristike ove komponente proizlaze iz karakteristika oscilatorne komponente za $\xi = 0$:

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 1} \tag{3.79}$$

$$h(t) = K(1 - \cos \omega_0 t)\, S(t) \tag{3.80}$$

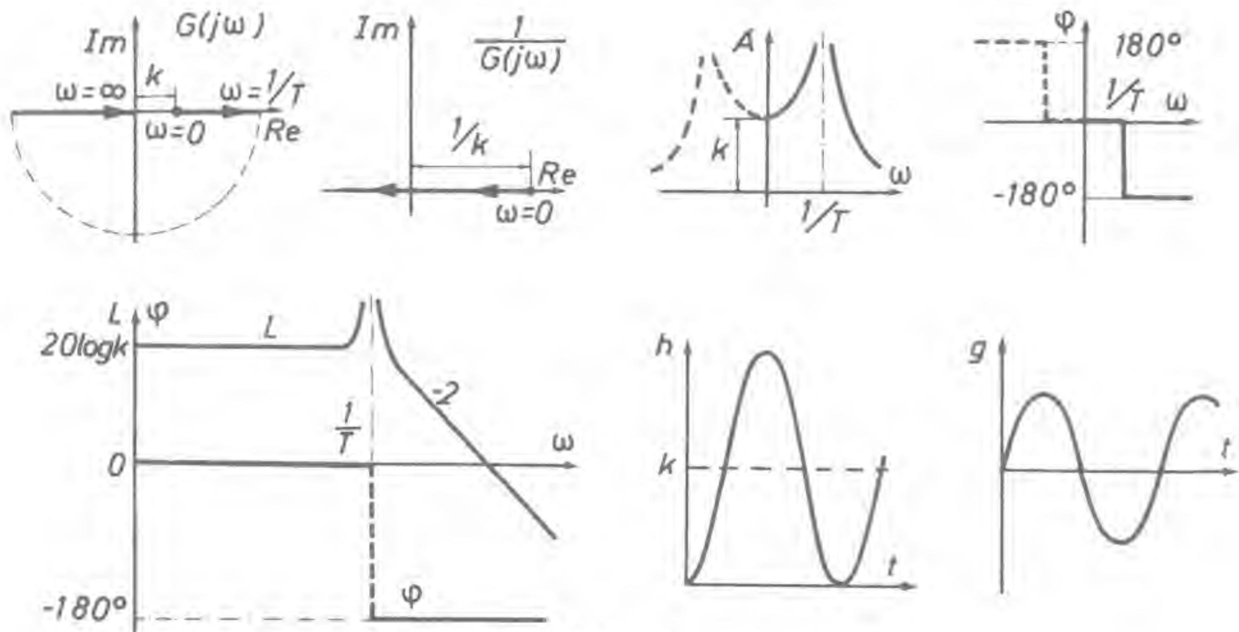
$$g(t) = K\omega_0 \sin \omega_0 t \cdot S(t) \tag{3.81}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 - \omega^2 T^2} \tag{3.82}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{|1 - \omega^2 T^2|} \tag{3.83}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, \text{ za } 0 \leq \omega \leq \dfrac{1}{T} \\ \pi, \text{ za } \dfrac{1}{T} \leq \omega < \infty \end{cases} \tag{3.84}$$

Asimptotska logaritamska karakteristika $L_a(\omega)$ ne razlikuje se od asimptotske karakteristike oscilatorne komponente. Stvarna karakteristika $L(\omega)$ na frekvenciji $\omega=\frac{1}{T}$ teži beskonačnosti (sl. 3.9).



Slika 3.9.

Kao primjeri oscilatorne komponente bez prigušenja mogu se navesti idealni LC četveropol ili oscilatorno gibanje umjetnog zemljinog satelita u režimu gravitacijske stabilizacije.

3.2. Integralne dinamičke komponente

U integralne dinamičke komponente ubrajaju se komponente kod kojih je u statičkom režimu izlazna veličina $y(t)$, proporcionalna integralu ulazne veličine $u(t)$.

Dinamička svojstva integralnih komponenata opisuju se diferencijalnom jednadžbom oblika:

$$C(D)\,y=\frac{K}{D}u \tag{3.85}$$

gdje je:

$C(D)$ – polinom koji udovoljava uvjetu $C(0)=1$.

Idealna integralna komponenta (*I – komponenta*) vrlo često se koristi u strukturnim shemama SAR. Dinamika ove komponente se opisuje jednadžbom (3.85) za $C(D)=1$:

$$y=\frac{K}{D}u \tag{3.86}$$

Za $u(t)=S(t)$, rješenje jednadžbe (3.86) jest:

$$h(t)=K\cdot t\cdot S(t) \tag{3.87}$$

$$\frac{dh(t)}{dt}=g(t)=K\cdot S(t) \tag{3.88}$$

Prijenosna funkcija i frekvencijska prijenosna funkcija određene su izrazima:

$$G(s)=\frac{K}{s} \tag{3.89}$$

$$G(j\omega)=\frac{K}{j\omega}=-j\frac{K}{\omega}=\frac{K}{\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}} \tag{3.90}$$

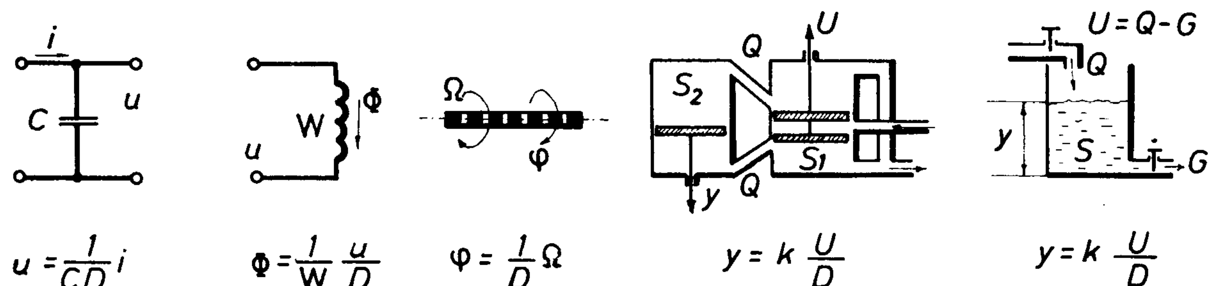
Amplitudna i fazna frekvencijska karakteristika proizlaze iz (3.90):

$$A(\omega)=\frac{K}{\omega} \tag{3.91}$$

$$L(\omega)=20\log\frac{K}{\omega} \tag{3.92}$$

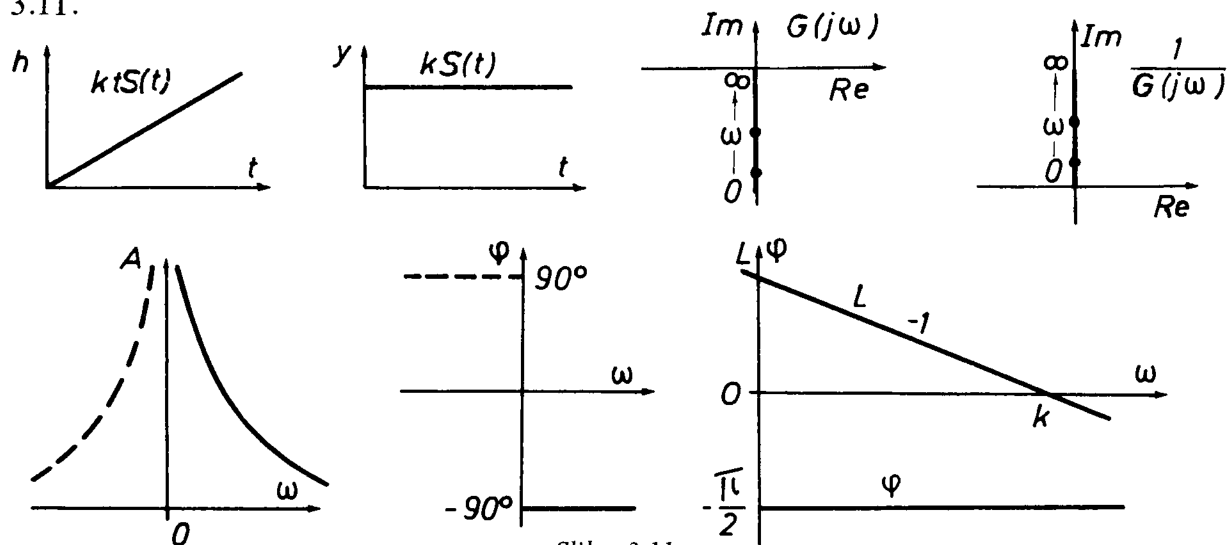
$$\varphi(\omega)=-\frac{\pi}{2} \tag{3.93}$$

Jednadžbama (3.86 – 3.93) mogu se opisati svojstva većeg broja realnih funkcionalnih elemenata regulacijskih sistema. Na primjer, u idealne integralne komponente, ovisno o režimu rada, mogu se ubrojiti: električki kondenzator, induktivitet, kut zakreta osovine motora, hidraulički rezervoar, hidrauličko pojačalo, operaciono pojačalo u režimu integriranja itd. (sl. 3.10).



Slika 3.10.

Frekvencijske i odzivne karakteristike prema (3.89 – 3.93) prikazane su na sl. 3.11.



Slika 3.11.

Iz (3.93) i grafičkih prikaza (sl. 3.11) proizlazi da idealna integralna komponenta u području frekvencije $0<\omega<\infty$ ima konstantni fazni pomak $\varphi=-\frac{\pi}{2}$.

Realna integralna komponenta karakterizira dinamička svojstva funkcionalnih elemenata SAR čiji se rad opisuje diferencijalnom jednadžbom oblika:

$$(TD+1)\,y=\frac{K}{D}\,u \tag{3.94}$$

Primjenom Laplaceove transformacije na izraz (3.94) i sređivanjem proizlazi:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K}{s(Ts+1)}=\frac{K}{s}-\frac{KT}{Ts+1} \tag{3.95}$$

Za $U(s)=\frac{1}{s}$ iz (3.95) proizlazi:

$$Y(s)=\frac{K}{s^2}-\frac{KT}{s(Ts+1)}; \tag{3.96}$$

odnosno:

$$\mathrm{L}^{-1}\{Y(s)\}=h(t)=K\left[t-T\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)\right]S(t) \tag{3.97}$$

$$g(t)=\frac{dh}{dt}=K\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)S(t) \tag{3.98}$$

Frekvencijska prijenosna funkcija ima oblik:

$$G(j\omega)=\frac{K}{j\omega(j\omega T+1)}, \tag{3.99}$$

odnosno:

$$A(\omega)=\frac{K}{\omega\sqrt{\omega^2T^2+1}} \tag{3.100}$$

$$\varphi(\omega)=-\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\omega T \tag{3.101}$$

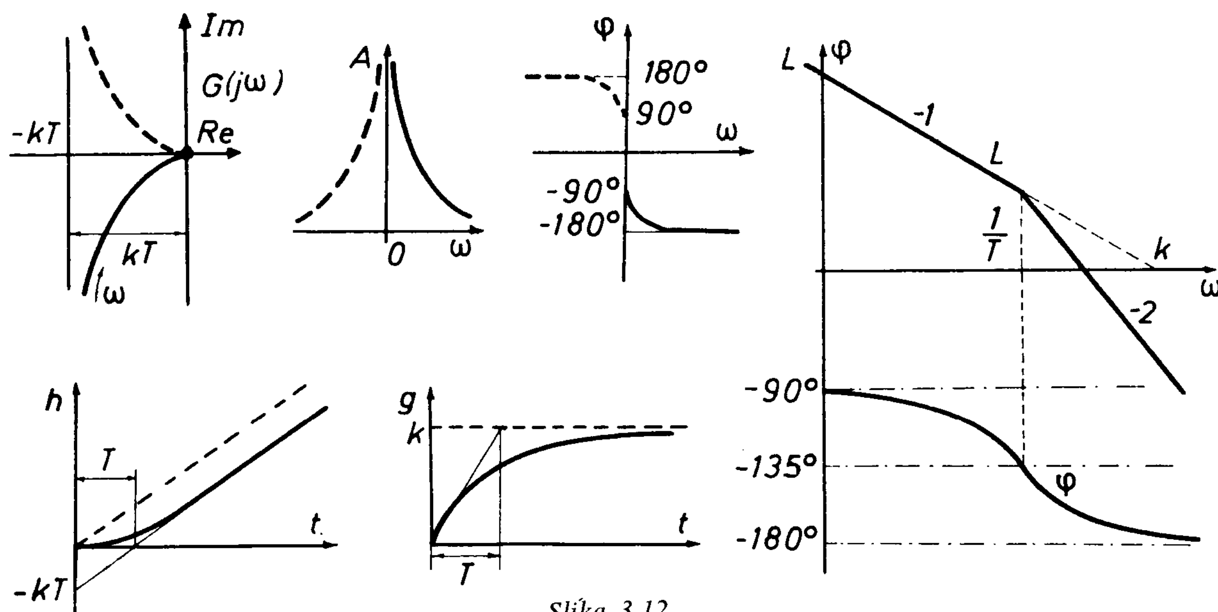
$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log\frac{K}{\omega}-20\log\sqrt{\omega^2T^2+1} \tag{3.102}$$

Iz (3.94 – 3.102) vidljivo je da se realna integralna komponenta može razmatrati kao dinamička komponenta koja je određena serijskom vezom idealne integralne komponente i aperiodske komponente prvog reda.

Kao primjeri realnih integralnih komponenata mogu se navesti RC i RL četveropoli i sve vrste servomotora kod kojih se u svojstvu izlazne veličine razmatra kut zakreta izlazne osovine ili linearni pomak što ga vrše hidraulički i pneumatski uređaji.

Frekvencijske i odzivne karakteristike realne integralne komponente prikazane su na sl. 3.12.

Usporedbom karakteristika idealne i realne integralne komponente (sl. 3.11. i sl. 3.12) može se zaključiti da se prijelazni proces kod realne integralne komponente odvija usporeno, a to je posljedica inercijskih svojstava karakteriziranih vremenskom konstantom T. Amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika realne integralne komponente smještena je u trećem kvadrantu, tj. ima za $\omega \to \infty$ fazni pomak $\varphi = -180°$, a za $\omega \to 0$, $\varphi = -90°$, a modul $|G(j\omega)| \to \infty$.



Slika 3.12.

Proporcionalno integralna komponenta (*P-I komponenta*) dobije se paralelnom vezom proporcionalne i idealne integralne komponente, a opisuje se diferencijalnom jednadžbom oblika:

$$Dy = (K + K_1 D)\, u \tag{3.103}$$

gdje je:

K_1 – koeficijent proporcionalne komponente
K – koeficijent pojačanja integralne komponente.

Prijenosna funkcija *P-I* komponente određena je izrazom:

$$G(s) = \frac{K}{s} + K_1 = \frac{K}{s}(1 + Ts) \tag{3.104}$$

gdje je: $T = \dfrac{K_1}{K}$ – vremenska konstanta komponente.

Rješenje jednadžbe (3.103) za $u(t) = S(t)$ je:

$$h(t) = (Kt + K_1)\, S(t) \tag{3.105}$$

$$g(t) = KS(t) + K_1 \delta(t) \tag{3.106}$$

uvrštenjem u (3.104) $p = j\omega$ proizlazi:

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega} + K_1 = \frac{K}{j\omega}(1 + Tj\omega) \tag{3.107}$$

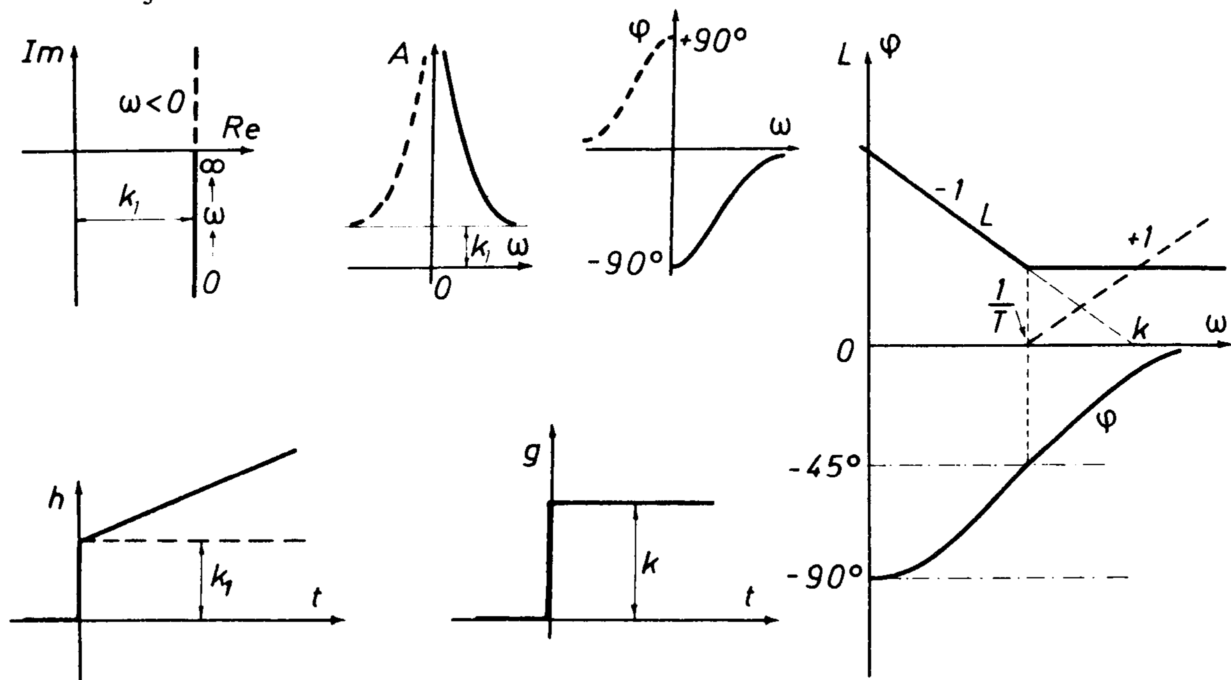
odnosno:

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\omega}\sqrt{1+\omega^2 T^2} \tag{3.108}$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \omega T \tag{3.109}$$

$$L(\omega) = 20 \log \frac{K}{\omega} + 20 \log \sqrt{1+\omega^2 T^2} \tag{3.110}$$

Grafički prikazi karakteristika (3.105 – 3.110) dani su na sl. 3.13. Analizom frekvencijskih karakteristika proizlazi da se *P-I* komponenta u području niskih frekvencija $\omega < \frac{1}{T}$ ponaša kao idealna integralna komponenta, dok se u području $\omega > \frac{1}{T}$ ponaša kao proporcionalna komponenta s koeficijentom proporcionalnosti K_1. Iz odzivne karakteristike $h(t)$ vidljivo je da se *P-I* komponenta za $\omega = 0$ ponaša kao proporcionalna komponenta za $0 < \omega < \infty$, svojstva *P-I* komponente odgovaraju svojstvima idealne integralne komponente. *P-I* komponenta se ugrađuje u SAR radi postizanja potrebnih pokazatelja kvalitete prijelaznog procesa u području niskih frekvencija.



Slika 3.13.

3.3. Derivativne dinamičke komponente

U derivativne dinamičke komponente ubrajaju se komponente kod kojih je u statičkom režimu izlazna veličina $y(t)$ proporcionalna derivaciji ulazne veličine $u(t)$.

Dinamička svojstva derivativnih komponenata opisuju se diferencijalnom jednadžbom oblika:

$$C(D)\,y = KDu \tag{3.111}$$

gdje je:

$C(D)$ – polinom koji udovoljava uvjetu $S(0)=1$.

Idealna derivativna komponenta (*D – komponenta*) opisuje se diferencijalnom jednadžbom (3.111) za $C(D)=1$:

$$y=KDu \tag{3.112}$$

Prijenosne funkcije i frekvencijske karakteristike idealne derivativne komponente određene su izrazima:

$$G(s)=Ks \tag{3.113}$$

$$G(j\omega)=jK\omega=K\omega e^{j\frac{\pi}{2}} \tag{3.114}$$

$$A(\omega)=K\omega \tag{3.115}$$

$$\varphi(\omega)=\pi/2 \tag{3.116}$$

$$L(\omega)=20\log K\omega \tag{3.117}$$

Prijelazna funkcija idealne derivativne komponente definirana je matematski kao derivacija standardne odskočne funkcije:

$$h(t)=K\frac{dS(t)}{dt}=K\delta(t) \tag{3.118}$$

gdje je:

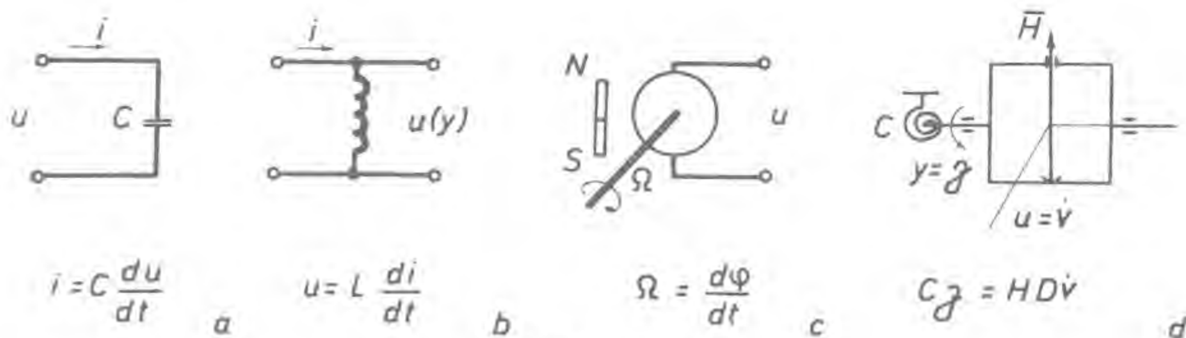
$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases} \tag{3.119}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=S(t) \tag{3.120}$$

Impulsna prijelazna funkcija jest:

$$g(t)=\frac{dh(t)}{dt}=K\frac{d\delta(t)}{dt} \tag{3.121}$$

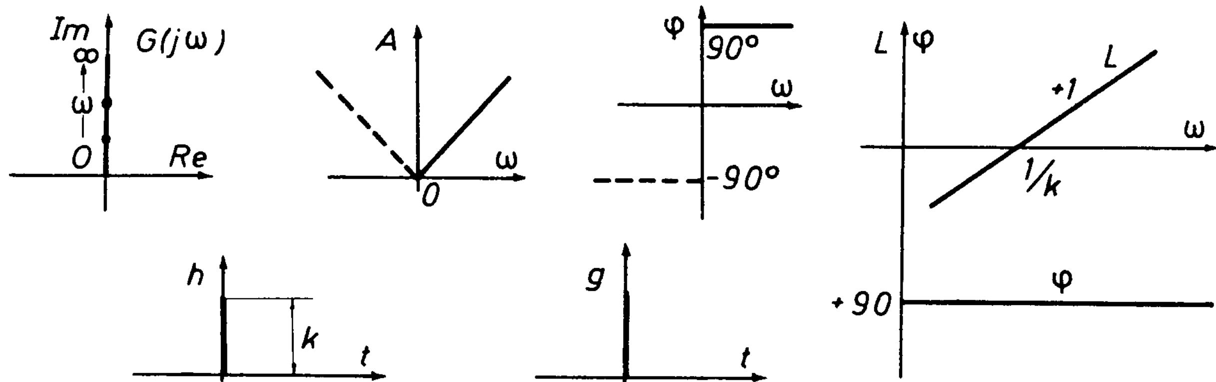
Kao primjeri idealiziranih derivativnih komponenata mogu se navesti odgovarajući realni funkcionalni elementi kod kojih se u određenim uvjetima mogu zanemariti inercijska svojstva (sl. 3.14).



Slika 3.14.

Grafički prikazi karakteristika (3.114 – 3.117) te (3.118) i (3.120) dani su na sl. 3.15.

Iz jednadžbi (3.114 – 3.116) i grafičkih prikaza (sl. 3.15), proizlazi da idealna derivativna komponenta u području frekvencija $0 < \omega < \infty$ ima konstantni pozitivni fazni pomak $\varphi = \frac{\pi}{2}$.



Slika 3.15.

Realna derivativna komponenta karakterizira dinamička svojstva funkcionalnih elemenata SAR, a njihov se rad opisuje diferencijalnom jednadžbom oblika:

$$(TD+1)\,y = KDu \tag{3.122}$$

Prijenosna funkcija komponente je:

$$G(s) = \frac{K \cdot s}{Ts+1} \tag{3.123}$$

Za određivanje prijelazne funkcije potrebno je riješiti diferencijalnu jednadžbu (3.122) za $u(t) = S(t)$:

$$(TD+1)\,y = K\frac{dS(t)}{dt} \tag{3.124}$$

odnosno:

$$T\frac{dy}{dt} + y = K\delta(t) \tag{3.125}$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe (3.125) najjednostavnije se dobije rješavanjem integralne jednadžbe:

$$T\int_{-\infty}^{t} \frac{dy(\tau)}{d\tau}\,d\tau + \int_{-\infty}^{t} y(\tau)\,d\tau = K\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = KS(t) \tag{3.126}$$

zamjenom u (3.126)

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\tau)\,d\tau, \tag{3.127}$$

$$\text{i} \quad \frac{d\eta(t)}{dt} = y(t) \tag{3.128}$$

proizlazi:

$$T\frac{d\eta}{dt}+\eta=KS(t) \tag{3.129}$$

Rješenje (3.129) je:

$$\eta(t)=K\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)S(t) \tag{3.130}$$

Iz (3.128) i (3.130) proizlazi:

$$y(t)=h(t)=\frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}S(t) \tag{3.131}$$

$$\frac{dh(t)}{dt}=g(t)=\frac{K}{T}\delta(t)-\frac{K}{T^2}e^{-\frac{t}{T}}S(t) \tag{3.132}$$

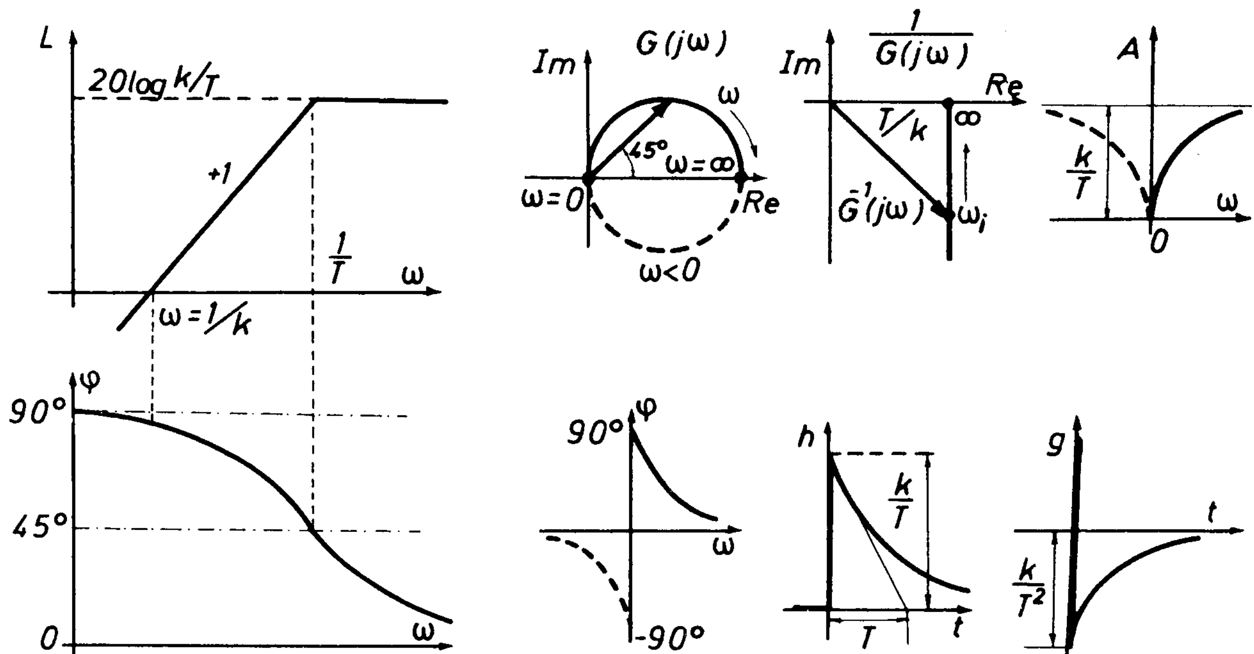
Frekvencijske karakteristike realne derivativne komponente (sl. 3.16) određene su izrazima:

$$G(j\omega)=\frac{j\omega K}{1+jT\omega}=\frac{\frac{K}{T}}{1+\frac{1}{j\omega T}} \tag{3.133}$$

$$A(\omega)=\frac{K\omega}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \tag{3.134}$$

$$\varphi(\omega)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\omega T \tag{3.135}$$

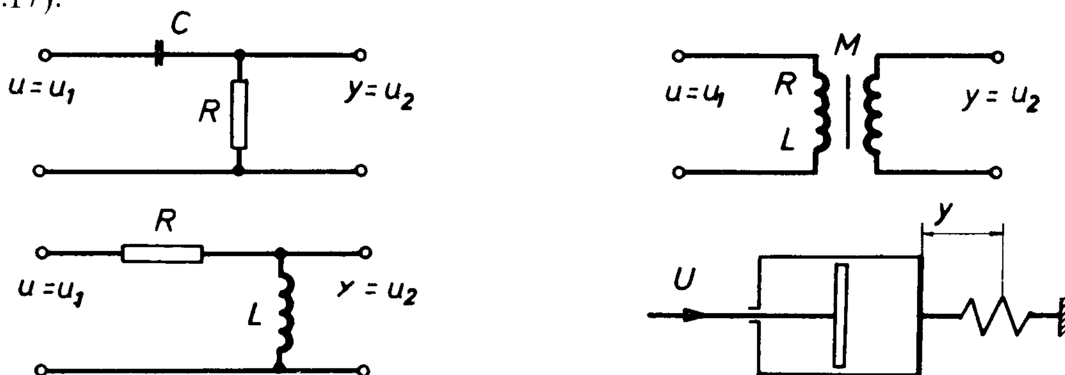
$$L(\omega)=20\log K\omega-20\log\sqrt{1-T^2\omega^2} \tag{3.136}$$



Slika 3.16.

Iz prijenosne funkcije (3.133) i grafičkih prikaza (sl. 3.16), proizlazi da se realna derivativna komponenta može prikazati strukturnom shemom sastavljenom iz serijski povezane idealne derivativne komponente s aperiodskom komponentom prvoga reda. Prijelazni proces realne derivativne komponente je usporen u odnosu na prijelazni proces idealne derivativne komponente. Usporeniji prijelazni proces posljedica je inercijskih svojstava koja su karakterizirana vremenskom konstantom T. Fazni pomak $\varphi(\omega)$ što ga u sistem unosi ova komponenta, smanjuje se porastom frekvencije, tj. $\omega \to \infty$, $\varphi(\omega) \to 0$. Iz oblika amplitudne frekvencijske karakteristike $A(\omega)$ odnosno $L(\omega)$ vidljivo je da komponenta dobro propušta signale visokih frekvencija, a prigušuje signale niskih frekvencija.

Kao primjer realnih derivativnih komponenata mogu se navesti pasivni četveropoli, derivativni transformator, tahogeneratori, hidraulički prigušivač s oprugom i dr. (sl. 3.17).



Slika 3.17.

Proporcionalno derivativna komponenta (*P-D komponenta*) dobije se paralelnom vezom proporcionalne i idealne derivativne komponente. Dinamička svojstva komponente opisuju se jednadžbom:

$$y = K(1 + TD)u \tag{3.137}$$

Rješenje jednadžbe (3.137) za $u(t) = S(t)$ je:

$$h(t) = KS(t) + KT\delta(t) \tag{3.138}$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = g(t) = K\delta(t) + KT\delta'(t) \tag{3.139}$$

Prijenosna funkcija i frekvencijske karakteristike određene su izrazima:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = K(1 + Ts) \tag{3.140}$$

$$G(j\omega) = K(1 + j\omega T) = K\sqrt{1 + \omega^2 T^2}\, e^{j\,\mathrm{arctg}\,\omega T} \tag{3.141}$$

$$A(\omega) = K\sqrt{1 + \omega^2 T^2} \tag{3.142}$$

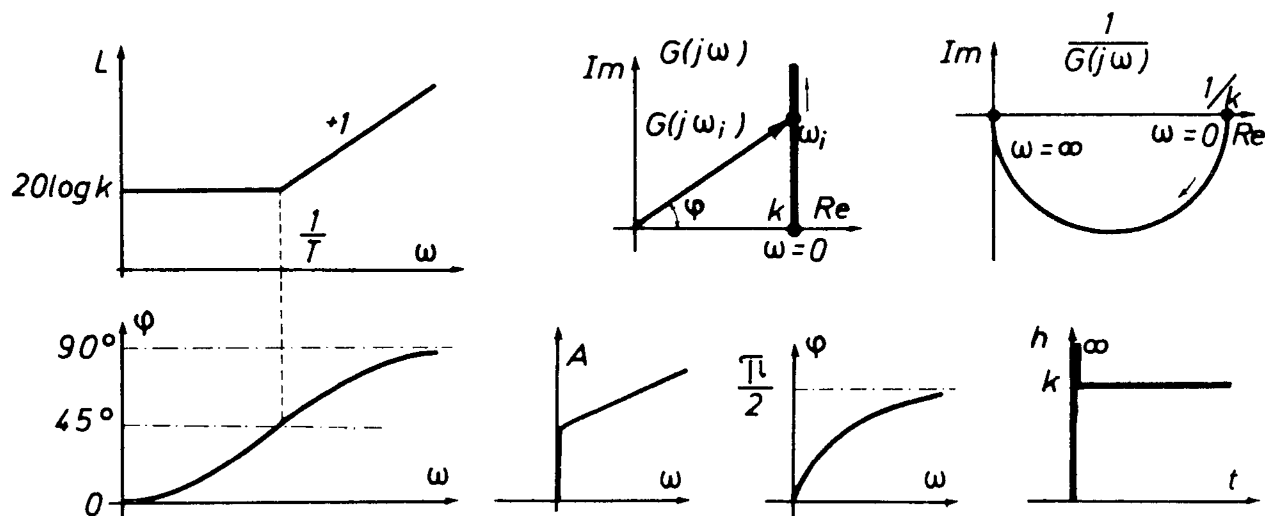
$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\,\omega T \tag{3.143}$$

$$L(\omega) = 20\log K + 20\log\sqrt{1 + \omega^2 T^2} \tag{3.144}$$

$$L_a(\omega) = \begin{cases} 20\log K; & 0 < \omega T \le 1 \\ 20\log K + 20\log \omega T; & \omega T \ge 1 \end{cases} \tag{3.145}$$

Odzivne i frekvencijske karakteristike *P-D* komponente prikazane su na sl. 3.18.

Usporedbom frekvencijskih karakteristika (sl. 3.3, sl. 3.4. i sl. 3.18) proizlazi da je karakteristika $G(j\omega)$, *P-D* komponente analógna inverznoj $G^{-1}(j\omega)$, karakteristici aperiodske komponente prvog reda.



Slika 3.18.

Općenito postojanje *P-D* komponente u SAR označava uvođenje derivacije u zakon regulacije i obično pozitivno utječe na kvalitetu prijelaznog procesa i stabilnost sistema.

Bitna zajednička svojstva do sada razmotrenih pozicionih, integralnih i derivativnih komponenata jesu:

1. Svi polovi i nule prijenosnih funkcija imaju negativne ili jednake nuli realne dijelove.
2. Funkcije $A(\omega)$ i $\varphi(\omega)$ odnosno $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ ili $U(\omega)$ i $V(\omega)$ međusobno su jednoznačno određene.

Na primjer, pri nagibu $L_a(\omega)$ od ± 20 dB/dek, fazna karakteristika $\varphi(\omega)$ teži iznosu $\pm 90°$, odnosno pri nagibu $L_a(\omega)$ od ± 40 dB/dek, fazna karakteristika $\varphi(\omega)$ teži iznosu $\pm 180°$, tj. poznavanjem amplitudne karakteristike $L(\omega)$ jednoznačno je određena i fazna karakteristika $\varphi(\omega)$, odnosno poznavanjem amplitudne frekvencijske karakteristike sistema jednoznačno je određena i prijenosna funkcija sistema.

Ako između funkcija $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ neke kompleksne funkcije $G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ postoji sljedeća ovisnost: L[58]

$$P(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(u)}{u-\omega} du \tag{3.146}$$

$$Q(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(u)}{u-\omega} du \tag{3.147}$$

odnosno:

$$ln\, A\,(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(u)}{u-\omega}\,du \tag{3.148}$$

$$\varphi\,(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{A\,(\omega)}{u-\omega}\,du, \tag{3.149}$$

tada dinamičke komponente sa svojstvima (3.146–3.149) sadrže minimalni fazni pomak $\varphi\,(\omega)$ pri $0<\omega<\infty$ i imaju naziv *minimalno-fazne dinamičke komponente*, odnosno *minimalno-fazni sistemi*.

3.4. Neminimalno-fazne dinamičke komponente

Pod *neminimalno-faznim* elementarnim dinamičkim komponentama razumijevaju se komponente opisane prijenosnim funkcijama oblika:

$$\frac{1}{Ts-1};\qquad \frac{1}{T^2s^2-2\xi Ts+1};\qquad \frac{1}{T^2s^2+2\xi Ts-1};$$

$$Ts-1;\qquad T^2s^2-2\xi Ts+1;\qquad T^2s^2+2\xi Ts-1;\qquad e^{-\tau s}\quad \text{itd.}$$

Stabilna neminimalno-fazna komponenta prvog reda opisuje se diferencijalnom jednadžbom oblika:

$$y+T_2Dy=K\,(u-T_1Du) \tag{3.150}$$

Rješenje jednadžbe (3.150) za $u\,(t)=S\,(t)$ je:

$$h\,(t)=K\left[1-\left(1+\frac{T_1}{T_2}\right)e^{-\frac{t}{T_2}}\right]S\,(t) \tag{3.151}$$

$$\frac{dh\,(t)}{dt}=g\,(t)=-\frac{KT_1}{T_2}\,\delta\,(t)+\frac{T_2+T_1}{T_2^2}K\,e^{-\frac{t}{T_2}}\,S\,(t) \tag{3.152}$$

Prijenosne funkcije i frekvencijske karakteristike određene su izrazima:

$$G\,(s)=\frac{Y\,(s)}{U\,(s)}=K\,\frac{1-T_1s}{1+T_2s} \tag{3.153}$$

$$G\,(j\omega)=K\,\frac{1-j\omega T_1}{1+j\omega T_2} \tag{3.154}$$

$$A\,(\omega)=K\sqrt{\frac{1+\omega^2T_1^2}{1+\omega^2T_2^2}} \tag{3.155}$$

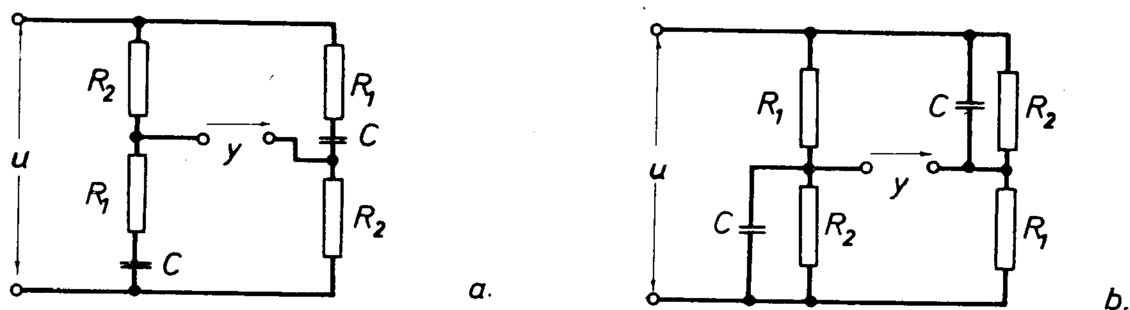
$$\varphi\,(\omega)=-\operatorname{arctg}\omega T_1-\operatorname{arctg}\omega T_2 \tag{3.156}$$

$$L\,(\omega)=20\log K+20\log\sqrt{1+\omega^2T_1^2}-20\log\sqrt{1+\omega^2T_2^2} \tag{3.157}$$

Frekvencijske karakteristike stabilne neminimalno-fazne komponente prvog reda prikazane su na sl. 3.19.

Slika 3.19.

Kao primjer razmotrene neminimalno-fazne komponente mogu poslužiti sheme mostova realiziranih *R-C* elementima (sl. 3.20).



Slika 3.20.

Jednadžbe R-C sklopova (sl. 3.20) jesu:

a) $$y + RCsy = u - R_0 Csu \qquad (3.158)$$

b) $$Ry + R_1 R_2 Csy = R_0 u - R_1 R_2 Csu \qquad (3.159)$$

gdje je: $R = R_1 + R_2$; $R_0 = R_2 - R_1 > 0$;

Iz (3.158) i (3.159) proizlazi:

Za sklop na sl. 3.20.a:

$$G_a(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1 - R_0 Cs}{1 + RCs} \qquad (3.160)$$

Za sklop na sl. 3.20.b:

$$G_b(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{R_0}{R} \frac{1 - \dfrac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} Cs}{1 + \dfrac{R_1 R_2 Cs}{R_1 + R_2}} \qquad (3.161)$$

Nestabilne neminimalno-fazne komponente opisuju se prijenosnim funkcijama kod kojih se jedan ili više polova nalaze u desnoj poluravnini kompleksne ravnine $G(j\omega)$. Na primjer, nestabilna komponenta prvog reda općenito se opisuje diferencijalnom jednadžbom oblika:

$$y - T_2 Dy = K(u + T_1 Du) \qquad (3.162)$$

Prijenosna funkcija izraza (3.162) je:

$$G(s) = \frac{K(1 + T_1 s)}{1 - T_2 s} \qquad (3.163)$$

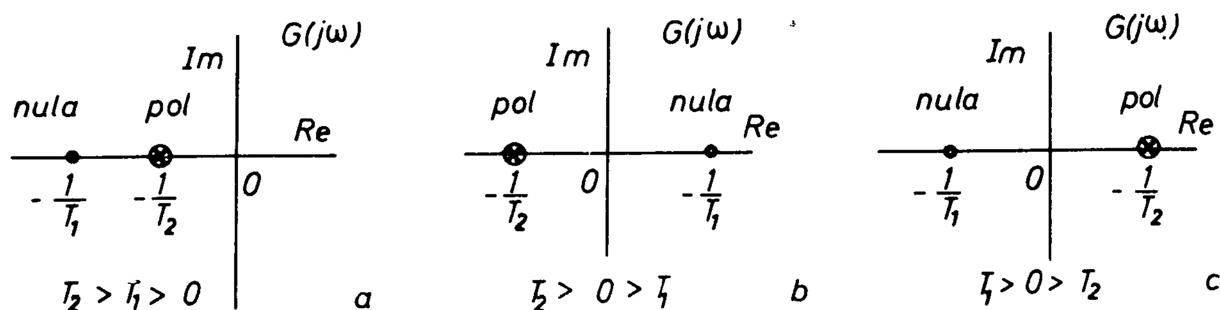
Općenito se sve dinamičke komponente prvog reda mogu opisati diferencijalnom jednadžbom oblika:

$$y + T_2 Dy = K(u + T_1 Du) \qquad (3.164)$$

Iz (3.164) za $T_2 > 0$ i $T_1 > 0$ dobije se minimalno-fazna dinamička komponenta s prijenosnom funkcijom:

$$G(s) = \frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s} \qquad (3.165)$$

Za $T_2 > 0$ i $T_1 < 0$, dobije se stabilna neminimalno-fazna dinamička komponenta s prijenosnom funkcijom (3.153), a za $T_2 < 0$, neovisno o predznaku T_1, slijedi nestabilna dinamička komponenta s prijenosnom funkcijom (3.163). Na sl. 3.21.a, b, c dat je opći prikaz položaja polova i nule prema izrazima (3.153), (3.163) i (3.165).



Slika 3.21.

Među nestabilnim dinamičkim komponentama vrlo često se susreće *kvaziinercijska* komponenta – nestabilna komponenta, koja se opisuje jednadžbama oblika:

$$y - TDy = Ku \tag{3.166}$$

ili

$$-y + TDy = Ku \tag{3.167}$$

Prijenosna funkcija izraza (3.167) je:

$$G(s) = \frac{K}{Ts - 1} \tag{3.168}$$

odnosno:

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega T - 1} \tag{3.169}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \tag{3.170}$$

$$\varphi(\omega) = -\pi + \operatorname{arctg} \omega T \tag{3.171}$$

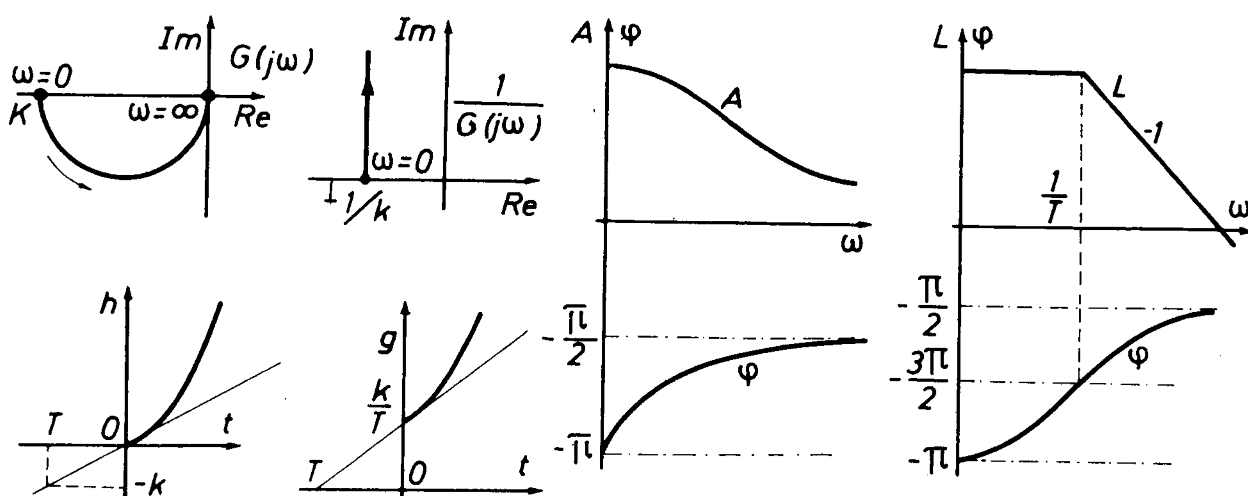
$$L(\omega) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \tag{3.172}$$

Odzivne karakteristike (3.168) jesu:

$$h(t) = K\left[e^{\frac{t}{T}} - 1\right] S(t) \tag{3.173}$$

$$\frac{dh}{dt} = g(t) = \frac{K}{T} e^{\frac{t}{T}} S(t) \tag{3.174}$$

Grafički prikaz karakteristika (3.170 – 3.174) dani su na sl. 3.22.



Slika 3.22.

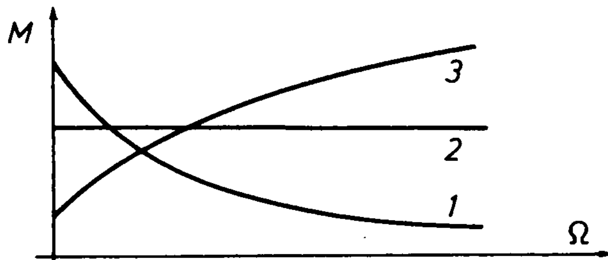
Usporedbom grafičkih prikaza sl. (3.2 – 3.4) i sl. 3.22. proizlazi:

– Nestabilne komponente mogu imati identične amplitudne frekvencijske karakteristike kao i odgovarajuće stabilne komponente, a odgovarajuće se fazne karakteristike međusobno bitno razlikuju.

7 *

– Kod linearnih nestabilnih komponenata ne postoji statički režim, tj. tokom vremena pod uticajem bilo koje ulazne veličine $u(t)$, izlazna veličiny $y(t)$, teži beskonačnosti.

Kao primjer kvaziinercijske komponente može poslužiti bilo koji motor s pozitivnim nagibom mehaničke karakteristike $M=f(\Omega)$, karakteristika 3 (sl. 3.23).



Slika 3.23.

U slučaju kada je mehanička karakteristika motora određena krivuljom 1 (sl. 3.23), dinamička svojstva motora opisana su jednadžbom (2.40); za slučaj krivulje 2, kada je $M(\Omega)=\text{const}$, prijenosna funkcija motora određena je izrazom:

$$G(s)=\frac{\Omega(s)}{u(s)}=\frac{K_M}{Js}=\frac{K}{s} \qquad G(s)=\frac{\Omega(s)}{u(s)}=\frac{K}{s} \tag{3.175}$$

Ako mehanička karakteristika motora ima oblik krivulje 3 (sl. 3.23), diferencijalna jednadžba poprima oblik:

$$JD\Omega=K_M u+K_1\Omega \tag{3.176}$$

odnosno:

$$TD\Omega-\Omega=Ku \tag{3.177}$$

gdje je:

$T=\frac{J}{K_1}$ – vremenska konstanta motora; J – moment inercije rotacijskih masa sveden na osovinu motora, K_1 – nagib mehaničke karakteristike $M(\Omega)$ u točki provođenja linearizacije.

Transcendentne dinamičke komponente opisuju se transcendentnim prijenosnim funkcijama. Sadržane su u sistemima s raspodijeljenim parametrima i u sistemima s konstantnim parametrima kod kojih izlazna veličina za određeni vremenski interval kasni u odnosu na ulaznu veličinu.

Među transcendentnim komponentama koje se primjenjuju u SAR vrlo često se susreću komponente *kašnjenja* i *iracionalna* komponenta s raspodijeljenim kašnjenjem.

Komponenta *kašnjenja* opisuje se diferencijalnom jednadžbom oblika:

$$y(t)=u(t-\tau), \tag{3.178}$$

tj. izlazna veličina komponente po svom je iznosu jednaka ulaznoj veličini, ali je vremenski pomaknuta za vrijeme kašnjenja $t=\tau$.

Prijenosna funkcija izraza (3.178) je:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=e^{-\tau s} \tag{3.179}$$

Frekvencijske karakteristike (3.179) određene su izrazima:

$$A(\omega)=|G(j\omega)|=1 \tag{3.180}$$

$$L(\omega)=0 \tag{3.181}$$

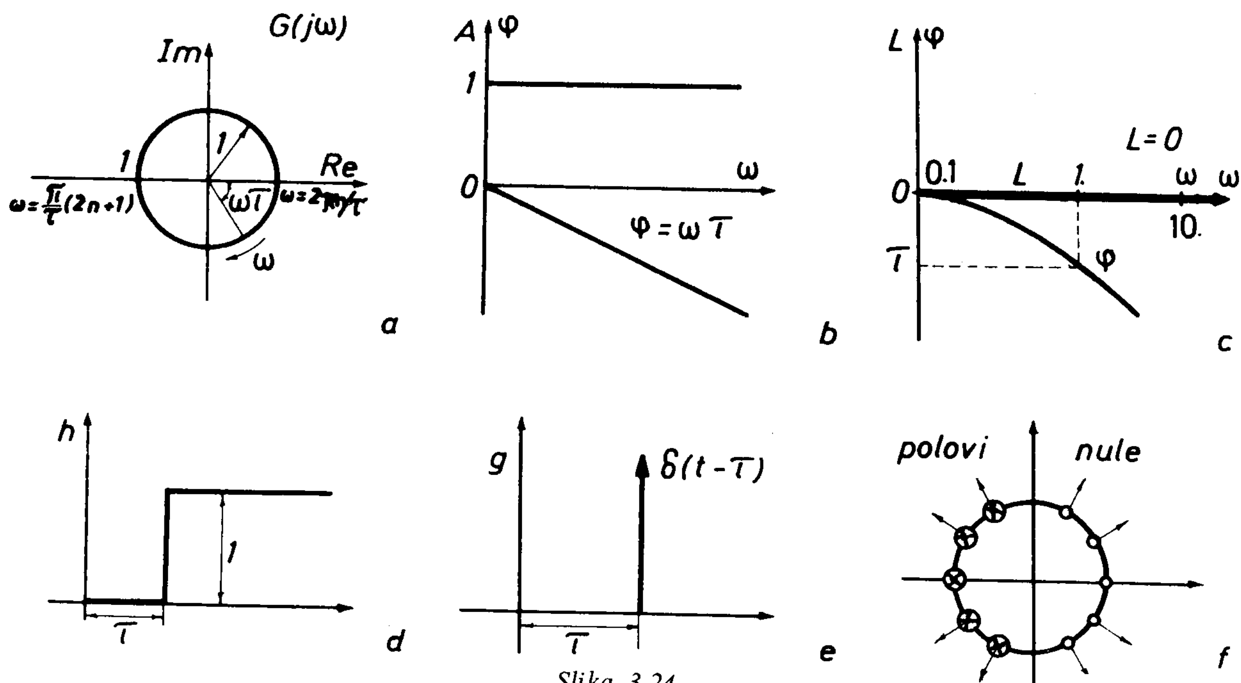
$$\varphi(\omega)=-\omega\tau \tag{3.182}$$

Odzivne karakteristike (3.179) jesu:

$$h(t)=\mathsf{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\tau s}}{s}\right\}=S(t-\tau) \tag{3.183}$$

$$\frac{dh(t)}{dt}=g(t)=\delta(t-\tau) \tag{3.184}$$

Grafički prikazi frekvencijskih i odzivnih karakteristika komponente kašnjenja dane su na sl. 3.24.



Slika 3.24.

Amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika (sl. 3.24.a) jedinična je kružnica u kompleksnoj ravnini $G(j\omega)$ sa centrom u koordinatnom početku.

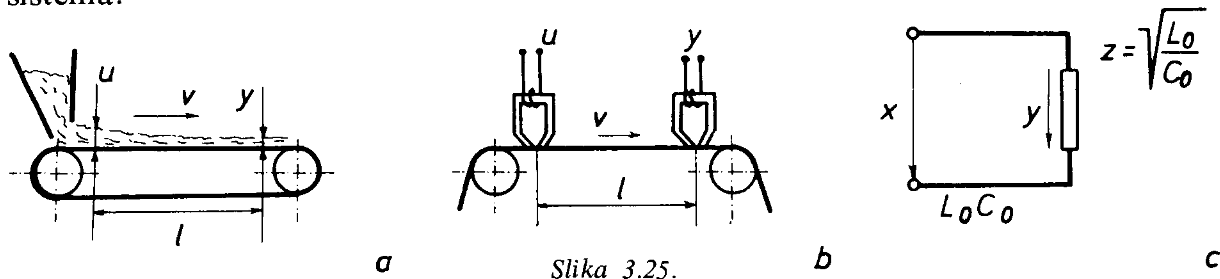
Komponenta kašnjenja ubraja se u stabilne neminimalno-fazne komponente. Ona ima beskonačni broj polova raspoređenih u lijevoj poluravnini kompleksne ravnine i beskonačan broj nula raspoređenih u desnoj poluravnini kompleksne ravnine $G(j\omega)$ (sl. 3.24.f).

Neki primjeri funkcionalnih elemenata koji se karakteriziraju komponentom kašnjenja prikazani su na sl. 3.25.

Na primjer, pri transportiranju rasutog materijala transporterom (sl. 3.25.a), izlazna veličina y kasni za ulaznom veličinom u za vrijeme $\tau=l/v$ koje je određeno brzinom i dužinom transportne trake v i l. Analogno izlazna veličina magnetske trake y kasni za ulaznom veličinom u za vrijeme određeno brzinom trake i razmakom glava za zapisivanje i reprodukciju. Napon $y(t)$ na kraju linije bez gubitaka, opterećene

prilagođenom impedancijom kasni za ulaznim naponom u za vrijeme $\tau = l\sqrt{L_0/C_0}$ (sl. 3.25.c).

Komponenta kašnjenja ima veliko praktično značenje pri realizaciji diskretnih sistema.



Slika 3.25.

Iracionalne dinamičke komponente. Ove komponente susreću se pri opisivanju procesa s raspodijeljenim parametrima. Na primjer, Fourierova jednadžba toplinske vodljivosti s jednom prostornom koordinatom ima oblik:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = a \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \tag{3.185}$$

gde je: $v = v\ (r,\ t)$, veličina ovisna o prostornoj koordinati r i vremenu t.

Uz pretpostavku da se veličina v može prikazati sinusnom funkcijom:

$$v = Im V\,(j\omega t) = V_m e^{j\omega t} \tag{3.186}$$

Jednadžba (3.185) se svodi na oblik:

$$\frac{\partial^2 V_m}{\partial r^2} - j\omega a V_m = 0 \tag{3.187}$$

Korijeni homogene diferencijalne jednadžbe (3.187) jesu:

$$\gamma_{1,2} = \pm\sqrt{j\omega_a} \tag{3.188}$$

Rješenje jednadžbe (3.187) ima oblik:

$$V_m = Ae^{-r\sqrt{j\omega a}} + Be^{r\sqrt{j\omega a}} \tag{3.189}$$

Uz granične uvjete $V_m = 0$ za $r \to \infty$, iz (3.189) proizlazi $B = 0$, pa rješenje jednadžbe (3.187) ima oblik:

$$V_m = Ae^{-r\sqrt{j\omega a}} \tag{3.190}$$

Ovisno o graničnim uvjetima i fizikalnim procesima koji se tretiraju jednadžbom (3.185) u praksi se vrlo često tretiraju iracionalne dinamičke komponente s prijenosnim funkcijama oblika:

$$G_1\,(s) = K_1/\sqrt{s} \tag{3.191}$$

$$G_2\,(s) = K/(1+\sqrt{sT}) \tag{3.192}$$

$$G_3\,(s) = K/(\sqrt{1+sT}) \tag{3.193}$$

$$G_4\,(s) = Ke^{-\sqrt{sT}} \tag{3.194}$$

Pomoću iracionalnih dinamičkih komponenata opisuju se mnogi procesi s raspodijeljenim parametrima. Na primjer, procesi prijenosa signala telegrafskim kablovima, te razni difuzijski i toplinski procesi.

4

STRUKTURNE SHEME I JEDNADŽBE LINEARNIH SISTEMA

4.1. Sastavljanje diferencijalnih jednadžbi linearnih sistema

Diferencijalne jednadžbe linearnih sistema sastavljaju se na temelju lineariziranih diferencijalnih jednadžbi dinamičkih komponenata sistema i jednadžbi njihovih međusobnih veza. Pri provođenju analize SAU obično se tretiraju izlazne koordinate sistema u cjelini, a rjeđe se ukazuje potreba određivanja ponašanja izlaznih koordinata pojedinih dinamičkih komponenata sistema. Kao izlazne veličine sistema obično se tretiraju regulirana veličina $y(t)$ i signal razlike $\varepsilon(t)$, dok se u svojstvu ulaznih veličina tretiraju sve vanjske veličine, tj. vodeće i poremećajne veličine.

Diferencijalne jednadžbe SAR najprikladnije se određuju iz diferencijalnih jednadžbi dinamičkih komponenata razmatranog sistema. Na primjer, pri sastavljanju diferencijalne jednadžbe SAR brzine vrtnje istosmjernog motora, primjer 1.13, sl. 1.22, funkcionalna shema sistema može se prikazati vezom četiri funkcionalna elementa: komparator, pojačalo, tahogenerator i motor. Dinamička svojstva ovih funkcionalnih elemenata, u linearnom planu, mogu se opisati svojstvima odgovarajućih tipičnih dinamičkih komponenata.

Ako se nominalne veličine sistema (sl. 1.22) označe sa U°, Ω°, M°, E°, E_T° i U_M°, a otkloni veličina funkcionalnih elemenata od nominalnog režima rada sa: $u=U(t)-U^\circ$; $\Omega=\omega(t)-\Omega^\circ$, $M=m(t)-M^\circ$, $\varepsilon=E(t)-E^\circ$, $e=E_T(t)-E_T^\circ$; $U_M=U_M(t)-U_M^\circ$, diferencijalne jednadžbe funkcionalnih elemenata jesu:

Jednadžba komparatora:

$$\varepsilon=u-e \tag{4.1}$$

Jednadžba pojačala ovisi o shemi pojačala, a dovoljno točno može se opisati jednadžbom aperiodske komponente drugog reda.

$$(T_1 D+1)(T_2 D+1) U_M=K_1 \varepsilon \tag{4.2}$$

gdje je:

T_1, T_2 – vremenske konstante pojačala
K_1 – koeficijent pojačanja pojačala.

Jednadžba istosmjernog motora (sl. 1.22) proizlazi iz jednadžbi ravnoteže:

$$I\frac{d\Omega}{dt}=M_m-M \tag{4.3}$$

gdje je:

I – moment inercije svih rotacijskih dijelova sveden na osovinu motora
$M_m=C_m \cdot i$ – moment motora
i – struja rotora

C_m – konstrukcijska konstanta motora
M – moment opterećenja.

Jednadžba električne ravnoteže motora je:

$$u = L\frac{di}{dt} + R_i + C_e\Omega \tag{4.4}$$

gdje je:

L, R – induktivitet i otpor armature
C_e – konstrukcijska konstanta.

Iz (4.3) i (4.4) proizlazi diferencijalna jednadžba motora:

$$(T_A T_M D^2 + T_M D + 1)\,\Omega = K_M U_M - K_2\,(T_A D + 1)\,M \tag{4.5}$$

gdje je:

$T_A = \frac{L}{R}$ – elektromagnetska vremenska konstanta motora

$T_M = \frac{JR}{C_m C_e}$ – elektromehanička vremenska konstanta motora

$K_M = \frac{1}{C_e}$ – koeficijent pojačanja motora

$K_2 = \frac{1}{R C_m C_e}$ – strmina mehaničkih karakteristika motora.

Jednadžba tahogeneratora može se opisati jednadžbom idealne derivativne komponente:

$$e = K_T\Omega \tag{4.6}$$

gdje je:

K_T – koeficijent pojačanja tahogeneratora.

Jednadžbe (4.1), (4.2), (4.5) i (4.6) čine sistem diferencijalnih jednadžbi kojima se opisuje statičko i dinamičko ponašanje razmotrenog SAR brzine vrtnje istosmjernog motora. Taj sistem sadrži četiri jednadžbe i četiri nepoznate funkcije vremena: u, e, U_m, Ω. Za rješenje sistema jednadžbi potrebno je zadati vanjske veličine $u\,(t)$ i $M\,(t)$ i početne uvjete.

U navedenom sistemu regulacije brzine vrtnje, izlazna veličina sistema je kutna brzina osovine motora $\Omega\,(t)$, vodeća veličina je napon $u\,(t)$, izvršna veličina je napon armature $U_M\,(t)$, a poremećajna veličina je moment opterećenja motora $M\,(t)$.

Iz jednadžbi (4.1), (4.2), (4.5) i (4.6), eliminiranjem veličina ε i U_M, slijedi diferencijalna jednadžba koja opisuje sistem u odnosu na izlaznu $\Omega\,(t)$ vodeću $u\,(t)$ i poremećajnu $M\,(t)$ veličinu:

$$[(T_1 D + 1)(T_2 D + 1)(T_A T_M D^2 + T_M D + 1) + K]\,\Omega = K_1 K_M u - K_2 \cdot (T_1 D + 1) \cdot (T_2 D + 1)(T_A D + 1)\,M \tag{4.7}$$

gdje je:

$K = K_1 K_M K_T$.

Analognim postupkom određuju se diferencijalne jednadžbe sistema za slučajeve da se kao izlazne veličine tretiraju varijable $\varepsilon(t)$, $e(t)$ ili $U_M(t)$.

Jednadžba sistema u odnosu na signal razlike $\varepsilon(t)$ proizlazi eliminiranjem iz sistema veličina $\Omega(t)$ i $U_M(t)$:

$$[(T_1D+1)(T_2D+1)(T_AT_MD^2+T_MD+1)+K]\,\varepsilon=$$

$$=(T_1D+1)(T_2D+1)\cdot(T_AT_MD^2+T_MD+1)\,u+K_TK_M(T_1D+1)(T_2D+1)(T_AD+1)\,M \qquad (4.8)$$

Jednadžbe sistema u odnosu na napon armature $U_M(t)$ i napon tahogeneratora $e(t)$ imaju oblik:

$$[(T_1D+1)(T_2D+1)(T_AT_MD^2+T_MD+1)+K]\,u_M=$$

$$=K_1(T_AT_MD^2+T_MD+1)\,u+K(T_AD+1)\,M \qquad (4.9)$$

$$[(T_1D+1)(T_2D+1)(T_AT_MD^2+T_MD+1)+K]\,e=$$

$$=Ku-K_TK_M(T_1D+1)(T_2D+1)\cdot(T_AD+1)\,M \qquad (4.10)$$

Iz jednadžbi (4.7 – 4.9) vidljivo je da razmatrani SAR sadrži na lijevoj strani uvijek isti izraz:

$$c(D)=(T_1D+1)(T_2D+1)(T_AT_MD^2+T_MD+1)+K=c_4D^4+c_3D^3+c_2D^2+c_1D+c_0 \qquad (4.11)$$

gdje je: $c_4=T_1T_2T_AT_M$; $c_3=T_MT_1T_2+T_MT_AT_1+T_MT_AT_2$

$c_2=T_1T_2+T_MT_1+T_MT_2+T_MT_A$; $c_1=T_1+T_2+T_M$; $c_0=1+K$.

Zamjenom u (4.11) operatora $D=\frac{d}{dt}$ sa Laplaceovim operatorom „s", analogno izrazima (2.64) i (2.65) dobije se *karakteristični polinom zatvorenog sistema*:

$$c(s)=c_4s^4+c_3s^3+c_2s^2+c_1s+c_0 \qquad (4.12)$$

Izjednačenjem karakterističnog polinoma (4.12) s nulom, tj.:

$$c(s)=0 \qquad (4.13)$$

dobije se *karakteristična jednadžba zatvorenog sistema.*

Za analizu razmatranog SAR brzine vrtnje u režimu stabilizacije, vodeća veličina $U(t)=U^\circ=const$, tj. otklon od nominalnog iznosa $u=u(t)-U^\circ=0$, pa jednadžbe sistema (4.7 – 4.10) poprimaju jednostavniji oblik. Na primjer, jednadžba (4.7) poprima oblik:

$$c(D)\,\Omega=-K_2(T_1D+1)(T_2D+1)(T_AD+1)\,M \qquad (4.14)$$

Statički režimi razmotrenog SAR određuju se statičkim jednadžbama sistema koji proizlaze iz dinamičkih jednadžbi (4.7 – 4.10) uvrštenjem $D\equiv 0$, tj. u statičkom režimu sve su veličine sistema konstantne, odnosno derivacije svih varijabli su jednake nuli. Na primjer, uvrštanjem u (4.7) $u=0$ i $D=0$, proizlazi jednadžba statičkog režima rada razmotrenog SAR stabilizacije brzine vrtnje:

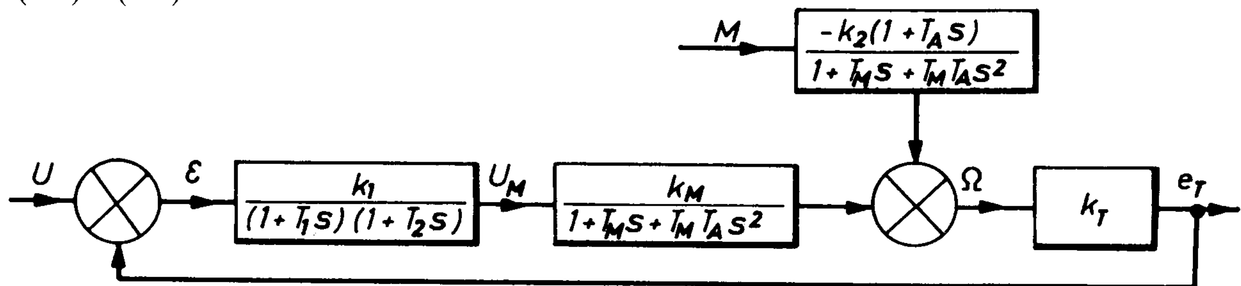
$$\Omega^\circ=\frac{K_M}{1+K}M^\circ \qquad (4.15)$$

4.2. Prijenosne funkcije i strukturne sheme SAR

Određivanje diferencijalnih jednadžbi SAR može se vršiti strukturnim shemama SAR primjenom prijenosnih funkcija elementarnih dinamičkih komponenenata.

Strukturna shema sistema pokazuje od kakvih se komponenata sastoji SAR i kako su komponente međusobno povezane, tj. strukturne sheme predstavljaju grafički prikaz diferencijalnih jednadžbi razmotrenog SAR. Primjenom jednadžbi (2.75), (2.76), (2.83) i (2.84), moguće je relativno jednostavnim matematičkim postupcima odrediti strukturnu shemu sistema.

Na sl. 4.1. prikazana je strukturna shema SAR brzine vrtnje, određenog funkcionalnom shemom (sl. 1.22) i jednadžbama dinamičkih komponenata (4.1)–(4.4).



Slika 4.1.

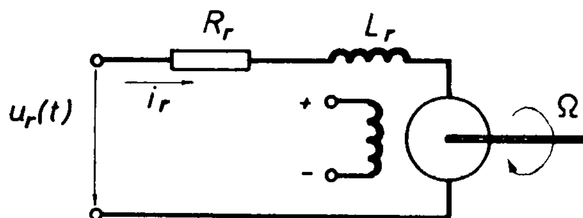
Općenito određivanje strukturne sheme SAR prikladno je izvršiti sljedećim redoslijedom:

1. sistem diferencijalnih jednadžbi SAR zapisuje se u operatorskom obliku,
2. za svaku jednadžbu sistema određuju se ulazne i izlazne veličine,
3. svaka jednadžba rješava se u odnosu na najvišu derivaciju izlazne veličine,
4. određuju se grafički prikazi jednadžbi sistema dobivenih pod toč. 3,
5. određuje se opća strukturna shema, kao cjelokupnost grafičkih prikaza svake jednadžbe

Postupak pri određivanju strukturne sheme sistema ilustrira se u sljedećem primjeru:

Primjer 4.1.

Potrebno je odrediti strukturnu shemu istosmjernog elektromotora s nezavisnom uzbudom (sl. 4.2).



Slika 4.2.

Sistem linearnih diferencijalnih jednadžbi motora (sl. 4.2), određen je jednadžbama:

$$U_r(t) = C_e\Omega(t) + i_r(t) R_r + L_r \frac{di_r}{dt} \tag{4.16}$$

$$M(t) = M_c(t) + F_e\Omega(t) + I\frac{d\Omega(t)}{dt} \tag{4.17}$$

$$M(t) = C_M i_r(t) \tag{4.18}$$

I – struja rotora

gdje je:

$U_r(t)$ – napon armature
$i_r(t)$ – struja armature
R_r, L_r – otpor i induktivitet kruga
$\Omega(t)$ – brzina vrtnje motora
$M(t)$ – moment vrtnje motora
$M_c(t)$ – moment otpora zbog suhog trenja
F_e – koeficijent viskoznog trenja
I – moment inercije rotacijskih masa
C_e, C_M – koeficijenti elektromotorne sile i momenta motora.

Pri određivanju strukturne sheme prema izloženom redoslijedu, bit će:

1. Sistem diferencijalnih jednadžbi (4.16 – 4.18) primjenom Laplaceove transformacije svodi se na sistem algebarskih jednadžbi:

$$U_r(s) = C_e\Omega(s) + I_r(s)\,R_r + sL_rI_r(s) \quad (4.19)$$

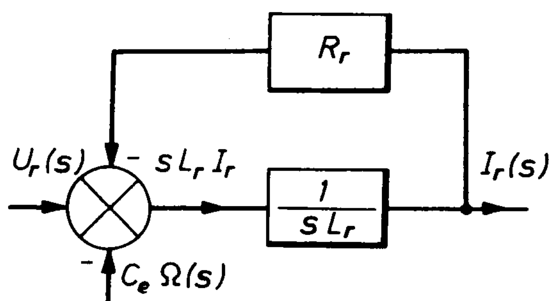
$$C_MI_r(s) = M_c(s) + F_e\Omega(s) + sJ\Omega(s) \quad (4.20)$$

2. Ulazna veličina jednadžbi (4.19) je napon rotorskog kruga $U_r(s)$, a izlazna veličina je struja rotora $I_r(s)$. Ulazna veličina jednadžbe 4.20, je struja rotora $I_r(s)$, a izlazna veličina je brzina vrtnje rotora $\Omega(s)$.
3. Rješenje jednadžbi (4.19) i (4.20) u odnosu na izlazne veličine:

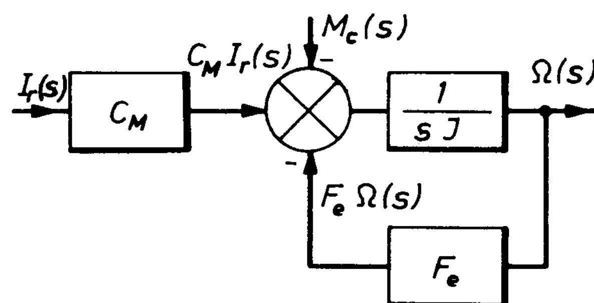
$$sL_rI_r(s) = U_r(s) - C_e\Omega(s) - I_r(s)\,R_r \quad (4.21)$$

$$sI\Omega(s) = C_MI_r(s) - M_c(s) - F_e\Omega(s) \quad (4.22)$$

4. Određuju se grafički prikazi jednadžbi (4.21) sl. 4.3. i (4.22) sl. 4.4.

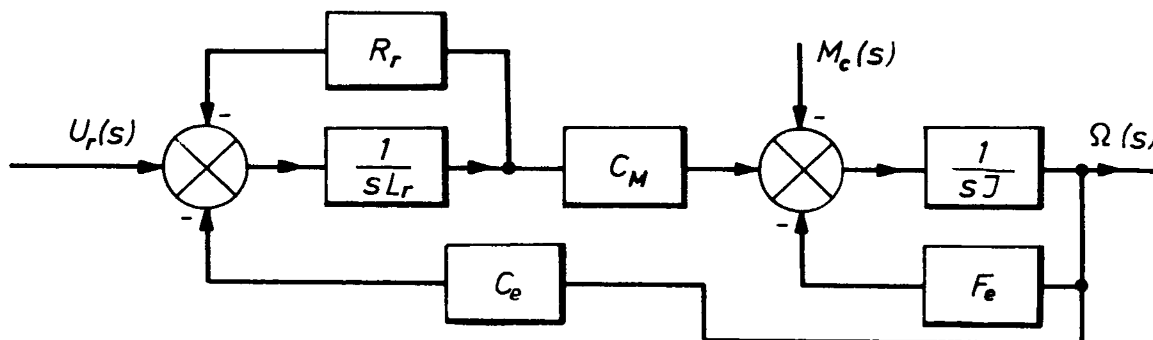


Slika 4.3.



Slika 4.4.

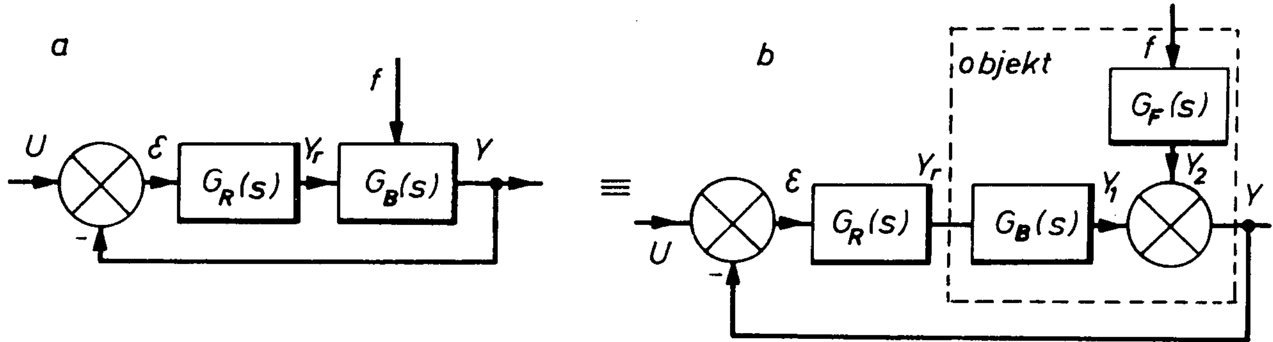
5. Spajanjem strukturnih shema (sl. 4.3. i sl. 4.4) slijedi strukturna shema motora (sl. 4.5) u odnosu na koordinate $\Omega(s)$ i $Ur(s)$.



Slika 4.5.

S obzirom da strukturna shema SAR predstavlja grafički prikaz jednadžbi sistema, to se općenito ne mora uvijek dobiti identično rješenje, ali provođenjem odgovarajućih transformacija strukturnih shema može se pokazati da su sva rješenja međusobno ekvivalentna.

Većinom se diferencijalne jednadžbe SAR sastoje iz diferencijalnih jednadžbi automatskog regulatora i diferencijalnih jednadžbi objekta regulacije. U primjeru 1.13, jednadžbom (4.5) opisan je objekt regulacije, a jednadžbama (4.1), (4.2) i (4.6) opisan je automatski regulator. Strukturna shema SAR brzine vrtnje (sl. 4.1) može se prikazati povezivanjem strukturnih shema regulatora i objekta regulacije (sl. 4.6.a, b).



Slika 4.6.

Prijenosne funkcije dinamičkih komponenata SAR brzine vrtnje istosmjernog motora, prema strukturnoj shemi (sl. 4.6), slijede iz jednadžbi (4.1 – 4.4) a određene su izrazima:

$$G_R(s)=\frac{K_A}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$
$$G_B(s)=\frac{K_o K_T}{T_A T_M s^2+T_M s+1} \tag{4.23}$$

$$G_F(s)=\frac{-K_T K_M(1+T_M s)}{T_A T_M s^2+T_M s+1} \tag{4.24}$$

Pri određivanju strukturne sheme SAR u obliku sl. 4.6, vrlo često se detektor tretira s objektom regulacije, a preostali se funkcionalni elementi uključuju u sastav automatskog regulatora. U razmotrenom primjeru SAR brzine vrtnje, detektor (tahogenerator) je uključen u prijenosne funkcije objekta regulacije (4.23. i 4.24).

U općem slučaju prijenosne funkcije $G_R(s)$, $G_B(s)$ i $G_F(s)$ racionalne su funkcije kompleksne varijable s:

$$G_R(s)=\frac{b_r(s)}{c_r(s)} \tag{4.25}$$

$$G_B(s)=\frac{b_b(s)}{c_b(s)} \tag{4.26}$$

$$G_F(s)=\frac{b_f(s)}{c_f(s)} \tag{4.27}$$

Na osnovi strukturne sheme (sl. 4.6) i postupka izloženih u drugom poglavlju, točka 2.1, proizlazi:

$$E(s)=U(s)-Y(s) \tag{4.28}$$

$$Y_r(s)=G_R(s)E(s) \tag{4.29}$$

$$Y_1(s)=G_B(s)U(s) \tag{4.30}$$

$$Y_2(s)=G_F(s)F(s) \tag{4.31}$$

$$Y(s)=Y_1(s)+Y_2(s) \tag{4.32}$$

Iz sistema jednadžbi (4.28 – 4.32) proizlazi:

$$Y(s)=\frac{G_O(s)U(s)+G_F(s)F(s)}{1+G_O(s)} \tag{4.33}$$

gdje je:

$$G_O(s)=\frac{Y(s)}{E(s)}=G_R(s)G_B(s) \tag{4.34}$$

Funkcija $G_O(s)$ određena jednadžbom (4.34) ima naziv *prijenosna funkcija otvorenog SAR*, a definira se kao odnos L-transformacija izlazne veličine i signala razlike pri uvjetima:

$$Y^{(j)}(0)=E^{(i)}(0)=f_i(t)=0; \qquad (i=0, 1, 2, \dots, n)$$

Iz (4.33) proizlazi:

$$G_z(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{G_O(s)}{1+G_O(s)} \tag{4.35}$$

$$G_{zf}(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{G_F(s)}{1+G_O(s)} \tag{4.36}$$

Funkcija $G_Z(s)$ određena jednadžbom (4.35) ima naziv *prijenosna funkcija zatvorenog SAR*, ili *glavni operator sistema*, a definira se kao odnos L-transformacija izlazne i vodeće veličine pri uvjetima:

$$Y^{(i)}(0)=U^{(i)}(0)=f_i(t)=0; \qquad i=(0, 1, 2, \dots, n) \tag{4.37}$$

Funkcija $G_{zf}(s)$ određena jednadžbom (4.36) ima naziv *prijenosna funkcija zatvorenog SAR u odnosu na poremećajnu veličinu*, a definira se kao odnos L-transformacija izlazne i poremećajne veličine pri uvjetima:

$$Y^{(i)}(0)=f^{(i)}(0)=u(t)=0 \tag{4.38}$$

Iz (4.35) i (4.36) slijedi:

$$Y(s)=Y_u(s)+Y_f(s)=G_z(s)U(s)+G_{zf}(s)F(s) \tag{4.39}$$

Pri djelovanju na sistem više poremećajnih veličina, jednadžba (4.39) poprima oblik:

$$Y(s)=G_z(s)U(s)+\sum_{i=1}^{n} G_{zfi}(s)F_i(s) \tag{4.40}$$

Pri određivanju dinamičkog ponašanja signala razlike SAR $\varepsilon(t)$, iz sistema jednadžbi (4.28 – 4.32) određuju se sljedeće funkcije:

$$G_e(s)=\frac{E(s)}{U(s)}=\frac{1}{1+G_O(s)}=1-G_z(s) \tag{4.41}$$

$$G_{ef}(s)=\frac{E(s)}{F(s)}=-\frac{G_F(s)}{1+G_O(s)}=-G_{zf}(s) \tag{4.42}$$

Funkcije (4.41 – 4.42) imaju naziv *prijenosna funkcija signala razlike u odnosu na vodeću veličinu* $G_e(s)$ i *prijenosna funkcija signala razlike u odnosu na poremećajnu veličinu* $G_{ef}(s)$.

Primjenom principa superpozicije iz (4.41) i (4.42) proizlazi:

$$E(s)=G_e(s)\,U(s)+\sum_i^n G_{efi}(s)\,F_i(s) \tag{4.43}$$

Iz (4.43) vidljivo je da signal razlike $E(s)$ sadrži dvije komponente:

$$E(s)=E_u(s)+E_f(s) \tag{4.44}$$

gdje je:

$$E_u(s)=G_e(s)\,U(s) \tag{4.45}$$

$$E_f(s)=\sum_i^n G_{ef_i}(s)\,F_i(s) \tag{4.46}$$

Primjenom inverzne L-transformacije na (4.44) proizlazi:

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_u(t)+\varepsilon_f(t)=\varepsilon_u(t)-y_f(t) \tag{4.47}$$

gdje je:

$\varepsilon_u(t)$ – komponenta signala razlike nastala zbog djelovanja vodeće veličine $u(t)$,

$\varepsilon_f(t)$ – komponenta signala razlike nastala zbog djelovanja poremećajnih veličina,

$y_f(t)$ – komponenta izlazne veličine $y(t)$ koja nastaje zbog djelovanja poremećajnih veličina $f_i(t)$.

Izraz $a(s)=1+G_O(s)$ u nazivniku prijenosnih funkcija zatvorenog sistema (4.35, 4.36, 4.41, 4.42) ima naziv *karakteristični polinom zatvorenog sistema*, a jednadžba

$$a(s)=1+G_O(s)=0 \tag{4.48}$$

ima naziv *karakteristična jednadžba zatvorenog sistema*.

Prijenosne funkcije (4.35, 4.36, 4.41. i 4.42) SAR brzine vrtnje elektromotora proizlaze iz stukturne sheme (sl. 4.1):

$$G_O(s)=\frac{E_T(s)}{E(s)}=G_R(s)\cdot G_B(s)=\frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_Ms+T_AT_Ms^2)} \tag{4.49}$$

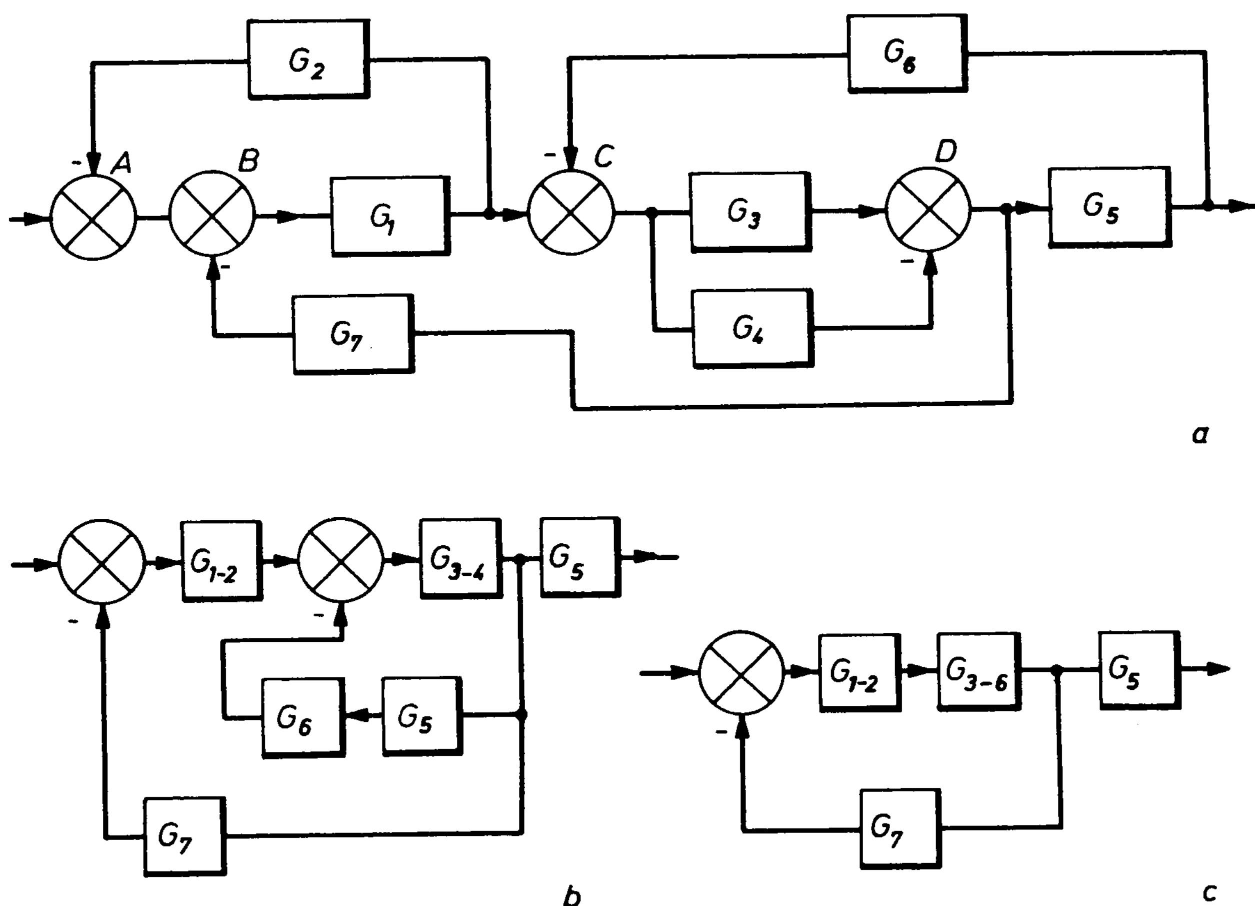
$$G_z(s)=\frac{E_T(s)}{U(s)}=\frac{G_O(s)}{1+G_O(s)}=\frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_Ms+T_AT_Ms^2)+K} \tag{4.50}$$

$$G_{zf}(s)=\frac{E_T(s)}{M(s)}=\frac{G_f(s)}{1+G_O(s)}=\frac{K_TK_2(1+T_Ms)(1+T_1s)(1+T_2s)}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_Ms+T_AT_Ms^2)+K} \tag{4.51}$$

$$G_e(s)=\frac{E(s)}{U(s)}=\frac{1}{1+G_O(s)}=\frac{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_Ms+T_AT_Ms^2)}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_Ms+T_AT_Ms^2)+K} \quad (4.52)$$

$$G_{ef}(s)=\frac{E(s)}{F(s)}=-G_{zf}(s)=-\frac{K_TK(1+T_As)(1+T_1s)(1+T_2s)}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_Ms+T_AT_Ms^2)+K} \quad (4.53)$$

Različite strukturne sheme mogu međusobno općenito biti dinamički ekvivalentne, tj. mogu biti opisane jednakim prijenosnim funkcijama. Primjenom principa superpozicije i dinamičke ekvivalentnosti, razrađena su pravila transformiranja strukturnih shema. Na primjeru (sl. 4.7) prikazan je mogući postupak pojednostavnjenja složenije strukturne sheme. Pojednostavnjenje strukturnih shema vrši se primjenom jednadžbi (2.75), (2.77), (2.83), (sl. 2.10–2.12) i pravila koja slijede iz razmatranja algebarskih jednadžbi kojima se opisuju različite strukturne sheme (prilog IV).



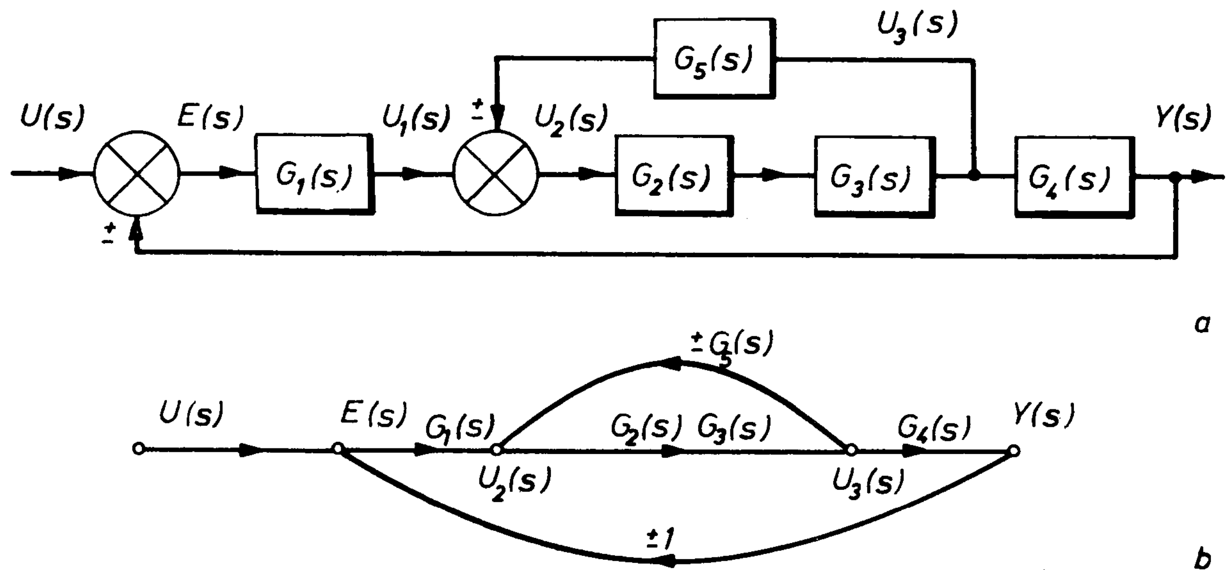
Slika 4.7.

$$G_{1-2}=\frac{G_1}{1+G_1G_2}; \qquad G_{3-4}=G_3+G_4; \qquad G_{3-6}=\frac{G_3+G_4}{1+(G_3+G_4)\,G_5G_6}.$$

Analogno primjeni strukturnih shema u SAR primjenjuje se i topološka struktura sistema – *grafikon toka signala* (*GTS*) (sl. 4.8.b). Matematske ovisnosti u SAR prikazuju se pomoću GTS skupom čvorova i grana kojima se pridružuju varijable i prijenosne funkcije.

Svaka grana GTS sadrži dva čvora: *izvorni čvor* (*izvor*) i *završni čvor* (*ponor*).

Između GTS i strukturnih shema postoji sljedeća analogija: Pravokutnik u strukturnoj shemi odgovara grani GTS, a linija prijenosa signala odgovara čvorovima (sl. 4.8.a, b).



Slika 4.8.

Ekvivalentnost grafičkih prikaza SAR (sl. 4.8.a i sl. 4.8.b) proizlazi iz osnovnih svojstava grafikona toka signala:

1. Svaki čvor grafikona toka signala odgovara koordinati (varijabli) razmatranog SAR.
2. Svaka grana GTS prikazuje smjer toka signala (informacije ili energije) i sadrži izvorni čvor (ulaznu veličinu) i završni čvor (izlaznu veličinu).
3. Izlazna veličina grane GTS jednaka je umnošku ulazne veličine i operatora grane u Laplaceovu području.
4. Pravila transformiranja GTS su analogna pravilima transformiranja strukturnih shema (prilog IV).

5

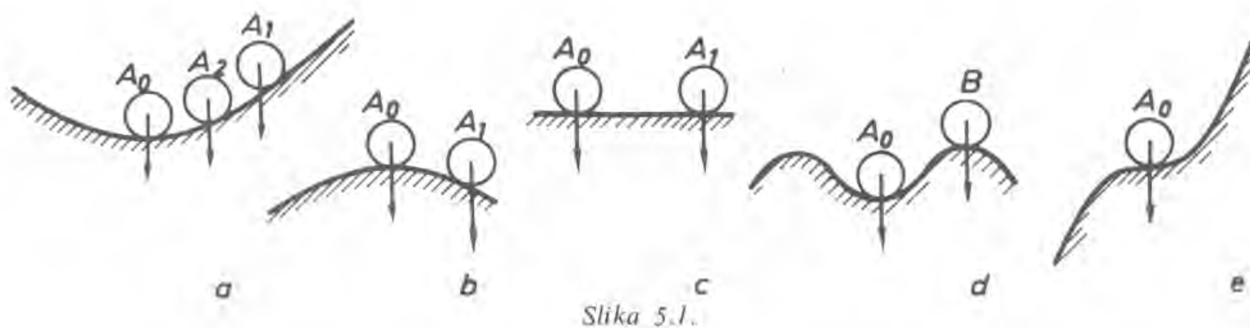
STABILNOST SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

5.1. Pojam stabilnosti

Na bilo koji sistem automatskog upravljanja uvijek djeluju različite poremećajne veličine, općenito slučajnog karaktera, koje mogu narušiti namjensko funkcioniranje sistema. Pravilno projektirani sistem treba namjenski funkcionirati, tj. stabilno raditi neovisno o djelovanju vanjskih smetnji.

Općenito se pojam stabilnosti sistema može povezati s njegovom sposobnošću da se (s određenom točnošću), nakon prestanka djelovanja vanjskih sila, vraća u početno ravnotežno stanje. Analogno, nestabilan sistem će se nakon prestanka djelovanja vanjskih sila sve više udaljavati od početnog ravnotežnog stanja ili će oko njega oscilirati nedopustivo velikim amplitudama.

Stabilnost ravnotežnog stanja sistema ilustrira sl. 5.1. Položaj ravnoteže kuglice karakterizira se točkom A_0.



Slika 5.1.

Na sl. 5.1.a prikazano je *stabilno* ravnotežno stanje. Naime, kuglica pomaknuta iz ravnotežnog stanja A_0 ponovno se vraća u točku A_0 (pri zanemarenju sila trenja) ili u neku konačnu oblast oko ravnotežnog stanja A_0, na primjer u točku A_2 (pri djelovanju sila trenja). Na sl. 5.1.b prikazano je *nestabilno* ravnotežno stanje, a na sl. 5.1.c sa stajališta stabilnosti prikazano je *neodređeno* ravnotežno stanje. Na sl. 5.1.d ravnotežno stanje stabilno je sve dotle dok je pomak kuglice manji od nekog graničnog iznosa, određenog npr. točkom B. Ako je pomak veći od graničnog iznosa, kuglica se neće vratiti u početno stanje A_0, već će se gibati desno od točke B, ovisno o obliku površine odnosno o jednadžbama gibanja.

Suvremeni postupci određivanja stabilnosti SAU bazirani su na formulaciji pojma stabilnosti koju je dao *A. M. Ljapunov 1892. godine*. Sa stajališta teorije stabilnosti tretiraju se *autonomni* i *neautonomni* sistemi.

Pod *autonomnim SAU* razumijevaju se sistemi koji nisu podvrgnuti djelovanjima vanjskih veličina. U autonomne sisteme mogu se uvrstiti i kontinuirani linearni sistemi podvrgnuti djelovanjima konstantnih vanjskih veličina.

Pod *neautonomnim SAU* razumijevaju se sistemi koji su podvrgnuti djelovanjima vremenski ovisnih vanjskih veličina. U neautonomne sisteme mogu se uvrstiti npr. impulsni sistemi kod kojih vanjska djelovanja uzrokuju periodičko zatvaranje sistema.

Za autonomne sisteme postoje dva različita pojma stabilnosti: stabilnost ravnoteže i stabilnost vlastitih oscilacija.

Za neautonomne sisteme postoji pojam stabilnosti procesa nastalog zbog vanjskog djelovanja na sistem.

Nastojanja da se u analizi stabilnosti nelinearnih sistema primijene postupci analize linearnih sistema dovelo je do uvođenja pojmova: *poremećajno stanje sistema* i *neporemećajno stanje sistema*. Poremećajno stanje sistema odgovara parcijalnom rješenju sistema, a neporemećajnom stanju odgovara skup mogućih općih rješenja.

Općenito pod *neporemećajnim stanjem sistema* razumijeva se jedno od mogućih rješenja uvjetovano određenim početnim uvjetima i zadanim vanjskim djelovanjima. Svako drugo stanje sistema ima naziv *poremećajno stanje*. Može se smatrati da se bilo koje poremećajno stanje dobije kao posljedica kratkotrajnog vanjskog djelovanja na sistem u $t=0$.

Određivanje stabilnosti matematičkog modela SAU prikladno je vršiti analizom dinamičkog stanja sistema prikazanog u faznom prostoru vektorom $\underline{x}=\{x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n\}$.

U skladu s terminologijom A. M. Ljapunova, *neporemećajno stanje* sistema može se prikazati vektorskom funkcijom $\underline{x}_r(t)$. Analogno, bilo koje *poremećajno stanje* sistema može se opisati vektorskom funkcijom $\underline{x}(t)$. Određivanje stabilnosti sistema vrši se provođenjem analize dinamičkog ponašanja *varijacija* procesa, kojima su prikazane razlike između neporemećajnog (ravnotežnog) i poremećajnog stanja sistema. Varijacije procesa u faznom se prostoru opisuju jednadžbama oblika:

$$\underline{w}(t)=\underline{x}(t)-\underline{x}_r(t) \tag{5.1}$$

odnosno:

$$w_i(t)=x_i(t)-x_{r_i}(t) \qquad i=1, 2, \ldots, n \tag{5.2}$$

Ako se sa $S(\varepsilon)$ označi oblast dopuštenih otklona poremećajnog stanja sistema x_i od neporemećajnog stanja $x_{ri}=0$, a sa $S(\delta)$ područje početnih uvjeta, to se pojam stabilnosti po A. M. Ljapunovu može interpretirati na sljedeći način:

Neporemećajno stanje sistema je stabilno, ako za po volji mali broj $\varepsilon>0$, postoji *pozitivan broj* $\delta=\delta(\varepsilon)$, *takav da iz nejednadžbe*

$$|w_i(t_o)|<\delta \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{5.3}$$

za $(t_o<t<\infty)$, *proizlazi nejednadžba*

$$|\mathrm{w}_i(\mathrm{t})|<\varepsilon \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{5.4}$$

Pojam stabilnosti formuliran prema (5.3) i (5.4) može se interpretirati grafičkim prikazom u faznoj ravnini (sl. 5.2).

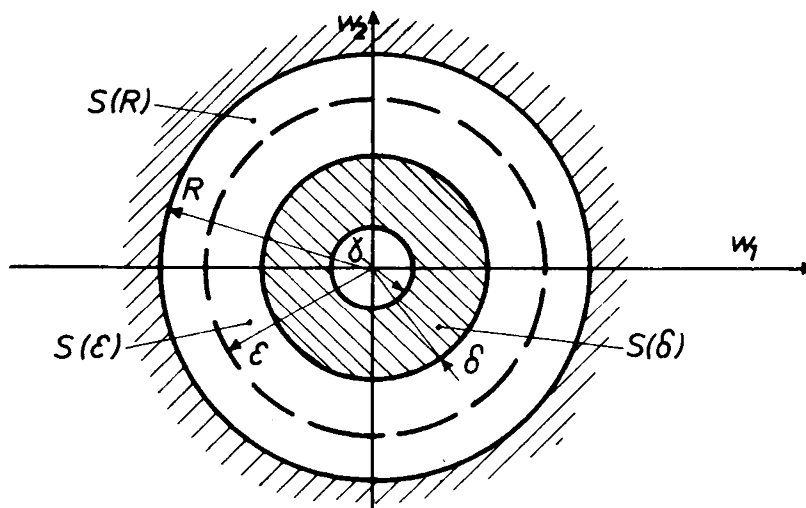
Na grafičkom prikazu (sl. 5.2) prikazane su tri oblasti. $S(\varepsilon)$ oblast dopuštenih iznosa varijacija w_i od točke $w_i=0$; oblast početnih uvjeta $S(\delta)$ koja se nalazi unutar oblasti $S(\varepsilon)$ i oblast stacionarnih iznosa razlika između poremećajnog i neporemećajnog stanja $S(\gamma)$. Za $t\rightarrow\infty$

$$w_{st}\in\gamma \tag{5.5}$$

Područje $S(\gamma)$ ovisi o oblasti početnih uvjeta $S(\delta)$. Sa stajališta stabilnosti važna su dva posebna slučaja. U slučaju kada je $\gamma=0$, tj.

$$\lim_{t\to\infty} w_i(t)=0. \tag{5.6}$$

razmatrani sistem je *asimptotski stabilan*. Ako je za zadovoljavanje uvjeta (5.6) potrebno da oblast početnih otklona $S(\delta)$ bude dovoljno malena, razmatrani sistem je *asimptotski stabilan u malom*. U slučajevima kada oblast $S(\delta)$ ima konačne



Slika 5.2.

dimenzije, sistem je *asimptotski stabilan u velikom*. Kada se uvjet (5.6) ispunjava pri odabranom velikom području početnih otklona $S(\delta)$ sistem je *asimptotski stabilan u cijelom*. Stabilnost „*u cijelom*“ za određenu klasu nelinearnih sistema ima naziv „*apsolutna*“ stabilnost. U slučajevima kada uvjet (5.6) nije ispunjen, tj. kada postoji područje $\gamma>0$ SAU je *neasimptotski* stabilan.

Navedeni pojmovi stabilnosti mogu se interpretirati prikazom na sl. 5.1. Tako, na primjer, sl. 5.1.a odgovara stabilnosti „*u cijelom*“, a slučaj na sl. 5.1.d može odgovarati pojmovima stabilnosti „*u malom*“ ili „*u velikom*“ ovisno o iznosu početnog otklona kuglice. Očigledno je da sistem stabilan „*u cijelom*“ uključuje i stabilnost „*u malom*“ i „*u velikom*“. Sistem će biti *neasimptotski* stabilan za slučaj da se kuglica zbog djelovanja sila trenja sl. 5.1.a ne vraća u početni položaj A_0 već u položaj A_2, tj. u područje stacionarnih iznosa γ.

A. M. Ljapunov izložio je dva postupka određivanja stabilnosti sistema: određivanje stabilnosti *prvom metodom Ljapunova* i *direktnom metodom Ljapunova*. Prvi postupak temelji se na linearizaciji nelinearne diferencijalne jednadžbe i na određivanju općeg i parcijalnog rješenja. Linearizacija se obično provodi razlaganjem nelinearne funkcije u Taylorov red i zanemarivanjem članova višeg reda.

Neka je jednadžba (5.2) rješenje sistema nelinearnih diferencijalnih jednadžbi:

$$\frac{dw_i}{dt}=a_{i1}\eta_1+a_{i2}w_2+\ldots+a_{in}w_n+\psi_i(w_1, w_2, \ldots w_i) \tag{5.7}$$

Iz (5.7) zanemarenjem nelinearnih članova proizlazi sistem linearnih diferencijalnih jednadžbi sistema:

$$\frac{dw_i}{dt}=a_{i1}w_1+a_{i2}w_2+\ldots+a_{in}w_n \quad (i=1, 2, \ldots n) \tag{5.8}$$

Karakteristična jednadžba sistema (5.8) je:

$$C(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots a_{2n} \\ \hdashline a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad (5.9)$$

Korijeni izraza (5.9) općenito imaju oblik

$$\lambda_i=\sigma+j\omega \quad (5.10)$$

Za određivanje dovoljnih uvjeta stabilnosti sistema po lineariziranim jednadžbama važni su sljedeći teoremi A. M. Ljapunova:

Teorem 1. *Ako su realni dijelovi svih korijena* λ_i *karakteristične jednadžbe* (5.9) *negativni, neporemećajno stanje sistema asimptotski je stabilno.*

Teorem 2. *Ako među korijenima* λ_i *karakteristične jednadžbe* (5.9) *ima jedan ili više korijena s pozitivnim realnim dijelom, neporemećajno stanje sistema je nestabilno.*

U slučaju kada među korijenima karakteristične jednadžbe postoji jedan ili više nultih korijena, a realni dijelovi preostalih korijena su negativni, nije moguće ocijeniti stabilnost sistema analizom linearnog modela sistema. Naime, u navedenom slučaju koji se još naziva *kritičnim* slučajem, stabilnost sistema ovisi i o obliku nelinearnosti ψ_i (w_1, w_2,...w_i) izraza (5.7). ψ se u kritičnom slučaju stabilnosti sistema određuje analizom realnog matematičkog modela sistema (5.7).

5.2. Uvjeti stabilnosti linearnih sistema automatskog upravljanja

Na osnovi izloženog pojma stabilnosti po A. M. Ljapunovu, moguće je odrediti dovoljne uvjete stabilnosti linearnih (lineariziranih) sistema automatskog upravljanja.

Diferencijalna jednadžba linearnog SAU prema (2.10), za $\Delta u(t)=u(t)$; $\Delta y(t)=y(t)$ i $\Delta f(t)=0$ ima oblik:

$$(a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\dots+a_0)\,y(t)=(b_mD^m+b_{m-1}D^{m-1}+\dots+b_0)\,u(t) \quad (5.11)$$

gdje je $a_i=C_i$ $(i=0, 1, 2, \dots n)$

Promjena regulirane veličine $y(t)$ određena je rješenjem jednadžbe (5.11)

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t) \quad (5.12)$$

gdje je:

$y_1(t)$ – komponenta stacionarnog rješenja koja se dobije kao parcijalno rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe (5.11) (prinudni odziv).

$$(a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\dots+a_0)\,y_1(t)=(b_mD^m+b_{m-1}D^{m-1}+\dots+b_0)\,u(t)$$

$y_2(t)$ – komponenta prijelaznog procesa koja je određena općim rješenjem homogene diferencijalne jednadžbe, tj. rješenjem jednadžbe (5.11) za $u(t)=0$ (slobodni odziv).

$$(a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\dots+a_0)\,y_2(t)=0 \quad (5.13)$$

U teoriji automatskog upravljanja određuje se stabilnost prinudne komponente prijelaznog procesa $y_1(t)$, koju u skladu s terminologijom Ljapunova treba tretirati kao neporemećajno stanje sistema. Kao poremećajno stanje sistema treba tretirati bilo koju moguću promjenu regulirane veličine $y(t)$. Otklon ili varijacija procesa određena je komponentom $y_2(t)=y(t)-y_1(t)$.

Pod poremećajima u SAU razumijevaju se početni iznosi $y_2(t)$ koji su nastali u $t=t_0$ kao posljedica trenutnog djelovanja dopunskih vanjskih sila. Diferencijalne jednadžbe poremećajnog stanja u navedenom slučaju određene su izrazom (5.13).

U skladu s određivanjem stabilnosti po A. M. Ljapunovu, *sistem će biti asimptotski stabilan* ako je u skladu s (5.6) zadovoljen uvjet:

$$\lim_{t\to\infty} y_2(t)=0 \tag{5.14}$$

Opće rješenje izraza (5.13) ima oblik:

$$y_2(t)=Ce^{s_i t} \tag{5.15}$$

gdje je:

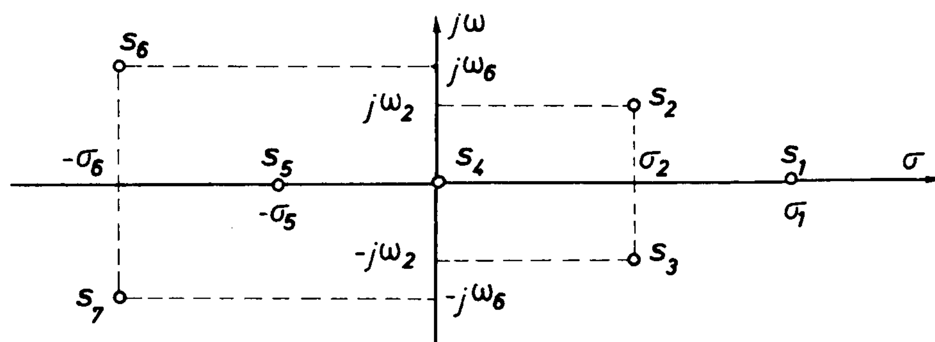
s_i – korijeni karakteristične jednadžbe sistema:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \tag{5.16}$$

Korijeni karakteristične jednadžbe – linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima, u općem slučaju imaju oblik:

$$s_i=\sigma_i \pm j\omega_i \tag{5.17}$$

Na slici 5.3. prikazani su mogući položaji korijena karakteristične jednadžbe u kompleksnoj ravnini $s=\sigma+j\omega$.



Slika 5.3.

Obično se korijeni s negativnim realnim dijelom nazivaju *lijevim* jer su u kompleksnoj ravnini razmješteni lijevo od imaginarne osi, analogno korijeni s pozitivnim realnim dijelom nazivaju se *desnim* korijenima.

Na osnovi prije izloženog, formulacija uvjeta stabilnosti linearnog sistema jest: *linearni sistem je asimptotski stabilan samo onda kada svi korijeni karakteristične jednadžbe sadrže negativne realne dijelove.*

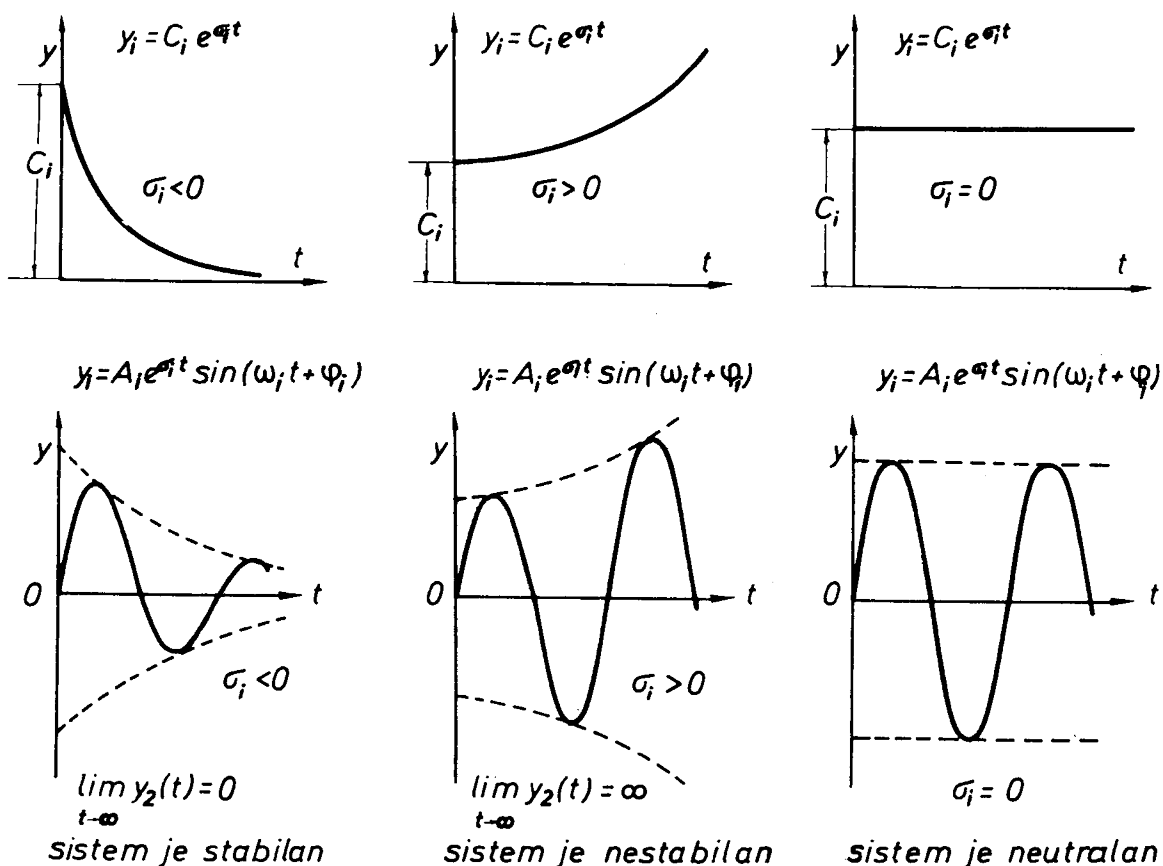
Uvjet stabilnosti linearnih SAU može se pojasniti analizom rješenja homogene diferencijalne jednadžbe (5.13). U slučaju kada karakteristična jednadžba ne sadrži dvostruke korijene, opće rješenje ima oblik:

$$y_i(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{s_i t} \tag{5.18}$$

gdje je:

s_i – korijeni karakteristične jednadžbe (5.16)
C_i – konstante integracije određene početnim uvjetima.

Analizom rješenja (5.18) proizlazi da se brzina prigušenja i oblik prijelaznog procesa određuje rješenjem diferencijalne jednadžbe sistema (5.11), dok stabilnost linearnog sistema ne ovisi o obliku desne strane diferencijalne jednadžbe (5.11) već isključivo o obliku karakteristične jednadžbe (5.16). Na sl. 5.4. grafički su ilustrirani mogući oblici rješenja (5.18).



Slika 5.4.

Pristup analizi stabilnosti linearnih regulacijskih sistema direktnim određivanjem korijena karakteristične jednadžbe nije efikasan, jer nema analitičkih izraza kojima se mogu odrediti korijeni jednadžbe višega reda. Budući da za određivanje stabilnosti nije potrebno znati iznose korijena već je nužno da svi korijeni budu smješteni lijevo od imaginarne osi kompleksne ravnine, u teoriji automatskog upravljanja koriste se *kriteriji stabilnosti* koji omogućavaju određivanje uvjeta pri kojima će svi korijeni karakteristične jednadžbe zatvorenog sistema imati negativne realne dijelove.

Postoji više kriterija stabilnosti i svi su oni matematički ekvivalentni. Praktička primjena nekog od kriterija ovisi o karakteru zadatka i raspoloživim sredstvima. Ovisno o primijenjenim matematičkim postupcima analize sistema, razlikuju se algebarski i frekvencijski kriteriji stabilnosti.

5.3. Algebarski kriteriji stabilnosti

Određivanjem algebarskih kriterija stabilnosti najprije su se bavili engleski matematičar Routh (1877) i švedski matematičar Hurwitz (1895). Ti kriteriji međusobno su povezani i ekvivalentni, pa se u literaturi često tretiraju pod nazivom Routh-Hurwitzov kriterij stabilnosti.

Hurwitzov kriterij. Karakteristična jednadžba zatvorenog sistema može se pisati u obliku:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \qquad (5.19)$$

Za analizu stabilnosti potrebno je koeficijentima karakteristične jednadžbe sastaviti determinantu Hurwitza:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & & & & & & \cdot \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdot & & & & & \cdot \\ 0 & a_n & a_{n-2} & & \cdot & & & & \cdot \\ \vdots & 0 & a_{n-1} & & & \cdot & & & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & a_2 & a_0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \qquad (5.20)$$

Pravilo sastavljanja determinante (5.20) vidljivo je iz strukture. U glavnoj dijagonali po redoslijedu se upisuje n koeficijenata jednadžbe, počevši od drugog koeficijenta (a_{n-1}). Iznad glavne dijagonale u svakom stupcu upisuju se po redu koeficijenti s opadajućim indeksima, a ispod glavne dijagonale upisuju se po redu koeficijenti s rastućim indeksima. Pri tome se na mjesto koeficijenata s indeksima većim od n ili manjim od nule upisuju nule. Tako određena determinanta Δ_n sadrži n redaka i n stupaca.

Iz tako određene determinante Δ_n određuju se glavne dijagonale subdeterminante od Δ_1 sve do Δ_n:

$$\Delta_1 = a_n - 1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \qquad (5.21)$$

Formulacija Hurwitzova kriterija stabilnosti glasi: *da linearni sistem automatske regulacije s karakterističnom jednadžbom* (5.8) *bude stabilan neophodno je i dovoljno da uz* $a_n > 0$ *sve glavne dijagonalne subdeterminante Hurwitzove determinante* (5.20) *budu pozitivne.*

U slučajevima kada je red karakteristične jednadžbe $n = (1 \div 4)$, Hurwitzov kriterij stabilnosti ima oblik:

1. $n = 1$, pri tome je

$$a_1 s + a_0 = 0 \tag{5.22}$$

uvjet stabilnosti je:

$$a_1 > 0; \qquad \Delta_1 = a_1 > 0 \tag{5.23}$$

2. $n = 2$;

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \tag{5.24}$$

uvjet stabilnosti jesu:

$$\begin{gathered} a_2 > 0 \\ \Delta_1 = a_1 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_0 > 0 \end{gathered} \tag{5.25}$$

odnosno uvjeti stabilnosti jesu:

$$a_2 > 0; \qquad a_1 > 0; \qquad a_0 > 0 \tag{5.26}$$

3. $n = 3$;

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \tag{5.27}$$

uvjeti stabilnosti jesu:

$$\begin{gathered} a_3 > 0; \qquad \Delta_1 = a_2 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1 \quad a_3 a_0 > 0 \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \Delta_2 > 0 \end{gathered} \tag{5.28}$$

4. $n = 4$;

$$a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \tag{5.29}$$

uvjeti stabilnosti jesu:

$$a_4 > 0; \qquad \Delta_1 = a_3 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 a_2 - a_4 a_1 > 0$$

$$
\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a & a_1 \end{vmatrix} = a_1\,(a_3 a_2 - a_4 a_1) - a_3^2 a_0 > 0 \qquad (5.30)
$$

$$
\Delta_4 = a_0 \Delta_3 > 0
$$

odnosno:

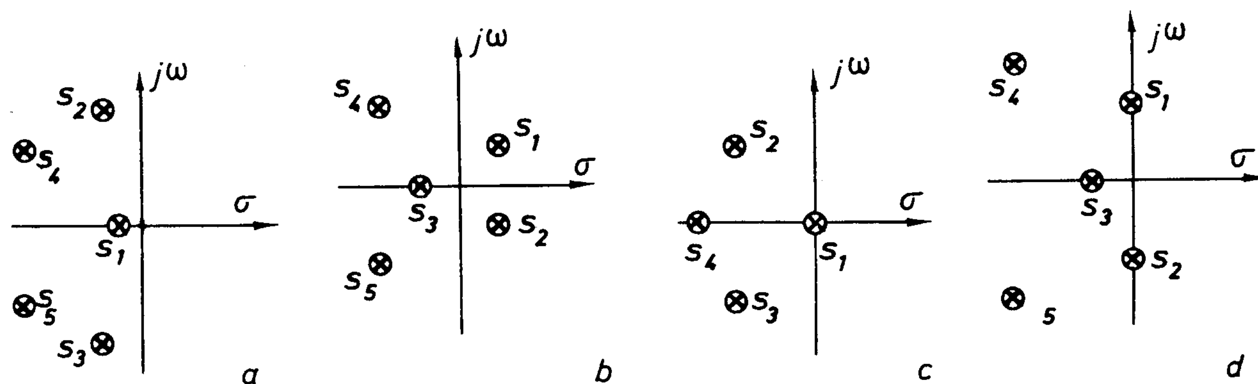
$$
\begin{gathered} a_4 > 0; \quad a_3 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_0 > 0 \\ a_1\,(a_3 a_2 - a_4 a_1) - a_3^2 a_0 > 0 \end{gathered} \qquad (5.31)
$$

Iz izloženog je vidljivo da je za sisteme prvog i drugog reda uvjet stabilnosti zadovoljen ako su svi koeficijenti karakteristične jednadžbe pozitivni.

Za sisteme trećeg i četvrtog reda uvjeti stabilnosti bit će zadovoljeni ako su svi koeficijenti karakteristične jednadžbe veći od nule i ako je $\Delta_{n-1} > 0$.

Primjena ovog kriterija za sisteme $n \geq 5$ nije prikladna, jer se znatno povećava broj dopunskih nejednadžbi.

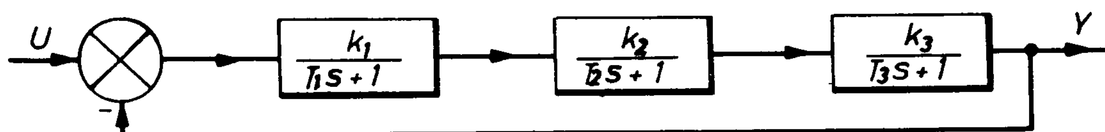
Analizom Hurwitzova kriterija također se može pokazati da karakteristična jednadžba sistema kod koje je $\Delta_n = 0$, (a svi drugi Hurwitzovi uvjeti su zadovoljeni) sadrži par imaginarnih korijena, pa se sistem nalazi na *rubu stabilnosti* (rub oscilatorne stabilnosti). U slučaju kada su svi Hurwitzovi uvjeti ispunjeni osim $a_0 = 0$, tj. karakteristična jednadžba ima jedan nulti korijen, sistem se također nalazi na rubu stabilnosti (rub aperiodske stabilnosti). Na sl. 5.5. prikazani su karakteristični položaji korijena karakteristične jednadžbe u kompleksnoj ravnini $s = \sigma + j\omega$.



Slika 5.5.

Primjer 5.1.

Potrebno je odrediti iznos koeficijenta pojačanja sistema zadanog strukturnom shemom (sl. 5.6) pri kojem sistem prestaje biti stabilan, tj. *kritični* ili *granični* iznos koeficijenta pojačanja sistema K_{gr}.



Slika 5.6.

Prijenosna funkcija otvorenog sistema jest:

$$G_0(s)=\frac{K_1K_2K_3}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}=\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)} \tag{5.32}$$

Karakteristična jednadžba zatvorenog sistema prema (4.48) jest:

$$1+G_0(s)=1+\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}=0 \tag{5.33}$$

odnosno:

$$(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)+K=0 \tag{5.34}$$

svođenjem (5.34) na oblik (5.19) proizlazi:

$$T_1T_2T_3s^3+(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)s^2+(T_1+T_2+T_3)s+1+K=0.$$

Primjenom kriterija (5.28) proizlazi:

$$(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)(T_1+T_2+T_3)>(1+K)T_1T_2T_3 \tag{5.35}$$

uvrštenjem u (5.35) $T_a=\frac{T_2}{T_1}$; $T_b=\frac{T_3}{T_1}$ proizlazi:

$$(1+T_a+T_b)\cdot\left(1+\frac{1}{T_a}+\frac{1}{T_b}\right)>1+K \tag{5.36}$$

Iz nejednadžbe (5.36) proizlazi:

$$K>K_{gr}=(1+T_a+T_b)\cdot\left(1+\frac{1}{T_a}+\frac{1}{T_b}\right)-1 \tag{5.37}$$

Analizom izraza (5.37) slijedi da je kritično pojačanje sistema određeno kvocijentima vremenskih konstanti razmatranog sistema. Minimalni iznos K_{krit} dobije se u slučaju da je $T_a=T_b=1$, tj. min $K_{krit}=8$.

Routhov kriterij. Ovaj kriterij primjenjuje se u slučajevima kada je red karakteristične jednadžbe sistema $n>4$, a temelji se na određivanju tablice (tabl. 5.1) koeficijenata jednadžbe (5.19).

Tablica 5.1.

	$C_{11}=a_n$	$C_{21}=a_{n-2}$	$C_{31}=a_{n-4}$	$C_{41}=a_{n-6}$
	$C_{12}=a_{n-1}$	$C_{22}=a_{n-3}$	$C_{32}=a_{n-5}$	$C_{42}=a_{n-7}$
$r_3=\frac{C_{11}}{C_{12}}$	$C_{13}=C_{21}-r_3C_{22}$	$C_{23}=C_{31}-r_3C_{32}$	$C_{33}=C_{41}-r_3C_{42}$	$C_{43}=C_{51}-r_3C_{52}$
$r_4=\frac{C_{12}}{C_{13}}$	$C_{14}=C_{22}-r_4C_{23}$	$C_{24}=C_{32}-r_4C_{33}$	$C_{34}=C_{42}-r_4C_{43}$	$C_{44}=C_{52}-r_4C_{53}$
$r_5=\frac{C_{13}}{C_{14}}$	$C_{15}=C_{23}-r_5C_{24}$	$C_{25}=C_{33}-r_5C_{34}$	$C_{35}=C_{43}-r_5C_{44}$	$C_{45}=C_{53}-r_5C_{54}$

Pravilo sastavljanja tablice slijedi iz njene strukture. Bilo koji koeficijent tablice C_{ki} za $i \geq 3$ može se odrediti izrazima:

$$C_{ki} = C_{k+1, i-2} - r_i C_{k+1, i-1} \tag{5.38}$$

$$r_i = \frac{C_{1, i-2}}{C_{1, i-1}} \tag{5.39}$$

gdje je:

k – broj stupca tablice 5.1.
i – broj retka tablice 5.1.

Broj redova tablice iznosi $(n+1)$, a koeficijentima s negativnim indeksima odgovara iznos nula.

Formulacija Routhova kriterija stabilnosti jest *da sistem automatske regulacije bude stabilan, neophodno je i dovoljno da koeficijenti prvog stupca Routhove tablice budu istog predznaka*. Na primjer:

$$C_{11} > 0; \qquad C_{12} > 0; \qquad C_{14} > 0; \ldots, \qquad C_{1, n+1} > 0 \tag{5.40}$$

Pri sastavljanju Routhove tablice radi jednostavnijeg izračunavanja koeficijenata, moguće je množiti ili dijeliti redove tablice s pozitivnim brojem. Također se može zaključiti da broj korijena karakteristične jednadžbe $C(s)$ s pozitivnim realnim dijelom odgovara broju promjena predznaka u prvom stupcu tablice.

Primjer 5.2.

Potrebno je odrediti stabilnost sistema s karakterističnom jednadžbom oblika:

$$s^6 + 6s^5 + 21s^4 + 44s^3 + 62s^2 + 52s + 100 = 0 \tag{5.41}$$

Ruthova tablica koeficijenata za jednadžbu (5.41) ima oblik:

Tablica 5.2.

–	$a_6 = 1$	$a_4 = 21$	$a_1 = 62$	$a_0 = 100$
–	$a_5 = 6$	$a_3 = 44$	$a_2 = 52$	0
$r_3 = \frac{1}{6} = 0{,}167$	$21 - 0{,}167 \cdot 44 = 13{,}65$	$62 - 0{,}167 \cdot 52 = 53{,}3$	$100 - 0{,}667 \cdot 0 = 100$	0
$r_4 = \frac{6}{13{,}65} = 0{,}44$	$44 - 0{,}44 \cdot 53{,}3 = 20{,}6$	$52 - 0{,}44 \cdot 100 = 8$	$0 - 0{,}44 \cdot 0 = 0$	$0 - 0{,}44 \cdot 0 = 0$
$r_5 = \frac{13{,}65}{20{,}6} = 0{,}662$	$53{,}3 - 0{,}662 \cdot 8 = 48$	$100 - 0{,}662 \cdot 0 = 100$	0	0
$r_6 = \frac{20{,}6}{48} = 0{,}43$	$8 - 0{,}43 \cdot 100 = -35$	0	0	0
$r_7 = \frac{48}{35} = -1{,}37$	$100 + 1{,}37 \cdot 10 = 100$	0	0	0

Iz tablice 5.2. vidljivo je da u prvom stupcu dolazi dva puta do promjene predznaka koeficijenata s predznaka (+) na predznak (–) i s predznaka (–) na predznak (+); karakteristična jednadžba (5.41) ima dva korijena u desnoj poluravnini kompleksne ravnine $s=\sigma+j\omega$, tj. sistem je nestabilan.

Ako se u pretposljednjem redu prvog stupca tablice 5.1. dobije da je iznos koeficijenata jednak nuli, karakteristična jednadžba sistema sadrži nekoliko imaginarnih korijena pa se razmotreni sistem nalazi na rubu oscilatorne stabilnosti. U slučajevima kada je $a_0=0$ odnosno $C_{1,n+1}=0$, karakteristična jednadžba sadrži jedan nulti korijen, tj. sistem se nalazi na rubu aperiodske stabilnosti.

Za razliku od Hurwitzova kriterija, koji ima zatvorenu formu, Routhov kriterij zbog svojeg algoritamskog karaktera (elementi tablice se pojavljuju u procesu izračunavanja), vrlo je prikladan za određivanje stabilnosti primjenom elektroničkog računala.

5.4. Frekvencijski kriteriji stabilnosti

Frekvencijski kriteriji stabilnosti vrlo često se primjenjuju u inženjerskoj praksi, jer su pri određivanju stabilnosti sistema višeg reda znatno prikladniji od algebarskih kriterija. Primjenom tih kriterija zaključuje se o stabilnosti zatvorenog sistema na temelju analitičkog ili eksperimentalnog određivanja frekvencijskih karakteristika otvorenog sistema.

Mihajlovljev kriterij stabilnosti. A. V. Mihajlov je 1938. godine razradio kriterij stabilnosti na osnovi kojega se određuje stabilnost SAU po obliku frekvencijskog hodografa vektora karakteristične jednadžbe zatvorenog sistema.

Ako se karakteristična jednadžba zatvorenog sistema piše u obliku:

$$A(s)=\sum_{i=0}^{n} a_i s^i, \tag{5,42}$$

odnosno uvrštenjem u (5.42) $s=j\omega$, dobije se:

$$A(j\omega)=\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i = X(\omega)+jY(\omega) \tag{5.43}$$

gdje je:

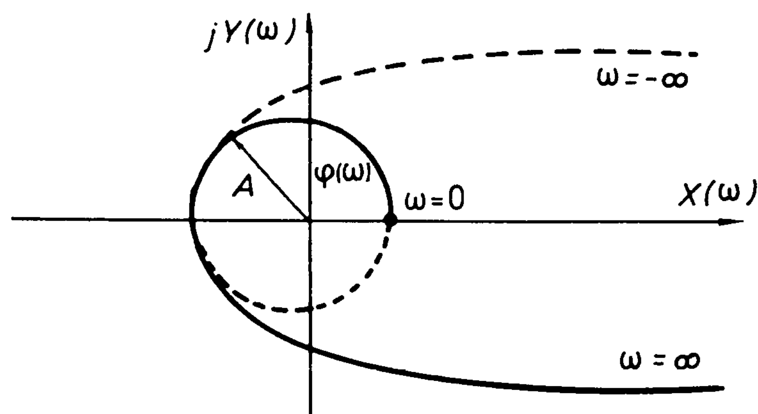
$$\begin{aligned} X(\omega)&=a_0-\omega^2 a_2+\omega^4 a_4-\omega^6 a_6+\dots \\ Y(\omega)&=\omega a_1-\omega^3 a_3+\omega^5 a_5-\omega^7 a_7+\dots \end{aligned} \tag{5.44}$$

Zadavanjem parametra ω i izračunavanjem iznosa $X(\omega)$ i $Y(\omega)$ dobije se hodograf karakterističnog vektora zatvorenog sistema – *krivulja Mihajlova* (sl. 5.7).

Iz (5.44) proizlazi da je $X(\omega)=X(-\omega)$ parna funkcija od ω, a $Y(\omega)=-Y(-\omega)$ neparna funkcija od ω, pa je grana hodografa koja odgovara promjeni frekvencije u intervalu $-\infty<\omega<0$ simetrična u odnosu na realnu os, s granom koja odgovara promjeni frekvencije u intervalu $0<\omega<\infty$, tj. dovoljno je određivati dio hodografa koji odgovara pozitivnoj promjeni parametra ω.

Karakteristični vektor (5.43) može se pisati u obliku:

$$A(j\omega)=|A(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \tag{5.45}$$



Slika 5.7.

gdje je:

$$|A(j\omega)|=\sqrt{X^2(\omega)+Y^2(\omega)} \tag{5.46}$$

$$\varphi(\omega)=\arg A(j\omega)=\operatorname{arctg}\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \tag{5.47}$$

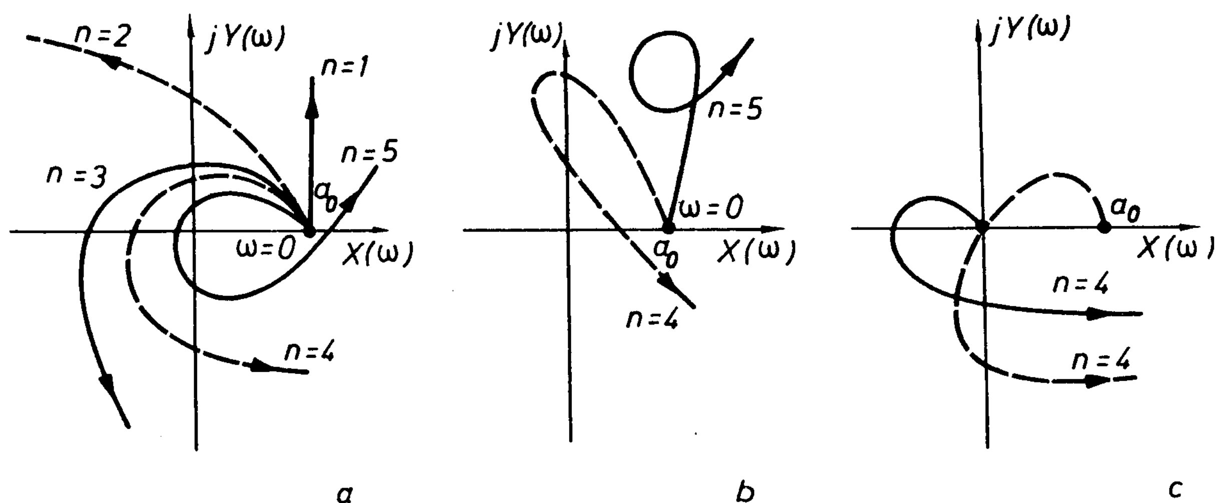
Analizom iznosa (5.45 – 5.47) slijedi: da je za $\omega=0$ modul karakterističnog vektora $A(0)=a_0$ i argument $\varphi(0)=0$, tj. hodograf karakerističnog vektora počinje na realnoj osi u točki a_0. Analogno za $\omega=\infty$, $A(\omega)=\infty$ i $\varphi(\infty)=n\pi/2$.

Ocjena stabilnosti sistema po ovom kriteriju slijedi iz promjene argumenta karakterističnog vektora $\Delta \arg A(j\omega)$ pri promjeni frekvencije u intervalu $0<\omega<\infty$.

A. V. Mihajlov je pokazao da je za stabilnost sistema n-tog reda neophodno i dovoljno da hodograf karakterističnog vektora pri promjeni frekvencije $0<\omega<\infty$ počinje na pozitivnom dijelu realne osi i da ne poprimajući iznos 0, prođe po redu kroz n kvadranata u pozitivnom smislu, tj.:

$$\underset{0 \overset{\omega}{\to} \infty}{\Delta \arg} A(j\omega)=n\frac{\pi}{2} \tag{5.48}$$

Na slici 5.8.a, b, c, prikazani su hodografi karakterističnih vektora stabilnih i nestabilnih sistema različitog reda.



Slika 5.8.

Promjenom iznosa a_0 ne mijenja se oblik hodografa Mihajlova, već se on pomiče po realnoj osi. Ovo svojstvo omogućava dosta jednostavnu procjenu neophodnog iznosa koeficijenta a_0.

U nekim slučajevima prikladnije je da se koristi modificirana formulacija kriterija:

Za stabilnost sistema automatskog upravljanja neophodno je i dovoljno da korijeni imaginarnog i realnog dijela karakterističnog vektora budu realni i pozitivni i da zadovoljavaju uvjet:

$$\omega_{y_1} = 0 < \omega_{x_1} < \omega_{y_2} < \omega_{x_2} < \omega_{y_3} < \dots \tag{5.49}$$

gdje je:

ω_{y_1}; ω_{y_2} – korijeni polinoma $Y(\omega)$
ω_{x_1}; ω_{x_2} – korijeni polinoma $X(\omega)$

Jednadžba (5.49) vrlo često se koristi u obliku:

$$\omega_{y_1}^2 = 0 < \omega_{x_1}^2 < \omega_{y_2}^2 < \omega_{x_2}^2 < \dots \tag{5.50}$$

Primjer 5.3.

Prijenosna funkcija otvorenog sistema ima oblik:

$$G_0(s) = K / [s^3 T_a T_b + s^2 (T_a + T_b) + s]$$

gdje je: $K = 100\,s^{-1}$; $T_a = 0{,}02\,s$; $T_b = 0{,}1\,s$,

potrebno je primjenom Mihajlovljevog kriterija odrediti stabilnost sistema zatvorenog jediničnom povratnom vezom.

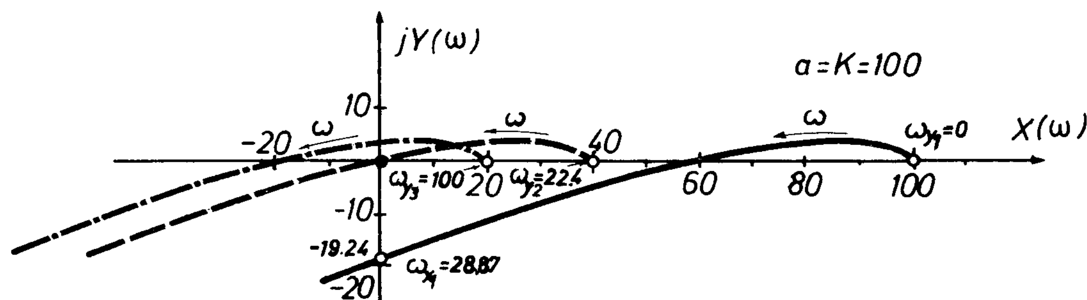
Karakteristični polinom zatvorenog sistema ima oblik:

$$A(j\omega) = K + j\omega - \omega^2 (T_a + T_b) - j\omega^3 T_a T_b = X(\omega) + jY(\omega)$$

$$X(\omega) = K - \omega^2 (T_a + T_b) = 100 - \omega^2 \cdot 0{,}12$$

$$Y(\omega) = \omega (1 - \omega^2 T_a T_b) = \omega (1 - \omega^2 \cdot 0{,}002)$$

Za određivanje hodografa dovoljno je naći točke presjeka $X(\omega)$ i $Y(\omega)$. Iz jednadžbe $Y(\omega) = 0$ slijedi $\omega_{y_1} = 0$; odnosno $X(\omega_{y_1}) = X(0) = K = 100$. Drugo rješenje $\omega_{y_2} = 22{,}36$ slijedi iz $1 - \omega^2\, 0{,}002 = 0$. Uvrštenjem ω_{y_2} u $X(\omega)$ slijedi: $X(\omega_{y_2}) = 40$. Analogno iz $X(\omega) = 0$ slijedi $\omega_{x_1} = 28{,}87$ odnosno $Y(\omega_{x_1}) = 19{,}245$. Primjenom izraza (5.49) proizlazi da je razmatrani sistem nestabilan (sl. 5.9).



Slika 5.9

Iz hodografa karakterističnog vektora vidljivo je da granični koeficijent pojačanja $K_{gr} = X(\omega_{y_1}) - X(\omega_{y_2}) = 60\,s^{-1}$.

Frekvencijski kriteriji stabilnosti baziraju se na poznatom Cauchyjevom principu argumenta iz teorije kompleksne varijable. Za dokaz Mihajlovljevog kriterija neophodno je odrediti povezanost položaja korijena karakteristične jednadžbe na kompleksnoj ravnini i oblika hodografa karakterističnog vektora $A(j\omega)$.

Svaki polinom n-tog reda se može prikazati u obliku:

$$A(j\omega) = a_n \prod_{i=1}^{n} (j\omega - s_1) = A(j\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} \tag{5.51}$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \arg(j\omega - s_i) = \sum_{i=1}^{n} \arg\{-\sigma_i + j(\omega - \omega_i)\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{\omega - \omega_i}{-\alpha_i} \tag{5.52}$$

gdje je: $s_i = \sigma_i + j\omega_i$.

Ako karakteristična jednadžba sadrži m korijena sa $\sigma_i > 0$ i $n - m$ korijena sa $\sigma_i < 0$, izraz (5.52) poprima oblik:

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{\omega - \omega_i}{-\sigma_i} + \sum_{j=A}^{n-m} \frac{\omega - \omega_{ij}}{|\sigma_j|} \tag{5.53}$$

za $$\omega = 0; \qquad \Sigma\varphi(0) = 0 \tag{5.54}$$

za $0 \leq \omega \leq \infty$:

$$\Delta\varphi = -m\pi/2 + (n - m)\pi/2 = (n - 2m)\pi/2, \tag{5.55}$$

Iz (5.55) vidljivo je da prirast argumenta karakterističnog vektora $A(j\omega)$ stabilnog sistema ($m = 0$) iznosi prema (5.48) $n\pi/2$.

Nyquistov kriterij stabilnosti. Taj kriterij razrađen je 1932. godine za određivanje stabilnosti pojačala s negativnom povratnom vezom, a u teoriji automatske regulacije primjenjuje se od 1938. godine. Za razliku od drugih kriterija stabilnosti, Nyquistov kriterij ima i fizikalni smisao. On povezuje stacionarna frekvencijska svojstva otvorenog sistema s nestacionarnim svojstvima zatvorenog sistema. Svrsishodnost primjene ovog kriterija proizilazi iz sljedećih razloga:

1. Po Nyquistovu kriteriju stabilnost se zatvorenog sistema određuje pomoću amplitudno-fazne frekvencijske karakteristike otvorenog sistema $G_0(j\omega)$.
2. Kriterij se može primijeniti i u slučajevima kada nisu poznate diferencijalne jednadžbe sistema (dijela sistema) već su poznate samo frekvencijske karakteristike koje su određene eksperimentalno.
3. Primjenom Nyquistova kriterija može se određivati stabilnost sistema s koncentriranim i raspodijeljenim parametrima.
4. Nyquistov kriterij stabilnosti povezuje analizu i stabilnost sistema s analizom kvalitete prijelaznog procesa.

Nyquistov kriterij također se temelji na Couchyjevom principu argumenta što se u ovom slučaju može prikazati na sljedeći način:

Neka je prijenosna funkcija otvorenog sistema $G_0(s)=\frac{b(s)}{c(s)}$; karakteristični polinom zatvorenog sistema je:

$$A(s)=1+G_0(s)=1+\frac{b(s)}{c(s)}=\frac{a(s)}{c(s)} \tag{5.56}$$

odnosno:

$$A(s)=\frac{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0}{c_n s^n+c_{n-1}s^{n-1}+\ldots+c_0} \tag{5.57}$$

gdje je:

$a(s)=b(s)+c(s)$ – karakteristični polinom zatvorenog sistema reda n,
$c(s)$ – karakteristični polinom otvorenog sistema reda n.

Analizom karakteristične jednadžbe otvorenog sistema $c(s)=0$ moguća su tri slučaja stanja otvorenog sistema: otvoren sistem je stabilan, otvoren sistem je nestabilan i otvoren sistem se nalazi na rubu stabilnosti.

Pri analizi stabilnosti zatvorenog sistema primjenom Nyquistova kriterija potrebno je analizirati tri slučaja stanja otvorenog sistema.

I slučaj – stanje otvorenog sistema je stabilno

U skladu s Mihajlovljevim kriterijem stabilnosti promjena argumenta karakterističnog polinoma otvorenog sistema je:

$$\Delta \arg_{0\le\omega<\infty} c(j\omega)=n\pi/2 \tag{5.58}$$

Ako se zahtijeva da zatvoren sistem bude stabilan, to prirast argumenta karakterističnog polinoma zatvorenog sistema također mora iznositi $n\pi/2$, tj.

$$\Delta \arg_{0\le\omega<\infty} a(j\omega)=\Delta \arg_{0\le\omega<\infty}[c(j\omega)+b(j\omega)]=n\pi/2 \tag{5.59}$$

Iz (5.57 – 5.58) proizlazi:

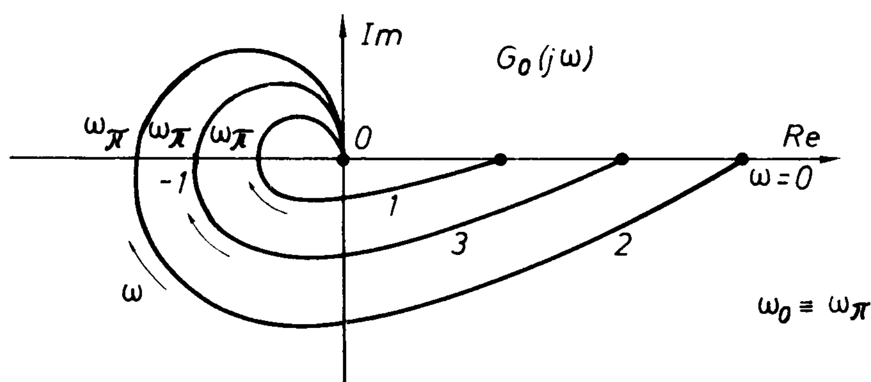
$$\Delta \arg_{0\le\omega<\infty} A(j\omega)=\Delta \arg_{0\le\omega<\infty} a(j\omega)-\Delta \arg_{0\le\omega<\infty} c(j\omega) \tag{5.60}$$

Iz (5.60) slijedi da je sistem automatske regulacije stabilan samo onda kada promjena argumenta vektora $A(j\omega)=1+G_0(j\omega)=0$ pri promjeni ω od nula do beskonačno, odnosno kada hodograf vektora $A(j\omega)$ pri promjeni ω od nula do beskonačno ne obuhvaća točku $(0, j0)$ kompleksne ravnine.

Budući da je $G_0(j\omega)=A(j\omega)-1$, to se Nyquistov kriterij stabilnosti definira u odnosu na točku $(-1, j0)$ kompleksne ravnine.

Zatvoreni SAU bit će stabilan ako frekvencijska karakteristika stabilnog otvorenog sistema pri promjeni ω od 0 do ∞ ne obuhvaća točku s koordinatama

$(-1, j0)$ (sl. *5.10*).



Slika 5.10.

Primjer 5.4.

Potrebno je odrediti granični koeficijent pojačanja sistema sl. 5.6. primjenom Nyquistova kriterija.

Prijenosna funkcija otvorenog sistema (sl. 5.6) je:

$$G_0(s) = K/(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)$$

gdje je:

$$K = K_1 K_2 K_3 .$$

Granični koeficijent pojačanja sistema slijedi iz uvjeta da hodograf $G_0(j\omega)$ prolazi kroz točku $(-1, j0)$; (krivulja 3, sl. 5.10).

$$G_0(j\omega_\pi) = -1 = K_{gr}/(T_1 j\omega_\pi + 1)(T_2 j\omega_\pi + 1)(T_3 j\omega_\pi + 1) \tag{5.61}$$

odnosno:

$$(T_1 j\omega_\pi + 1)(T_2 j\omega_\pi + 1)(T_3 j\omega_\pi + 1) = -K_{gr} \tag{5.62}$$

Iz imaginarnog i realnog dijela kompleksne funkcije (5.62) proizlazi:

$$\omega_\pi = \sqrt{(T_1 + T_2 + T_3)/T_1 T_2 T_3} \tag{5.63}$$

$$K_{gr} = (T_1 + T_2 + T_3)\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3}\right) - 1 \tag{5.64}$$

Rezultat (5.64) dobiven primjenom Nyquistova kriterija u skladu je s rezultatom (5.37) koji je dobiven primjenom Hurwitzova kriterija.

Za $K < K_{gr}$; zatvoreni sistem će biti stabilan, tj. hodograf $G_0(j\omega)$ na sl. 5.10. odgovarat će krivulji 1.

Za $K > K_{gr}$; zatvoreni sistem bit će nestabilan (krivulja 2, sl. 5.10).

II slučaj – stanje otvorenog sistema je nestabilno

Otvoreni sistem automatskog upravljanja može biti nestabilan u slučajevima kada sistem sadrži više dopunskih povratnih veza, odnosno kada sistem bez dopunskih povratnih veza sadrži jednu ili više nestabilnih dinamičkih komponenata.

Kod nestabilnog otvorenog sistema prirast argumenata karakterističnog vektora $c\,(j\omega)$ prema (5.55) je:

$$\underset{0\leq\omega<\infty}{\Delta \arg} A\,(j\omega)=(n-2m)\frac{\pi}{2} \tag{5.65}$$

gdje je m – broj korijena s pozitivnim realnim dijelom.

Da bi zatvoren sistem bio stabilan prirast argumenta je:

$$\underset{0\leq\omega<\infty}{\Delta \arg} a\,(j\omega)=\underset{0\leq\omega<\infty}{\Delta \arg}[c\,(j\omega)+b\,(j\omega)]=\frac{n\pi}{2} \tag{5.66}$$

Iz (5.65), (5.66) i (5.60) proizlazi:

$$\underset{0\leq\omega<\infty}{\Delta \arg} A\,(j\omega)=\underset{0\leq\omega<\infty}{\Delta \arg} a\,(j\omega)-\underset{0\leq\omega<\infty}{\Delta \arg} c\,(j\omega)=$$

$$=\frac{n\pi}{2}-(n-2m)\frac{\pi}{2}=\left(\frac{m}{2}\right)2\pi \tag{5.67}$$

Iz (5.67) slijedi formulacija Nyquistova kriterija stabilnosti u slučaju kad je otvoren sistem nestabilan:

Zatvoreni SAU bit će stabilan ako frekvencijska karakteristika otvorenog sistema pri promjeni ω *od 0 do* ∞, *obuhvaća točku s koordinatama* $(-1, j0)$ $m/2$ *puta u pozitivnom smislu (suprotno od kazaljke na satu).*

Primjer 5.5.

Primjenom Nyquistova kriterija potrebno je odrediti granični iznos koeficijenta pojačanja sistema s nestabilnim regulacijskim objektom $G_0\,(s)$:

$$G_0\,(s)=K/(T_1 s-1)\,(T_2 s+1) \tag{5.68}$$

$$G_0\,(j\omega_\pi)=-1=K_{gr}/(T_1 j\omega_\pi-1)\,(T_1 j\omega_\pi+1) \tag{5.69}$$

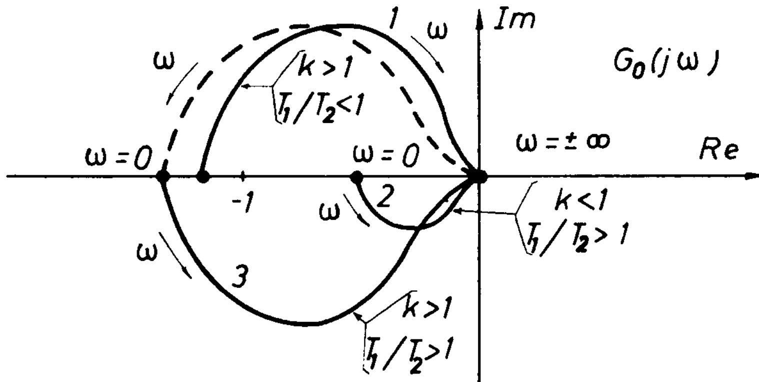
odnosno:

$$(T_1 j\omega_\pi-1)\,(T_2 j\omega_\pi+1)=-K_{gr} \tag{5.70}$$

Iz imaginarnog i realnog dijela izraza (5.70) proizlazi:

$$K>K_{gr}=1 \quad \text{za} \quad T_1>T_2. \tag{5.71}$$

Mogući oblici frekvencijskih karakteristika $G_0\,(j\omega)$ prikazani su na sl. 5.11.



Slika 5.11.

Zadani sistem je drugog reda, tj. $n=2$ i sadrži jedan korijen s pozitivnim realnim dijelom $m=1$. Uvjetu stabilnosti zatvorenog sistema odgovara samo krivulja 3, sl. 5.11; naime, pri promjeni ω od 0 do ∞, krivulja 3 obilazi u pozitivnom smislu 1/2 puta točku $(-1, j0)$.

Krivulja 1, sl. 5.11, obuhvaća točku $(-1, j0)$ u negativnom smislu, dok krivulja 2 ne obuhvaća kritičnu točku.

III slučaj – otvoreni sistem se nalazi na rubu stabilnosti

Prijenosna funkcija otvorenog sistema se može prikazati u obliku:

$$G_0(s)=\frac{b(s)}{s^{\nu} c(s)} \tag{5.72}$$

gdje je:

ν – broj nultih korijena karakteristične jednadžbe otvorenog sistema. Polinom $c(s)$ ne sadrži nule u desnoj poluravnini i na imaginarnoj osi.

U ovom slučaju se prije formulirani Nyquistov kriterij ne može primijeniti, jer razmatrani princip argumenta ne obuhvaća varijante kada se korijeni karakteristične jednadžbe otvorenog sistema nalaze na imaginarnoj osi.

Kod astatičkih sistema (5.72) za $\omega \to 0$, $G_0(j\omega) \to \infty$, pa nije moguće procijeniti da li hodograf $G_0(j\omega)$ obuhvaća ili ne obuhvaća kritičnu točku $(-1, j0)$.

Ako se u izrazu (5.72) nulti korijeni pomaknu za iznos β, tj. $(s_i = \pm\beta)$ s graničnim prijelazom $(\beta \to 0)$ razmatrani slučaj može se svesti na slučaj stabilnog ili nestabilnog sistema, što omogućava primjenu prije formuliranih Nyquistovih kriterija.

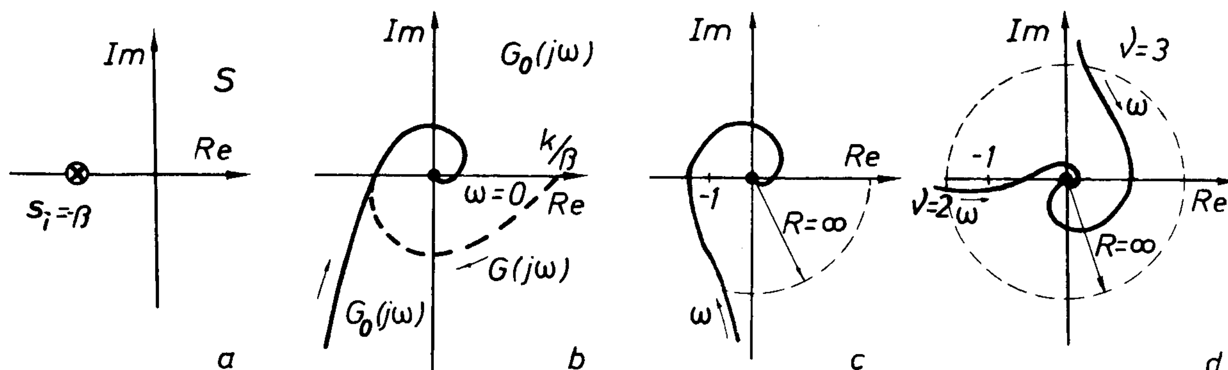
Otvoreni sistem (5.72) za $(s_i = -\beta)$ svodi se na stabilan otvoreni sistem. Na primjer, za $\nu=1$, i $s=-\beta$, jednadžba (5.72) poprima oblik:

$$G(s)=\frac{b(s)}{(s+\beta)c(s)}=\frac{1}{\beta}\frac{b(s)}{\left(\frac{s}{\beta}+1\right)c(s)} \tag{5.73}$$

odnosno:

$$G(j\omega)=\frac{1}{\beta}\frac{b(j\omega)}{\left(\frac{j\omega}{\beta}+1\right)c(j\omega)} \tag{5.74}$$

Usporedbom frekvencijskih karakteristika $G_0(j\omega)$ i $G(j\omega)$ (sl. 5.12) proizlazi:



Slika 5.12.

Na sl. 5.12.a položaj pomaknutog nultog korijena $s_i = -\beta$ karakteristične jednadžbe otvorenog astatičkog sistema odgovara stabilnom sistemu. Pomakom $s_i = -\beta$, integralna dinamička komponenta zapravo je pretvorena u inercijsku komponentu s pojačanjem $1/\beta$.

Na sl. 5.12.b prikazane su frekvencijske karakteristike sistema $G_0(j\omega)$ i $G(j\omega)$. Te karakteristike približno se poklapaju na visokim frekvencijama. Za $\omega \to 0$, karakteristika $G_0(j\omega)$ teži u $-\infty$, a $G(j\omega)$ prolazi kroz IV kvadrant i počinje na realnoj osi u točki $(K/\beta,\ j0)$. Za $\beta \to 0$, karakteristike se poklapaju na svim frekvencijama osim na frekvenciji $\omega = 0$, gdje se $G(j\omega)$ razlikuje od $G_0(j\omega)$.

Za sisteme s astatizmom višeg reda analogno se određuju dopune frekvencijskih karakteristika. Na primjer, za sisteme sa $\nu = 2$ luk sa beskonačnim radijusom prolazi kroz dva kvadranta, a za proizvoljni iznos astatizma ν dopunjena karakteristika sadržavat će luk beskonačnog radijusa s početkom na realnoj osi $(\omega = 0)$ s obilaženjem oko koordinatnog početka za kut $\varphi = -\nu\pi/2$ (sl. 5.12.d).

Nyquistov kriterij stabilnosti u razmotrenim slučajevima može se formulirati na sljedeći način:

Za stabilnost zatvorenog sistema, koji se u otvorenom stanju nalazi na rubu stabilnosti, neophodno i dovoljno je da frekvencijska karakteristika otvorenog sistema $G_0(j\omega)$, dopunjena u beskonačnosti, pri promjeni ω od 0 do ∞ ne obuhvaća točku $(-1,\ j0)$.

Analogno se istim razmatranjem mogu dobiti uvjeti stabilnosti sistema kada karakteristična jednadžba otvorenog sistema sadrži par imaginarnih korijena.

Na temelju izloženog, sistemi na sl. 5.12.b i 5.12.d za $\nu = 2$, bit će stabilni, dok će sistemi na sl. 5.12.c i 5.12.d za $\nu = 3$, biti nestabilni.

Primjer 5.6.

Primjenom Nyquistova kriterija potrebno je odrediti granični iznos koeficijenta pojačanja ako je otvoreni sistem zadan prijenosnom funkcijom oblika:

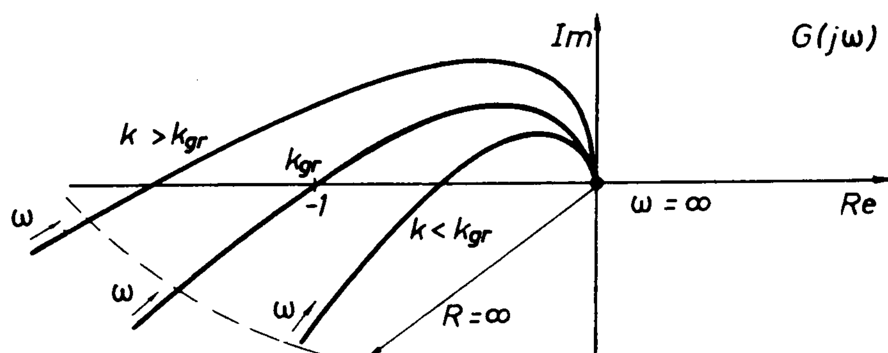
$$G_0(s) = K/s\,(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \tag{5.75}$$

Iznos graničnog koeficijenta pojačanja slijedi iz uvjeta:

$$|G_0(j\omega_\pi)| = 1 \tag{5.76}$$

odnosno:

$$I_m[j\omega_\pi (1 + T_1 j\omega_\pi)(1 + T_2 j\omega_\pi)] = 0 \tag{5.77}$$



Slika 5.13.

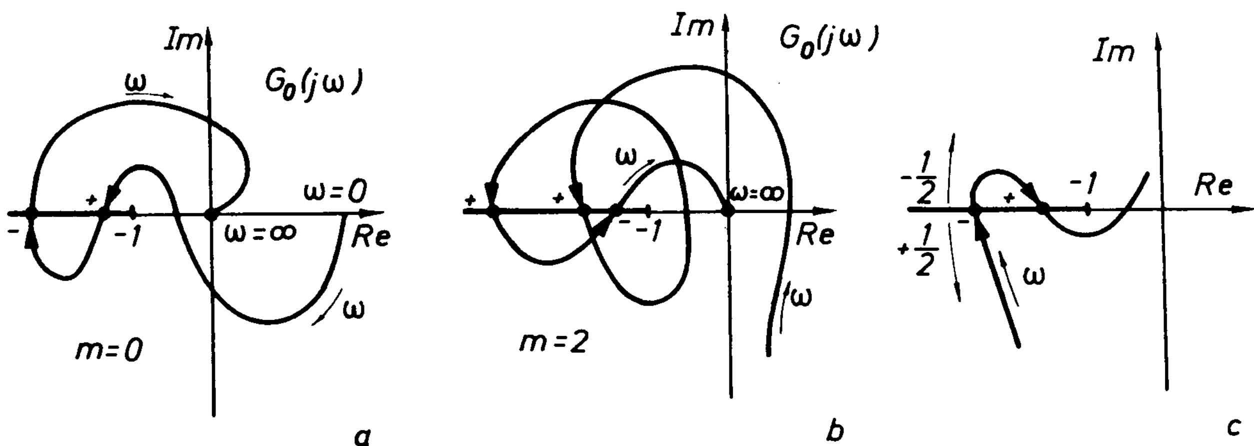
Iz (5.76) i (5.77) proizlazi

$$\omega_\pi = \sqrt{1/T_1 T_2} \tag{5.78}$$

$$K_{gr} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \tag{5.79}$$

Frekvencijske karakteristike $G_0\,(j\omega)$ za različite iznose parametara K prikazane su na slici 5.13.

Pojam „obuhvaćanja" točke $(-1,\ j0)$ koji se koristio u dosad izloženim formulacijama Nyquistova kriterija nije uvijek dovoljno određen. Na primjer, za karakteristike prikazane na sl. 5.14. prikladnija je primjena formulacije Nyquistova kriterija koju je predložio J. Z. Cypkin:



Slika 5.14.

„Da zatvoreni SAU bude stabilan neophodno je i dovoljno da razlika između broja pozitivnih i negativnih prijelaza frekvencijske karakteristike otvorenog sistema kroz dio realne osi $(-\infty,\ -1)$ bude $m/2$, gdje je m broj korijena karakteristične jednadžbe otvorenog sistema s pozitivnim realnim dijelom."

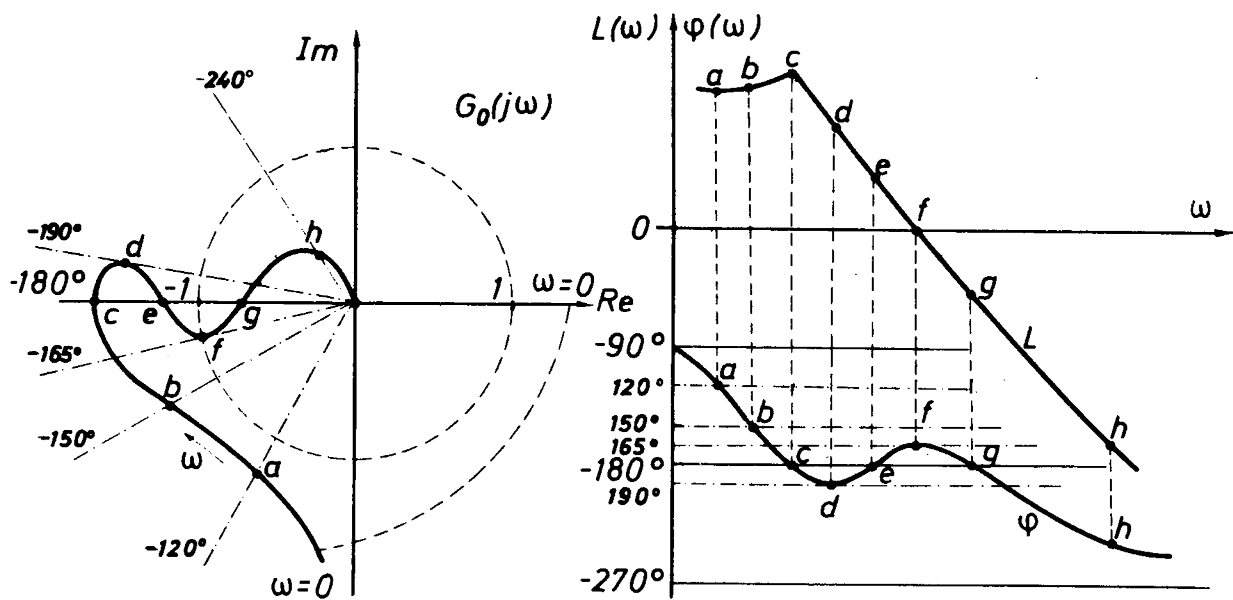
Broj pozitivnih i negativnih prijelaza karakteristike $G_0\,(j\omega)$ kroz dio realne osi $(-\infty,\ -1)$ definira se prema slici 5.14.c.

Logaritamski kriterij stabilnosti. To je frekvencijski kriterij koji proizlazi iz Nyquistova kriterija stabilnosti, a koristi se kada se svojstva sistema prikazuju logaritamskim amplitudno-faznim frekvencijskim karakteristikama otvorenog sistema $L\,(\omega)$ i $\varphi\,(\omega)$. Točkama presjeka amplitudno-fazne frekvencijske karakteristike $G\,(j\omega)$ na dijelu realne osi $(-\infty,\ -1)$ odgovaraju točke u Bodeovu dijagramu za koje je:

$$L\,(\omega) = 20 \log |G_0\,(j\omega)| > 0$$

$$\varphi\,(\omega) = \arg G_0\,(j\omega) = -\pi,\ -3\pi,\ -5\pi, \ldots \tag{5.80}$$

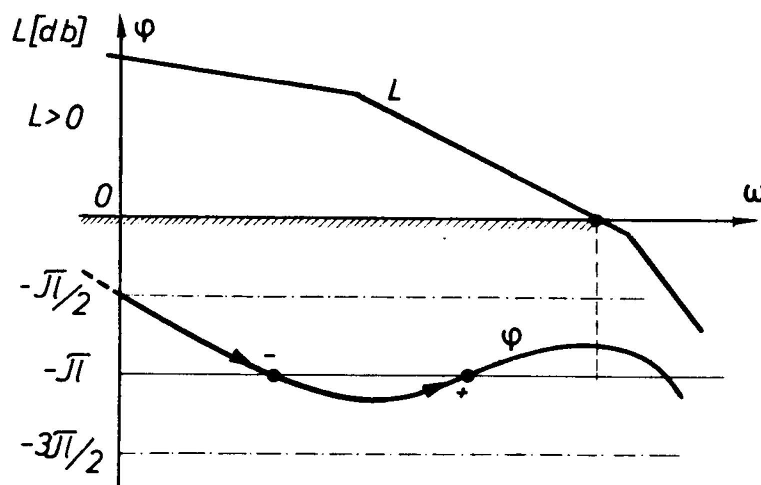
Jednadžbu (5.80) ilustrira sl. 5.15. na kojoj je kvalitativno prikazana povezanost karakteristika $G_0\,(j\omega)$, $L\,(\omega)$ i $\varphi\,(\omega)$. Točkama $|G_0\,(j\omega)| = 1$ odgovara os nula decibela. U točkama u kojima $G_0\,(j\omega)$ prelazi dio realne osi $(-\infty,\ -1)$ karakteristika $\varphi\,(\omega)$ vrši prijelaze pravca $\varphi = -\pi;\ -3\pi;\ -5\pi$.



Slika 5.15.

Ako se u području frekvencija u kojem je $L(\omega)>0$, definiraju pozitivni i negativni prijelazi karakteristike $\varphi(\omega)$ prema sl. 5.16, Nyquistov kriterij stabilnosti može se formulirati na sljedeći način:

Zatvoreni sistem automatskog upravljanja bit će stabilan samo onda kada u području $L(\omega)>0$ razlika broja pozitivnih i negativnih prijelaza karakteristike $\varphi(\omega)$ iznosi $\frac{m}{2}$ gdje je m broj korijena karakteristične jednadžbe otvorenog sistema s pozitivnim realnim dijelom.



Slika 5.16.

Izložena formulacija Nyquistova kriterija vrijedi i u slučajevima kada je stanje otvorenog sistema stabilno ili se otvoren sistem nalazi na rubu stabilnosti; u navedenim slučajevima $m=0$.

5.5. Stabilnost SAU s iracionalnim i transcendentnim dinamičkim komponentama

Za određivanje stabilnosti sistema koji sadrže iracionalne i transcendentne komponente najprikladnija je primjena frekvencijskih kriterija stabilnosti.

Stabilnost sistema s iracionalnim komponentama. Prijenosna funkcija otvorenog sistema s iracionalnim komponentama ima oblik:

$$G_0(s)=\frac{b(\sqrt{s})}{c(\sqrt{s})} \tag{5.81}$$

Prijenosna funkcija zatvorenog sistema je:

$$G_z(s)=\frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}=\frac{b(\sqrt{s})}{c(\sqrt{s})+b(\sqrt{s})}=\frac{b(\sqrt{s})}{a(\sqrt{s})} \tag{5.82}$$

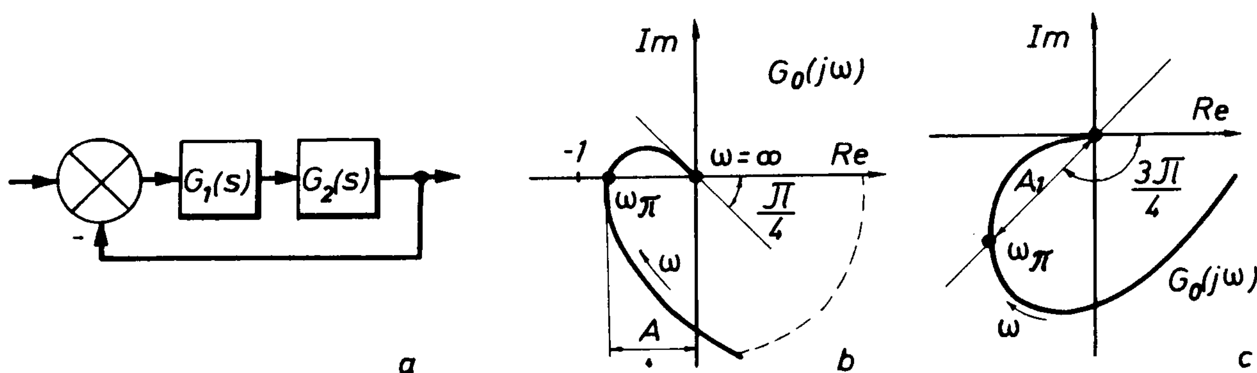
Uvrštenjem u (5.82) $\sqrt{s}=q$, proizlazi:

$$G_z(q)=\frac{b(q)}{a(q)} \tag{5.83}$$

Za sisteme s prijenosnom funkcijom (5.82) odnosno (5.83) može se direktno primijeniti Nyquistov kriterij stabilnosti:

Primjer 5.7.

Potrebno je primjenom Nyquistova kriterija odrediti stabilnost sistema s raspodijeljenim parametrima sl. 5.17.a.



Slika 5.17.

Prijenosne funkcije sistema (sl. 5.17.a) imaju oblik:

$$G_1(s)=K_1/\sqrt{s} \tag{5.84}$$

$$G_2(s)=K_2/(1+T_1 s)(1+T_2 s) \tag{5.85}$$

Prijenosna funkcija otvorenog sistema je:

$$G_0(s)=G_1(s)\,G_2(s)=K_1K_2/\sqrt{s}\,(1+T_1 s)(1+T_2 s) \tag{5.86}$$

odnosno:

$$G_0(j\omega) = K/\sqrt{j\omega}\,(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2) \tag{5.87}$$

Granični iznos koeficijenta pojačanja slijedi iz uvjeta:

$$G_0(j\omega_\pi) = -1 \tag{5.88}$$

odnosno:

$$\sqrt{j\omega_\pi}\,(1+j\omega_\pi T_1)(1+j\omega_\pi T_2) = -K_{gr} \tag{5.89}$$

Uvrštenjem u (5.89) $\sqrt{j} = (1+j)/\sqrt{2}$ proizlazi:

$$\sqrt{\omega_\pi}\,[1-\omega_\pi(T_1+T_2)-\omega_\pi^2 T_1 T_2] = -\sqrt{2}K_{gr} \tag{5.90}$$

$$1+\omega_\pi(T_1+T_2)-\omega_\pi^2 T_1 T_2 = 0 \tag{5.91}$$

odnosno:

$$\omega_\pi = \frac{T_1+T_2}{2T_1T_2}\sqrt{T_1^2+6T_1T_2+T_2^2} \tag{5.92}$$

$$K_{gr} = \sqrt{2}\,\omega_\pi^{3/2}(T_1+T_2) \tag{5.93}$$

Stabilnost sistema s iracionalnim komponentama najprikladnije je odrediti rješenjem jednadžbe (5.88) grafoanalitičkim postupkom:

$$G_0(j\omega_\pi) = -1 = \frac{K}{\sqrt{j\omega_\pi}}\,G_2(j\omega_\pi) \tag{5.94}$$

odnosno:

$$G_0(j\omega_\pi) = -\frac{\sqrt{j\omega_\pi}}{K} = \frac{1}{(1+j\omega_\pi T_1)(1+j\omega_\pi T_2)} \tag{5.95}$$

Rješenje jednadžbe (5.95) prikazano je na sl. 5.17.c. Iznosi ω_π i K_{gr} slijede iz točke presjeka hodografa $G_2(j\omega)$ i pravca iz koordinatnog početka pod kutem $\arg(-\sqrt{j}) = -3\pi/4$ prema realnoj osi. Iz (5.95) i sl. 5.17.c proizlazi:

$$K_{gr} = \sqrt{\omega_\pi/A_1} \tag{5.96}$$

Stabilnost sistema s kašnjenjem. Sistemi automatskog upravljanja koji sadrže komponentu kašnjenja opisuju se prijenosnom funkcijom otvorenog sistema:

$$G_0(s) = G_1(s)\,e^{-\tau s} \tag{5.97}$$

Karakteristična jednadžba zatvorenog sistema je:

$$a(s) = 1+G_0(s) = 1+G_1(s)\,e^{-\tau s} = 0 \tag{5.98}$$

odnosno:

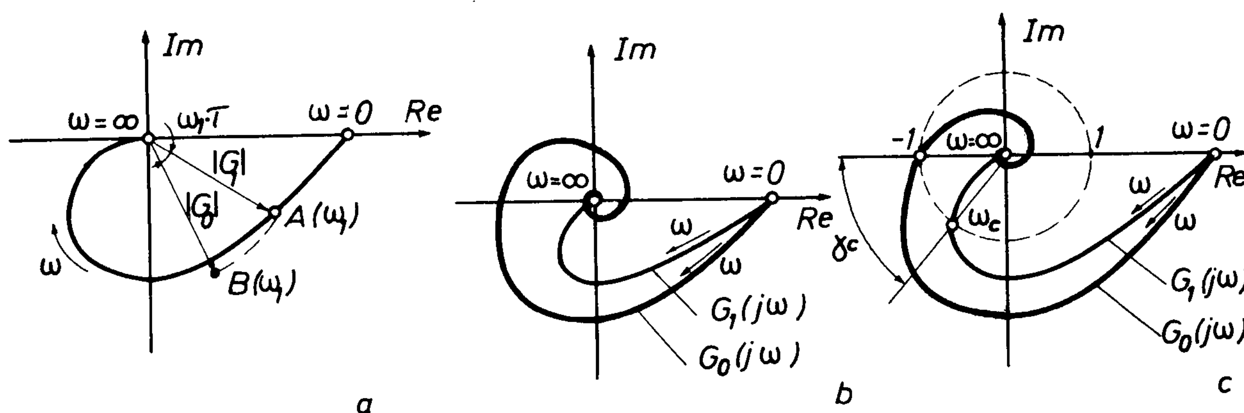
$$a(s) = 1+G_1(s)\left[1-s\tau+\frac{s^2\tau^2}{2!}-\frac{s^3\tau^3}{3!}\pm\ldots\right] \tag{5.99}$$

Kako je iz (5.99) vidljivo karakteristični polinom $a(s)$ ima beskonačno mnogo korijena, pa primjena algebarskih kriterija stabilnosti za analizu sistema koji sadrže transcendentne komponente nije svrsishodna. U praksi se stabilnost ovih sistema određuje primjenom frekvencijskih kriterija stabilnosti, od kojih je najprikladnija primjena Nyquistova kriterija.

Uvrštenjem u (5.97) $s=j\omega$ proizlazi:

$$G_0(j\omega)=G_1(j\omega)\,e^{-j\omega\tau}=\left|G_1(j\omega)\right|\,e^{j[\theta_1(\omega)-\omega\tau]} \tag{5.100}$$

Iz (5.100) proizlazi da se karakteristika $G_0(j\omega)$ dobije zakretanjem vektora karakteristike $G_1(j\omega)$, za kut $\omega\tau$. Na sl. 5.18.a prikazano je kako se pomoću vektora $G_1(j\omega_1)$ zakretanjem za kut $\omega\tau$ dobije vektor $G_0(j\omega_1)$; na sl. 5.18.b prikazani su mogući oblici hodografa $G_1(j\omega)$ i $G_0(j\omega)$ dobiveni



Slika 5.18.

prema (5.100). Kako je vidljivo iz sl. 5.18.b komponenta kašnjenja deformira hodograf vektora $G_1(j\omega)$, pa ovisno o iznosu kašnjenja τ sistem može postati nestabilan.

Primjenom Nyquistova kriterija moguće je odrediti granični iznos kašnjenja τ pri kojem će sistem biti na rubu stabilnosti. Karakteristična jednadžba zatvorenog sistema jest:

$$1+G_0(j\omega)=1+\left|G_1(j\omega)\right|\,e^{j[\theta_1(\omega)-\omega\tau]}=0 \tag{5.101}$$

Da bi sistem bio na rubu stabilnosti treba zadovoljiti uvjete:

$$G_1(j\omega_\pi)=-1 \tag{5.102}$$

$$\theta_1(\omega_\pi)-\omega_\pi\tau_{gr}=-\pi(2i+1);\qquad i=0,\,1,\,2,\ldots \tag{5.103}$$

Iz (5.102) i (5.103) proizlazi:

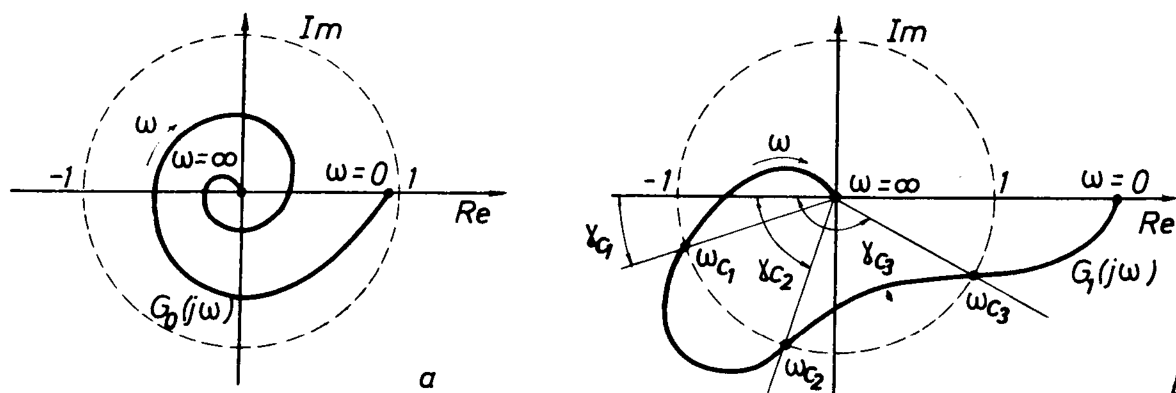
$$\tau_{gr}=\frac{\theta_1(\omega_\pi)+\pi(2i+1)}{\omega_\pi}=\frac{\gamma}{\omega_\pi} \tag{5.104}$$

Grafoanalitičko rješenje jednadžbe (5.101) prikazano je na slici 5.18.c. Iz uvjeta (5.102) i (5.103) proizlazi zaključak da su mogući različiti slučajevi položaja hodografa $G_1(j\omega)$ u odnosu na jediničnu kružnicu.

U slučaju kada je $\left|G_1(j\omega)\right|<1$ u području frekvencija $0\leq\omega<\infty$ tada je zatvoren sistem stabilan za bilo koji iznos kašnjenja τ (sl. 5.19.a).

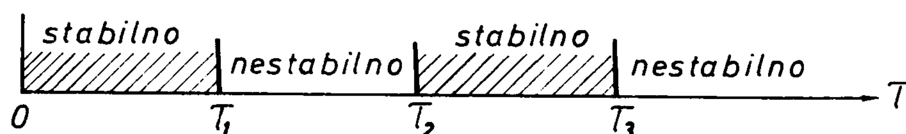
U području frekvencija u kojima je $|G_1(j\omega)|>1$ općenito može postojati više frekvencija presjeka $\omega_{\pi i}$ pri kojima se sistem s kašnjenjem nalazi na rubu stabilnosti (sl. 5.19.b). Iz (5.102) i (5.103) proizlazi:

$$\tau_i=\frac{\theta_1(\omega_{\pi i})}{\omega_{\pi i}}+\frac{\pi(2i+1)}{\omega_{\pi i}}=\frac{\gamma_{\pi i}}{\omega_{\pi i}} \tag{5.105}$$



Slika 5.19.

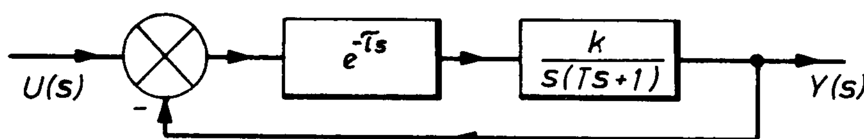
Iz (5.102) i sl. 5.19. vidljivo je da postoje iznosi vremena kašnjenja koji odgovaraju stabilnim i nestabilnim režimima rada sistema (sl. 5.20).



Slika 5.20.

Primjer 5.8.

Potrebno je izvršiti analizu stabilnosti slijednog sistema zadanog strukturnom shemom (sl. 5.21).



Slika 5.21.

Prijenosna funkcija i frekvencijska karakteristika sistema određene su izrazima:

$$G_0(s)=e^{-\tau s}K/s(Ts+1) \tag{5.106}$$

$$G_0(j\omega)=e^{-j\omega\tau}K/j\omega(j\omega T+1) \tag{5.107}$$

Primjenom uvjeta (5.102) i (5.103) proizlazi:

$$|G_1(j\omega_\pi)| = K/\omega_\pi \sqrt{\omega_\pi^2 T^2 + 1} = 1 \tag{5.108}$$

$$\theta_1(\omega_\pi) = -\pi/2 - \text{arctg}\,\omega T \tag{5.109}$$

Iz (5.108) proizlazi:

$$\omega_\pi = \sqrt{-\frac{1}{2T^2} + \frac{1}{2T^2}\sqrt{1 + 4T^2K^2}} \tag{5.110}$$

Iz (5.109) i (5.110) proizlazi:

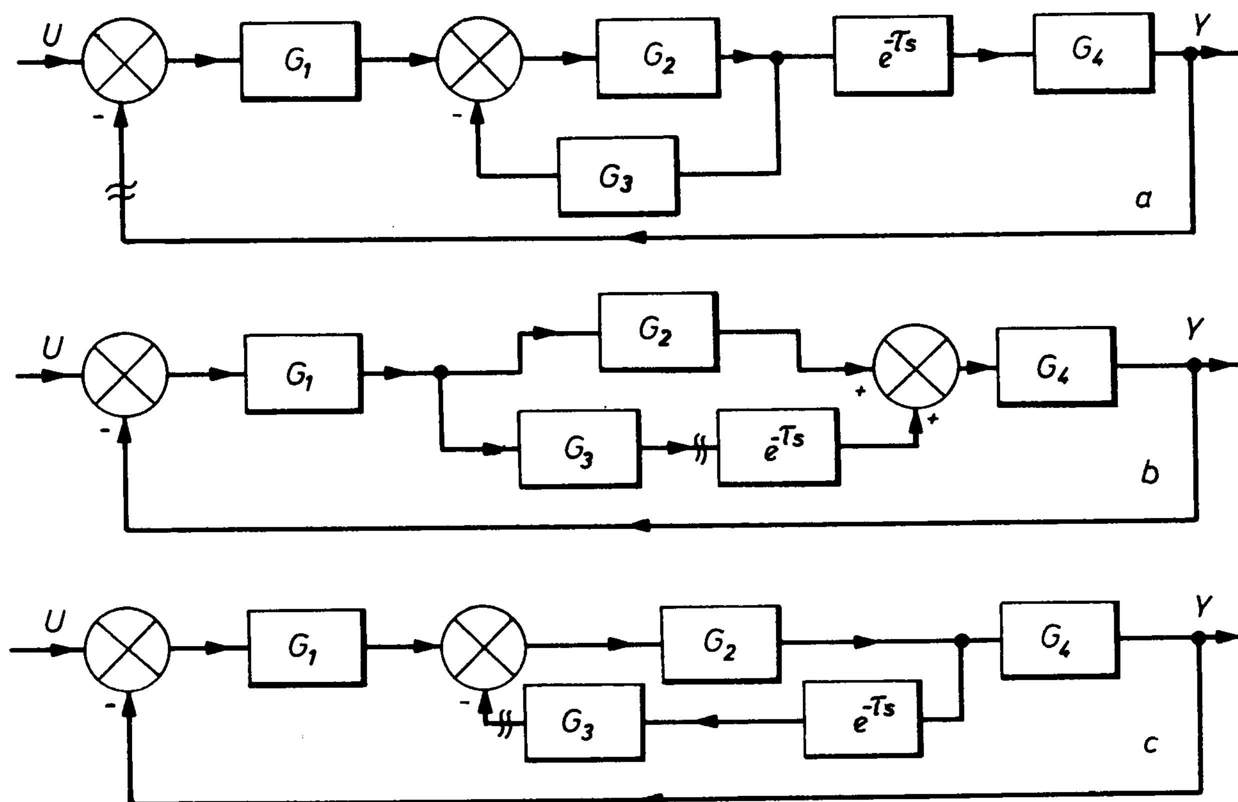
$$\theta_1(\omega_\pi) = -\pi/2 - \text{arctg}\sqrt{-0{,}5 + 0{,}5\sqrt{1 + 4T^2K^2}} \tag{5.111}$$

Iz (5.105), (5.110) i (5.111) slijedi izraz za određivanje graničnog iznosa vremena kašnjenja τ_{gr}:

$$\tau_{gr} = \frac{\pi/2 - \text{arctg}\sqrt{-5 + 0{,}5\sqrt{1 + 4T^2K^2}}}{\sqrt{-0{,}5 + 0{,}5\sqrt{1 + 4T^2K^2}}} \cdot T \tag{5.112}$$

Za $\tau < \tau_{gr}$ razmatrani sistem bit će stabilan.

Pri određivanju stabilnosti sistema s kašnjenjem primjenom Nyquistova kriterija potrebno je, ovisno o strukturnoj shemi sistema, pravilno odabrati točku otvaranja sistema. Naime, za analizu stabilnosti sistema opisanih u otvorenom stanju prijenosnom funkcijom (5.97), ovisno o mjestu komponente kašnjenja u strukturnoj shemi, potrebno je primijeniti pravila otvaranja sistema prema sl. 5.22.



Slika 5.22.

Za sisteme prikazane strukturnom shemom (sl. 5.22.a) otvaranje sistema vrši se u bilo kojoj točki glavne povratne veze:

$$G_0(s)=G_1(s)\frac{G_2(s)}{1+G_2(s)G_3(s)}e^{-\tau s}G_4(s) \tag{5.113}$$

U slučajevima kada se strukturna shema sistema može svesti na oblike (sl. 5.22.b, c) otvaranje sistema vrši se u paralelnoj grani, odnosno u grani unutarnje povratne veze. U tim slučajevima prijenosne funkcije otvorenih sistema imaju oblik (5.97):

$$G_0(s)=G_3(s)e^{-\tau s}\frac{G_4(s)G_1(s)}{1+G_4(s)G_1(s)G_2(s)} \tag{5.114}$$

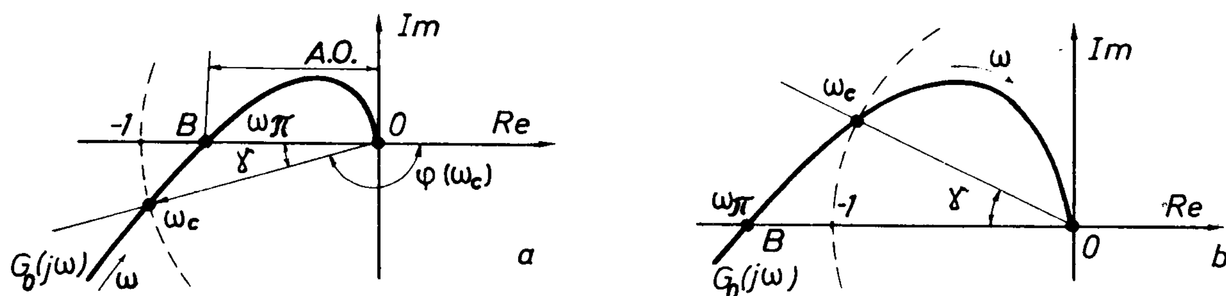
$$G_0(s)=\frac{G_2(s)G_3(s)e^{-\tau s}}{1+G_2(s)G_1(s)G_4(s)} \tag{5.115}$$

5.6. Amplitudno i fazno osiguranje stabilnosti

Iz dosad razmatranih primjera očito je da promjena iznosa parametara sistema može uzrokovati nestabilan režim rada sistema. Osnovni razlozi zbog kojih teoretski stabilan sistem može postati nefunkcionalan bili bi ovi:

a) Matematički model sistema je idealiziran, tj. iznosi parametara dinamičkih komponenata sistema nisu dovoljno točno određeni.
b) Parametri elemenata i funkcionalnih cjelina sistema mijenjaju se u procesu eksploatacije zbog starenja.

Za normalno funkcioniranje SAU neophodno je da se osigura stabilan režim rada u predvidivim granicama promjena parametara sistema. Ovom zahtjevu može se udovoljiti tako da se sistem projektira s potrebnim *amplitudnim i faznim osiguranjem*. Osiguranje stabilnosti određuje se u skladu s primijenjenim kriterijem stabilnosti. U inženjerskoj praksi najviše se koristi definiranje osiguranja stabilnosti na osnovi Nyquistova kriterija, tj. udaljenošću hodografa $G_0(j\omega)$ otvorenog sistema od kritične točke $(-1, j0)$ (sl. 5.23).



Slika 5.23.

Fazno osiguranje stabilnosti γ (sl. 5.23) određeno je izrazom:

$$\gamma=180^\circ+\varphi(\omega_c)\Big|_{|G(j\omega_c)|=1} \tag{5.116}$$

Pod *amplitudnim osiguranjem* stabilnosti razumijeva se odnos graničnog koeficijenta pojačanja sistema i zadanog koeficijenta pojačanja razmatranog sistema:

$$A.O.=\frac{K_{gr}}{K}=\frac{1}{G_0(j\omega_\pi)} \tag{5.117}$$

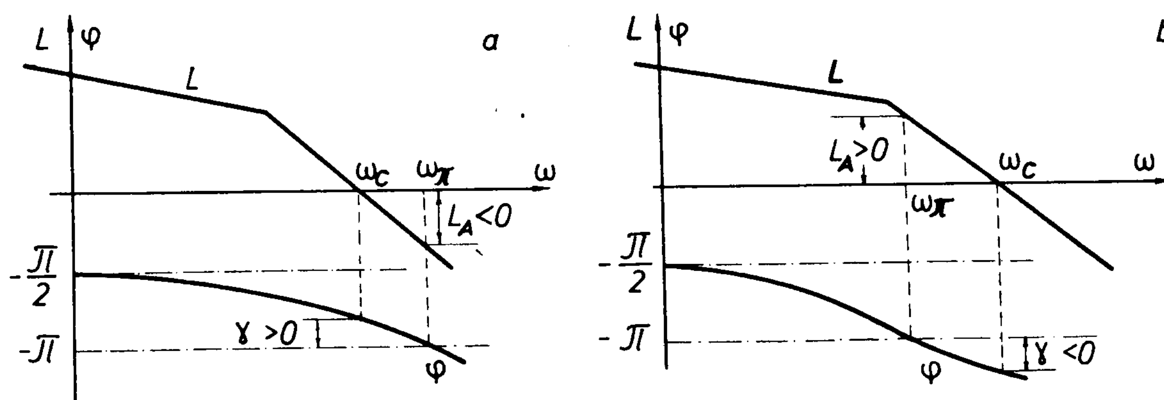
Iz (5.117) i sl. 5.23. proizlazi:

$$A.O.=\frac{1}{G_0(j\omega_\pi)}=\frac{1}{OB} \tag{5.118}$$

Iz (5.117) i (5.118) i sl. 5.23. očito je da amplitudno osiguranje $A.O.$ osigurava stabilnost sistema pri porastu koeficijenta pojačanja K. Kod stabilnih sistema (sl. 5.23.a) $A.O.>1$, a kod nestabilnih sistema (sl. 5.23.b) $A.O.<1$.

Amplitudno osiguranje $A.O.$ obično se iskazuje u logaritamskom mjerilu (sl. 5.24).

$$L_B=20\log\beta=-20\log|G_0(j\omega_\pi)|=-L(\omega_\pi); \qquad \beta=\overline{OB} \tag{5.119}$$



Slika 5.24.

Amplitudno i fazno osiguranje stabilnosti osigurava stabilnost sistema pri promjeni parametara sistema u određenim granicama i znatno utječe na karakter prijelaznog procesa sistema. Iznosi $A.O.$ i γ odabiru se ovisno o zahtjevima koji se postavljaju na odvijanje prijelaznog procesa sistema.

5.7. Utjecaj malih parametara na stabilnost SAU

Pri sastavljanju diferencijalnih jednadžbi sistema obično se zanemaruju utjecaji drugostepenih veličina na proces, što u nekim slučajevima nije opravdano jer mali parametri mogu znatno utjecati na stabilnost sistema. Ocjena utjecaja malih parametara na stabilnost sistema može se donijeti na osnovi karakteristične jednadžbe zatvorenog sistema:

$$a(s)=1+G_0(s)=\mu a_1(s)+a_0(s)=0 \tag{5.120}$$

gdje je:

μ – mali parametar

$$a_1(s)=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0 \tag{5.121}$$

$$a_0(s)=C_m s^m+C_{m-1}s^{m-1}+\ldots+C_0 \tag{5.122}$$

Mali parametar μ neće utjecati na stabilnost sistema s karakterističnom jednadžbom (5.120) u sljedećim slučajevima:

$$\begin{aligned} &\text{a) } n-m=1; \quad a_n/C_m \\ &\text{b) } n-m=2; \quad \frac{C_{m-1}}{C_m}-\frac{a_{n-1}}{a_n}>0, \end{aligned} \tag{5.123}$$

pa se stabilnost sistema može odrediti po karakterističnoj jednadžbi (5.122).

U slučajevima kada je $n-m>2$, mali parametar μ ne smije se zanemariti, tj. stabilnost sistema određuje se po karakterističnoj jednadžbi (5.120).

Primjer 5.9.

Odrediti mogućnost zanemarenja malog parametra μ pri analizi stabilnosti sistema s karakterističnom jednadžbom oblika:

$$(T_1^2 s^2+2\xi T_1 s+1)(T_2 s+1)(\mu s+1)+K=0 \tag{5.124}$$

gdje je: $T_1=0{,}9$ s; $\xi=0{,}8$; $T_2=0{,}09$ s; $K=15$; $\mu=0{,}001$ s.

Svođenjem (5.123) na oblik (5.120) proizlazi:

$$\begin{aligned} &\mu[T_1^2 T_2 s^4+T_1(2\xi T_2+T_1)s^3+(2\xi T_1+T_2)s^2+s]+ \\ &+T_1^2 T_2 s^3+T_1(2\xi T_2+T_1)s^2+(2\xi T_1+T_2)s+1+K=0 \end{aligned} \tag{5.125}$$

Iz (5.121), (5.122), (5.123) i (5.125) proizlazi: $n-m=4-3=1$; $\frac{a_n}{C_m}=\frac{T_1^2 T_2}{T_1^2 T_2}=1>0$, pa se pri analizi stabilnosti može zanemariti utjecaj parametra μ, tj. stabilnost sistema se može odrediti po jednadžbi:

$$T_1^2 T_2 s^3+T_1(2\xi T_2+T_1)s^2+(2\xi T_1+T_2)s+1+K=0$$

odnosno:

$$0{,}0729\, s^3+0{,}940\, s^2+1{,}53\, s+16=0$$

Primjenom Hurwitzova kriterija proizlazi:

$$0{,}94\cdot 1{,}53-0{,}0729\cdot 16=1{,}44-1{,}17=0{,}27>0,$$

tj. sistem je stabilan. Isti rezultat dobije se ako se parametar μ ne zanemari. Uvrštenjem numeričkih iznosa parametara u (5.125) i sređivanjem proizlazi:

$$7{,}38\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}341\cdot 1{,}53>7{,}29\cdot 10^{-5}\cdot 1{,}53^2-(7{,}3810^{-2})^2\cdot 16=0{,}087$$

U slučajevima kada karakteristična jednadžba sistema sadrži više malih parametara μ_1, μ_2; μ_q, od kojih svaki povećava red karakteristične jednadžbe za jedinicu, postupa se tako da se svi mali parametri izraze pomoću jednog malog parametra:

$$\mu_1=\eta_1\mu; \qquad \mu_2=\eta_2\mu; \qquad \mu_q=\eta_q\mu, \tag{5.126}$$

a karakteristična jednadžba prikaže se u obliku:

$$\mu^m b(s)+a(s)=0 \tag{5.127}$$

odnosno:

$$\mu^m (b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_0) + a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots + a_0 = 0 \qquad (5.128)$$

Da bi sistem s karakterističnom jednadžbom (5.127) bio stabilan neophodno je i dovoljno da jednadžbe $b(s)=0$ i $a(s)=0$ udovoljavaju uvjetima stabilnosti.

Primjer 5.10.

Potrebno je odrediti utjecaj malih parametara na stabilnost sistema opisanog prijenosnom funkcijom oblika:

$$G(s) = K \frac{R(s)}{Q(s)} \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{K} (\mu_i s + 1) \prod\limits_{j=1}^{q} (\mu_j^2 s^2 + 2\xi_j \mu_j s + 1)} \qquad (5.129)$$

gdje su: μ_i, μ_j mali parametri; $R(s)$ i $Q(s)$ polinomi reda m odnosno n, $(n > m)$ koji ne sadrže male parametre.

Stabilnost sistema može se odrediti iz pojednostavnjene karakteristične jednadžbe zatvorenog sistema:

$$Q(s) + KR(s) = 0 \qquad (5.130)$$

ili primjenom logaritamskih karakteristika pojednostavnjene kompleksne prijenosne funkcije otvorenog sistema:

$$G(j\omega) = K \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} \qquad (5.131)$$

Dopunski fazni pomak što ga uzrokuju mali parametri na frekvenciji presjeka ω_c, određuje se izrazom:

$$\varphi_\mu = \sum_i^r - \mathrm{arctg}\, \mu_i \omega_c + \sum_j^q - \mathrm{arctg} \frac{2\xi_j \mu_j \omega_c}{1 - \mu_j^2 \omega_c^2} \approx -\omega_c \left[\sum_{i=1}^{r} \mu_i + \sum_{i=1}^{q} 2\xi_i \mu_i \right] \qquad (5.132)$$

Uzimajući u obzir (5.132) fazno osiguranje sistema (5.131) se smanjuje:

$$\gamma_c \approx \gamma + 57{,}3 \varphi_\mu \qquad (5.133)$$

Primjenom izraza (5.131) i (5.132) na sistem s prijenosnom funkcijom

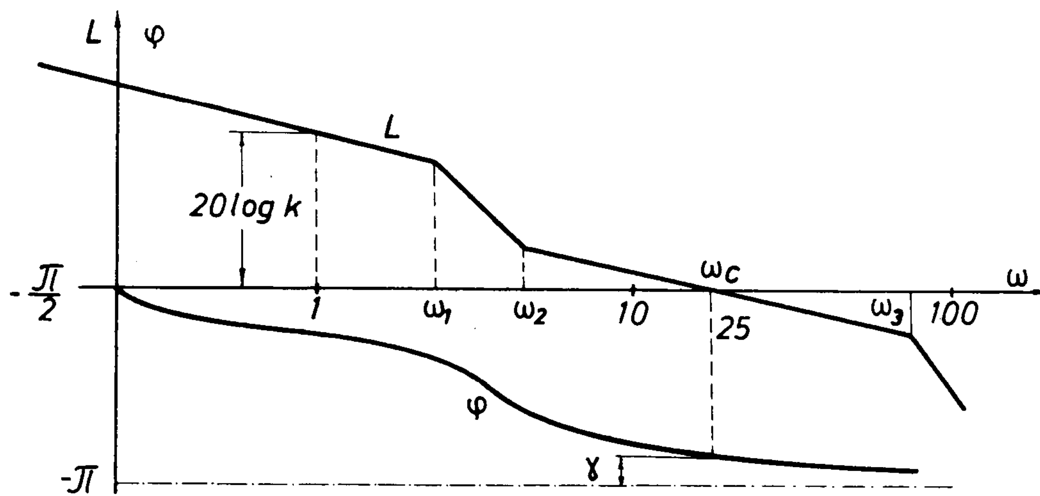
$$G(s) = \frac{K(Ts+1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(\mu_1 s + 1)(\mu_2^2 s^2 + 2\xi\mu s + 1)} \qquad (5.134)$$

gdje je: $K=100$; $T=0{,}125\,s$; $T_1=0{,}5\,s$; $T_2=0{,}0225\,s$; $\mu_1=0{,}002\,s$; $\mu_2=0{,}001\,s$; $\xi=0{,}8$; proizlazi:

$$G(s) = \frac{K(Ts+1)}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = \frac{100(0{,}125s+1)}{p(0{,}5s+1)(0{,}0022s+1)} \qquad (5.135)$$

$$\varphi_\mu = -\omega_c |\mu_1 + 2\xi\mu_2| = 0{,}0904 \qquad (5.136)$$

Bodeov prikaz sistema (5.135) prikazan je na sl. 5.20.; $L(1) = 20 \log K = 20$ dB; $\omega 1 = \frac{1}{T_1} = 2s^{-1}$; $\omega_2 = \frac{1}{T} = 8s^{-1}$; $\omega_3 = \frac{1}{T_2} = 50s^{-1}$; $\omega_c = 25s^{-1}$; $\gamma = 50°$.



Slika 5.25.

Stvarno fazno osiguranje sistema prema (5.133) je:

$$\gamma_c = 50 - 57{,}3 \cdot 0{,}0904 = 44{,}7^\circ \tag{5.137}$$

U razmatranom primjeru mali parametri μ_1 i μ_2 se svega za jedan ili dva reda veličine razlikuju od T_1 i T_2, pa znatno utječu na iznos faznog osiguranja sistema.



ANALIZA UTJECAJA PARAMETARA SISTEMA NA STABILNOST

Pod parametrima sistema automatskog upravljanja razumijevaju se vremenske konstante, koeficijenti pojačanja pojedinih elemenata, koeficijenti pojačanja povratnih veza, koeficijenti karakterističnih jednadžbi i sl. Pri projektiranju sistema nameće se zadatak za određivanje područja promjene iznosa pojedinih parametara u kojem će sistem biti stabilan, tj. *područje stabilnosti sistema.*

Ako sistem sadrži *m* parametara koji se mogu varirati, razmatra se *m*-dimenzionalno područje stabilnosti. Svakoj točki toga područja odgovara karakteristična jednadžba sa zadanim iznosima koeficijenata. Promjenom iznosa bilo kojeg parametra sistema mijenjaju se i iznosi koeficijenata karakteristične jednadžbe, tj. dolazi do promjene položaja korijena u ravnini korijena, pa sistem može prijeći u *područje nestabilnosti sistema.*

Primjenom kriterija stabilnosti može se samo zaključiti o stabilnosti sistema pri zadanim iznosima parametara, također se mogu odrediti granični iznosi nekih parametara, npr. koeficijenata pojačanju sistema i vremena kašnjenja; ali vrlo je složena analiza utjecaja promjene različitih parametara sistema na stabilnost. Za određivanje područja stabilnosti sistema razrađeno je više postupaka. U inženjerskoj praksi najviše se primjenjuje:

a) postupak analize promjene položaja korijena karakteristične jednadžbe u ravnini korijena određivanjem *geometrijskog mjesta* (*hodografa*) *korijena*,
b) postupak određivanja područja stabilnosti u prostoru parametara sistema ili koeficijenata karakteristične jednadžbe-*D-rastavljanje*.

6.1. Postupak geometrijskog mjesta korijena

Pod geometrijskim mjestom korijena (hodografom korijena) razumijeva se skup trajektorija koje opisuju korijeni karakteristične jednadžbe u kompleksnoj ravnini korijena pri promjeni jednog od parametara od 0 do ∞.

Taj postupak koristi se za rješavanje zadataka analize stabilnosti, ocjene kvalitete prijelaznog procesa i sinteze sistema automatskog upravljanja. Kao slobodni (promjenljivi) parametar može se odabrati bilo koji parametar karakteristične jednadžbe zatvorenog sistema. U većini slučajeva odabiru se vremenske konstante pojedinih dinamičkih komponenata i koeficijent pojačanja otvorenog sistema.

Osnovne jednadžbe geometrijskog mjesta korijena jesu:

$$1+G_0(s)=1+K\frac{B(s)}{C(s)}=0 \tag{6.1}$$

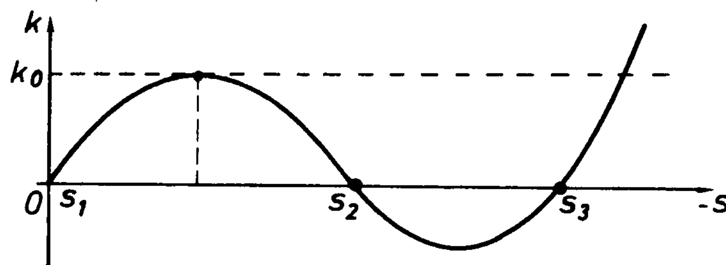
$$\arg G_0(s) = 180° + n \cdot 360, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6.2}$$

gdje je: $G_0(s)$ – prijenosna funkcija otvorenog sistema.

Iz karakteristične jednadžbe zatvorenog sistema (6.1) proizlazi jednadžba:

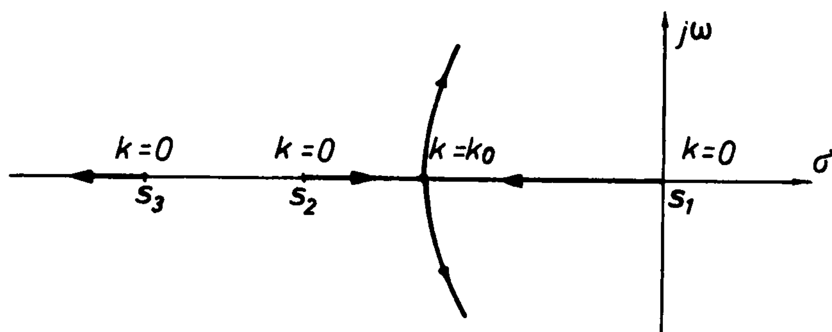
$$K = -\frac{C(s)}{B(s)} \tag{6.3}$$

kojom se može odrediti graf $K = f(-s)$, na temelju kojeg se određuju realni dijelovi geometrijskog mjesta korijena.



Slika 6.1.

Na primjer, za grafički prikaz $K = f(-s)$ sl. 6.1, za $K = 0$, realni korijeni su $s_1 = 0$; s_2 i s_3. S porastom koeficijenata pojačanja do iznosa $K = K_0$ dolazi do približavanja korijena s_1 i s_2. U točki $K = K_0$ korijeni s_1 i s_2 postaju kompleksni, a korijen s_3 raste od s_3 do ∞ (sl. 6.2).



Slika 6.2.

Kompleksni dijelovi geometrijskog mjesta korijena mogu se odrediti uvrštenjem u (6.3) $s = -\sigma + j\omega$ ili $s = -\sigma - j\omega$;

$$K = -\frac{C(-\sigma + j\omega)}{B(-\sigma + j\omega)} = K_1(\alpha, \omega) + jK_2(\alpha, \omega) \tag{6.4}$$

Budući da je K realan broj, iz (6.4) proizlazi

$$\begin{aligned} K_1(\sigma, \omega) &= K \\ K_2(\sigma, \omega) &= 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Iz jednadžbe (6.5) proizlazi jednadžba geometrijskog mjesta korijena:

$$\omega = f(\sigma) \tag{6.6}$$

Konstrukcija geometrijskog mjesta korijena može se dosta pojednostavniti ako se primijene sljedeća pravila:

1. *Broj geometrijskih mjesta korijena jednak je stupnju karakteristične jednadžbe razmatranog sistema.*
2. *Trajektorije korijena za* $K=0$ počinju u polovima prijenosne funkcije otvorenog sistema.
3. Ako prijenosna funkcija otvorenog sistema ima m nula i n polova ($n \geq m$), to je za $K \to \infty$; m trajektorija korijena završava u nulama prijenosne funkcije, a $n-m$ trajektorija teži u beskonačnost.
4. Asimptote trajektorija koje teže u beskonačnost sijeku se na realnoj osi u točki s apscisom:

$$X_0 = \frac{(suma\ iznosa\ polova) - (suma\ iznosa\ nula)}{(broj\ polova) - (broj\ nula)}.$$

Ako se prijenosna funkcija otvorenog sistema prikaže u obliku:

$$G_0(s) = \frac{b(s)}{c(s)} = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0}{s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \ldots + c_0}$$

bit će:

$$X_0 = \frac{-(c_{n-1} - b_{m-1})}{n-m} \tag{6.7}$$

Smjerovi asimptota prema pozitivnoj realnoj poluosi određuju se izrazom:

$$\psi_r = \frac{180}{n-m} + r\frac{360}{n-m}, \qquad r = 0, 1 \ldots (n-m) \tag{6.8}$$

5. Kompleksni dijelovi trajektorija korijena uvijek su konjugirano-kompleksni.
6. Točke presjeka trajektorija s imaginarnom osi određuju se izrazima:

$$\begin{aligned} Re[1 + G_0(j\omega)] &= f_1(K, \omega) = 0 \\ Im[1 + G_0(j\omega)] &= f_2(K, \omega) = 0 \end{aligned} \tag{6.9}$$

7. Ako je u karakterističnoj jednadžbi (6.1) $n-m \geq 2$, suma iznosa polova konstantna je veličina, tj. nije ovisna o iznosu pojačanja K, pa ako jedan dio trajektorija korijena pri porastu K krene nadesno, drugi dio će krenuti nalijevo u s-ravnini.
8. Kad funkcija $G_0(s)$ ima pol u koordinatnom početku, slobodni član karakteristične jednadžbe zatvorenog sistema proporcionalan je s pojačanjem K.

Primjer 6.1.

Potrebno je odrediti geometrijsko mjesto korijena sistema s prijenosnom funkcijom:

$$G_0(s) = \frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)} = \frac{K}{s(1+0{,}1s)(1+0{,}02s)} \tag{6.10}$$

Jednadžba (6.10) u ovom slučaju ima oblik:

$$s\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)+\frac{K}{T_1T_2}=0 \tag{6.11}$$

odnosno:

$$s\,(s+10)\,(s+50)+\nu=0 \tag{6.12}$$

gdje je: $\nu=K/T_1T_2$.

Za razmatrani sistem $n=3$, $m=0$; $s_1=0$; $s_2=-10s^{-1}$; $s_3=-50s^{-1}$; $n-m=3$. Iz polova polaze tri trajektorije korijena, a budući da je $m=0$, sve tri grane za $\nu\to\infty$, teže u beskonačnost. Točka presjeka asimptota je:

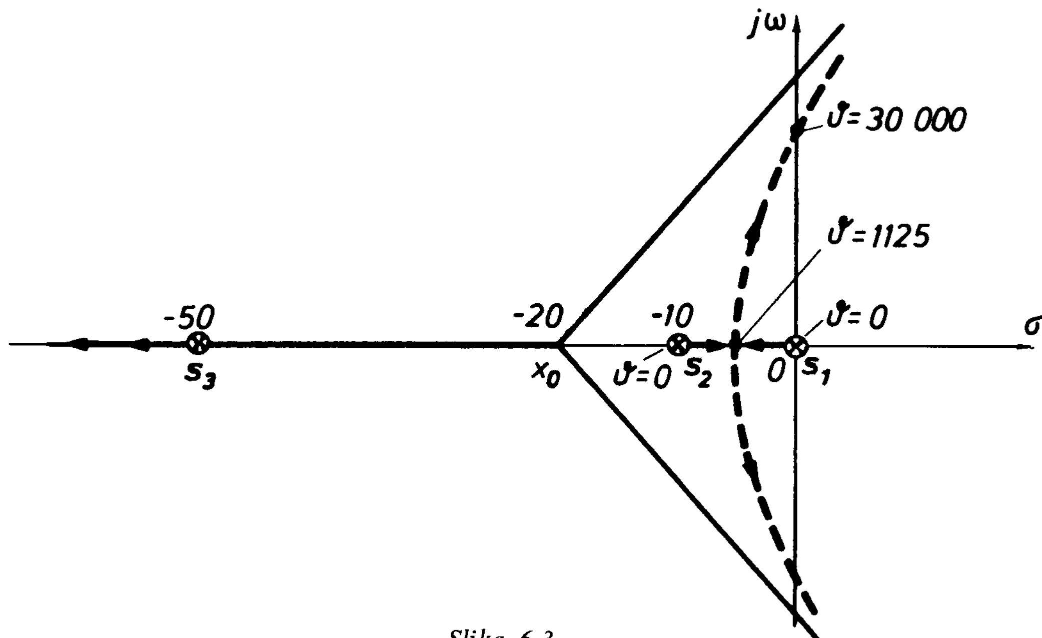
$$X_0=-\frac{(c_{n-1}-b_{m-1})}{n-m}=\frac{-10-50-0}{3}=-20s^{-1}$$

Primjenom (6.8) proizlaze kutevi asimptota:

$$\psi_1=60°;\qquad \psi_2=180°;\qquad \psi_3=300°.$$

Točke presjeka trajektorija s imaginarnom osi proizlaze iz jednadžbi (6.9): $\nu=30\,000s^{-3}$.

Geometrijsko mjesto korijena prikazano je na sl. 6.3.



Slika 6.3.

Iz grafičkog prikaza (sl. 6.3) proizlazi da sistem postaje nestabilan za $\nu\geq 30\,000$ odnosno $K\geq T_1T_2\nu=60s^{-1}$.

Za analitičko određivanje geometrijskog mjesta korijena karakteristična jednadžba zatvorenog sistema prikaže se u obliku polinoma razvijenih u Taylorov red. Jednadžba (6.1) prikazuje se u obliku:

$$1+K\frac{B\,(s)}{C\,(s)}=C\,(s)+KB\,(s)=a\,(s)=0 \tag{6.13}$$

odnosno:

$$a(s)=a(\sigma+j\omega)=a(\sigma)+\left(\frac{da}{ds}\right)_\sigma\cdot j\omega+\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2a}{ds^2}\right)_\sigma\cdot(j\omega)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{d^3a}{ds^3}\right)_\sigma\cdot(j\omega)^3+\ldots+ \quad (6.14)$$

gdje indeks σ označava da se u izrazima za derivacije uvrštavao $s=\sigma$. Sređivanjem (6.14) proizlazi:

$$C(\sigma)=\left[C(\sigma)-\frac{\omega^2}{2!}C''(\sigma)+\frac{\omega^4}{4!}C^{(IV)}(\sigma)-\ldots\right]+$$

$$+j\omega\left[C'(\sigma)-\frac{\omega^2}{3!}C'''(\sigma)+\ldots\right] \quad (6.15)$$

$$KB(\sigma)=K\left[B(\sigma)-\frac{\omega^2}{2!}B''(\sigma)+\frac{\omega^4}{4!}B^{(IV)}(\sigma)-\ldots\right]+$$

$$+Kj\omega\left[B'(\sigma)-\frac{\omega^2}{3!}B'''(\sigma)+\ldots\right] \quad (6.16)$$

Iz (6.13), (6.15) i (6.16) proizlazi:

$$\left[C(\sigma)-\frac{\omega^2}{2!}C(\sigma)+\ldots\right]+K\left[B(\sigma)-\frac{\omega^2}{2!}B''(\sigma)+\ldots\right]=0 \quad (6.17)$$

$$\left[C'(\sigma)-\frac{\omega^2}{3!}C'''(\sigma)+\ldots\right]+K\left[B'(\sigma)-\frac{\omega^2}{3!}B'''(\sigma)+\ldots\right]=0 \quad (6.18)$$

Eliminiranjem iz (6.17) i (6.18) slobodnog parametra K, proizlazi jednadžba koja povezuje apscisu σ i ordinatu ω bilo koje točke $s=\sigma+j\omega$ geometrijskog mjesta korijena:

$$\begin{vmatrix}\left[C(\sigma)-\frac{\omega^2}{2!}C''(\sigma)+\ldots\right] & \left[B(\sigma)-\frac{\omega^2}{2!}B''(\sigma)+\ldots\right]\\ \left[C'(\sigma)-\frac{\omega^2}{3!}C'''(\sigma)+\ldots\right] & \left[B'(\sigma)-\frac{\omega^2}{3!}B'''(\sigma)+\ldots\right]\end{vmatrix}=0 \quad (6.19)$$

Iznos slobodnog parametra K koji odgovara zadanom korijenu geometrijskog mjesta korijena određen je izrazima:

$$-K=\frac{C(\sigma)-\frac{\omega^2}{2!}C''(\sigma)+\ldots}{B(\sigma)-\frac{\omega^2}{2!}B''(\sigma)+\ldots} \quad (6.20)$$

$$-K=\frac{C'(\sigma)-\frac{\omega^2}{3!}C'''(\sigma)+\ldots}{B'(\sigma)-\frac{\omega^2}{3!}B'''(\sigma)+\ldots} \quad (6.21)$$

Pomoću jednadžbe (6.20) određuju se iznosi slobodnog parametra K koji odgovaraju realnim i konjugirano-kompleksnim točkama trajektorije korijena, a primjenom (6.21) mogu se odrediti iznosi K koji odgovaraju samo konjugirano-kompleksnim korijenima.

Uvrštenjem u (6.19) $\sigma=0$, proizlazi jednadžba kojom su određeni kritični (granični) iznosi frekvencije, tj. točke presjeka trajektorija konjugirano-kompleksnih korijena s imaginarnom osi.

Uvrštenjem $\sigma=0$ u (6.20) proizlazi granični iznos slobodnog parametra.

Primjer 6.2.

Potrebno je analitički odrediti geometrijsko mjesto korijena za sistem s prijenosnom funkcijom oblika:

$$G_0(s)=\frac{100\,(1+sT)}{s\,(1+s)\,(1+0{,}01s)} \tag{6.22}$$

Slobodni parametar vremenska je konstanta derivatne komponente T.
Karakteristična jednadžba zatvorenog sistema (6.13) poprima oblik:

$$C(s)+KB(s)=s\,(1+s)\,(1+0{,}01s)+100\,(1+sT) \tag{6.23}$$

odnosno:

$$C(s)=0{,}01s^3+1{,}01s^2+s+100$$

$$B(s)=100s$$

Za primjenu izraza (6.19) određuju se derivacije polinoma $A(s)$ i $B(s)$:

$$C'(s)_\sigma=0{,}03\sigma^2+2{,}02\sigma+1$$

$$C''(s)_\sigma=0{,}06\sigma+2{,}02$$

$$C'''(s)_\sigma=0{,}06$$

$$B'(s)_\sigma=100$$

$$B''(s)_\sigma=0$$

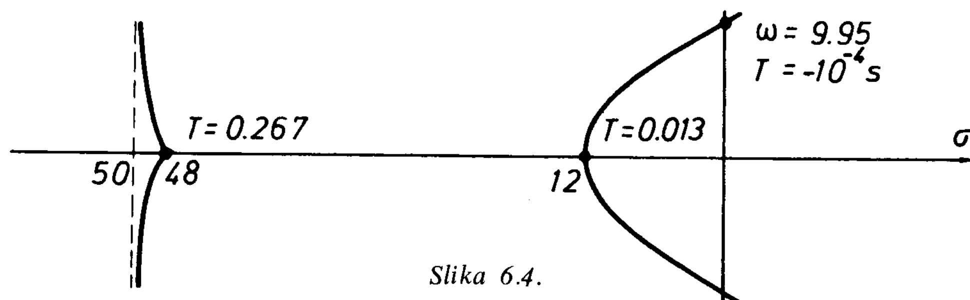
Uvrštenjem u (6.19) izračunavanjem determinante i sređivanjem proizlazi:

$$-2\sigma^3-101\sigma^2+10\,000=\omega^2\,(2\sigma+101) \tag{6.24}$$

odnosno:

$$\omega=\pm\sqrt{\frac{-2\sigma^3-101\sigma^2+10.000}{2\sigma+101}} \tag{6.25}$$

Iz (6.25) za $\sigma=0$, proizlazi granični iznos frekvencije, $\omega_g=9{,}95s^{-1}$, a iz (6.21) za $\sigma=0$ i $\omega=9{,}95$ slijedi $-T_{gr}=10^{-4}s$. Iz (6.25) za $\omega=0$, dobiju se dva realna korijena; $\sigma\approx-12$ i $\sigma\approx-48$. Iz geometrijskog mjesta korijena (sl. 6.4) slijedi da



Slika 6.4.

postoji jedan realan korijen i dva konjugirano-kompleksna korijena, te da je stabilno područje za sve iznose $-10^{-4} < T < \infty$.

Pri određivanju geometrijskog mjesta korijena vrlo često se ukazuje potreba za kombiniranje grafičkog i analitičkog postupka.

6.2. Postupak D-rastavljanja

Postupak je predložio J. I. Nejmark 1948, a sastoji se u određivanju stabilnih i nestabilnih područja *n*-dimenzionalnog prostora parametara sistema. Područjima nestabilnog režima rada uvijek odgovara isti broj korijena karakteristične jednadžbe s pozitivnim realnim dijelom. Područje stabilnosti odgovara području parametara sistema u kojem svi korijeni karakteristične jednadžbe imaju negativne realne dijelove.

Pri određivanju krivulje D-rastavljanja koristi se postupak određivanja ruba stabilnosti sistema pomoću hodografa Mihajlova (5.31):

$$A(j\omega) = D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega) = 0 \tag{6.26}$$

Jednadžba (6.26) može biti zadovoljena samo u slučajevima kada karakteristična jednadžba zatvorenog sistema sadrži barem jedan nulti realan korijen ili par imaginarnih korijena.

Pretpostavimo li da karakteristična jednadžba sadrži dva promjenljiva parametra α i β, jednadžba (6.26) poprima oblik:

$$D(j\omega, \alpha, \beta) = X(\omega, \alpha, \beta) + jY(\omega, \alpha, \beta) = 0 \tag{6.27}$$

odnosno:

$$\begin{aligned} X(\omega, \alpha, \beta) &= 0 \\ Y(\omega, \alpha, \beta) &= 0 \end{aligned} \tag{6.28}$$

Sistem jednadžbi (6.28) omogućava da se ravnina parametra ($\alpha \Lambda\ \beta$) razdijeli na područja s određenim položajima korijena karakteristične jednadžbe u ravnini korijena i da se odrede područja promjene α i β u kojima će sistem biti stabilan.

Uvjet (6.28) će biti zadovoljen pri nekoj frekvenciji $\omega = \omega_1$ i parametrima $\alpha = \alpha_1$; $\beta_1 = \beta_1$, što odgovara prolazu hodografa Mihajlova kroz koordinatni početak. Ako se promijeni iznos frekvencije, npr. $\omega = \omega_2$, da bi se udovoljilo uvjetu (6.28) i parametri moraju poprimiti nove iznose $\alpha = \alpha_2$ i $\beta = \beta_2$, tj. promjenom frekvencije u granicama $-\infty < \omega < \infty$, uz zadovoljavanje uvjeta (6.26) dobije se područje promjene iznosa parametara α, β koji odgovaraju rubu stabilnosti sistema.

Rješavanjem sistema jednadžbi (6.28) po parametrima α i β proizlaze jednadžbe *krivulje D-rastavljanja* u ravnini dva promjenljiva parametra:

$$\begin{aligned} \alpha &= f_1(\omega) \\ \beta &= f_2(\omega) \end{aligned} \tag{6.29}$$

Kada među parametrima α i β postoji linearna ovisnost jednadžbe (6.27) i (6.28) mogu se pisati u obliku:

$$D(j\omega) = \alpha G(j\omega) + \beta H(j\omega) + L(j\omega) = 0 \tag{6.30}$$

$$\begin{aligned} X(\omega, \alpha, \beta) &= \alpha G_1(\omega) + \beta H_1(\omega) + L_1(\omega) = 0 \\ Y(\omega, \alpha, \beta) &= aG_2(\omega) + \beta H_2(\omega) + L_2(\omega) = 0 \end{aligned} \tag{6.31}$$

gdje je:

$$G(j\omega) = G_1(\omega) + jG_2(\omega)$$

$$H(j\omega) = H_1(\omega) + jH_2(\omega)$$

$$L(j\omega) = L_1(\omega) + jL_2(\omega)$$

Iz (6.31) proizlazi:

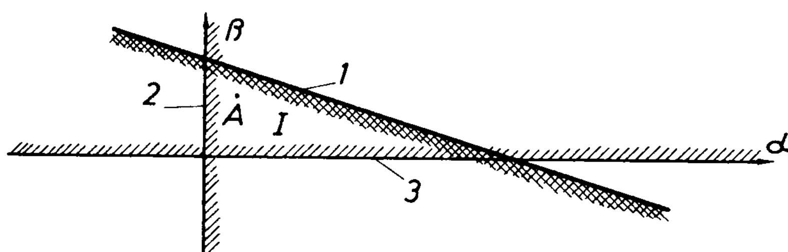
$$\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\Delta}; \qquad \beta = \frac{\Delta\beta}{\Delta} \tag{6.32}$$

gdje je:

$$\Delta = G_1 H_2 - G_2 H_1; \qquad \Delta\alpha = H_1 L_2 - H_2 L_1; \qquad \Delta\beta = G_2 L_1 - G_1 L_2 \tag{6.33}$$

Za svaki iznos ω iz (6.32) proizlazi iznos $\alpha(\omega)$ i $\beta(\omega)$ kojima je određena točka D-krivulje u ravnini (α, β). Kao dijelovi D-krivulje mogu se pojaviti singularni pravci, naime, pri $\omega = 0$, $\omega = \infty$ i $\omega = \omega_{gr}$, iznosi $\Delta\alpha/\Delta$ i $\Delta\beta/\Delta$ postaju neodređeni, tipa $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. U tim slučajevima prestaje linearna ovisnost u sistemu jednadžbi (6.31), jer za navedene iznose ω, ne dobije se točka D-krivulje već pravac. Singularni pravac koji se dobije za $\omega = 0$, odgovara prolazu jednog korijena kroz imaginarnu os u koordinatnom početku. Singularni pravac koji se dobije za $\omega = \infty$, odgovara prijelazu u beskonačnost jednog korijena karakteristične jednadžbe. Singularni pravac koji se dobije pri nekom graničnom iznosu frekvencije ω_{gr}, odgovara prolazu kroz imaginarnu os para konjugirano-kompleksnih korijena.

Iz dosad izloženog proizlazi da pri određivanju krivulje D-rastavljanja i singularnih pravaca. ravnina parametara (α, β) rastavlja se na više područja među kojima mogu biti i područja stabilnosti (sl. 6.5).



Slika 6.5.

Svaka točka krivulje D-rastavljanja određuje iznose parametara α i β pri kojima karakteristična jednadžba ima čisto imaginarne korijene. S obzirom da krivulja D-rastavljanja odgovara granici (rubu) stabilnosti sistema, to prijelaz te granice odgovara prijelazu barem jednog realnog korijena ili parakompleksnih korijena karakteristične jednadžbe kroz imaginarnu os. Iz izloženog proizlazi da će u područjima s jedne i druge strane D-krivulje broj korijena s pozitivnim realnim dijelom biti različit. Određivanje područja stabilnosti svodi se na određivanje područja unutar kojeg nema korijena s pozitivnim realnim dijelom. Ovo područje određuje se primjenom pravila o „šrafiranju“ D-krivulje i singularnih pravaca.

Ako je pri porastu frekvencije $-\infty < \omega < 0$ i $0 < \omega < \infty$ determinanta sistema $\Delta > 0$, šrafira se lijeva strana D-krivulje i singularnih pravaca, a ako je $\Delta < 0$, šrafira se desna strana D-krivulje i singularnih pravaca.

U točkama D-krivulje $\omega = 0$ i $\omega = \infty$, šrafirane strane D-krivulje i singularnih pravaca moraju biti okrenute jedna prema drugoj. Ako u točkama presjeka sa singularnim pravcima pri $\omega \neq 0$ i $\omega \neq \infty$, determinanta sistema $\Delta = 0$ ali bez promjene

znaka (što je rijedak slučaj), singularni procesi ne šrafiraju se i ne ulaze u područje D-rastavljanja.

Područja koja su sa svih strana ograničena s D-krivuljom i singularnim pravcima, područja su koja mogu biti stabilna. Provjera se vrši za jednu točku unutar šrafiranog područja primjenom nekog od kriterija stabilnosti. Na primjer (sl. 6.5) ako se primjenom jednog od kriterija stabilnosti pri iznosu parametara α i β kojima je određena točka A dobije da je sistem stabilan, onda će sistem biti stabilan unutar cijelog šrafiranog područja (područje I, sl. 5.6).

Postupak D-rastavljanja može se primijeniti i u slučajevima kada parametri α i β uvjetuju nelinearnost karakteristične jednadžbe sistema. U takvim slučajevima sistem jednadžbe (6.28) je nelinearan. Šrafiranje krivulje D-rastavljanja obavlja se analogno kao i kod linearnih ovisnosti (6.28) s time da se umjesto determinante Δ razmatra Jakobijana.

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{vmatrix} \tag{6.34}$$

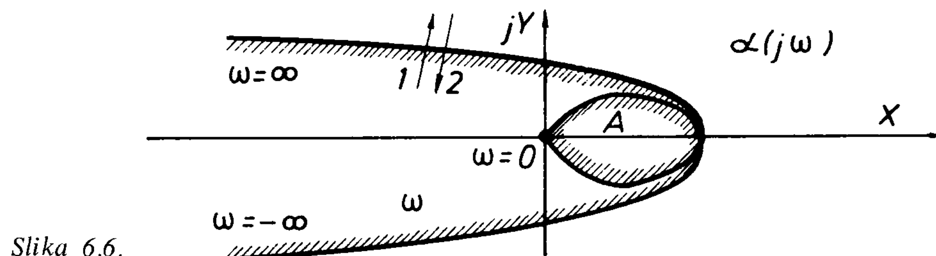
Pri određivanju područja stabilnosti postupkom D-rastavljanja u ravnini jednog promjenljivog parametra, karakteristična jednadžba sistema svodi se na oblik:

$$D\,(j\omega)=Q\,(j\omega)+\alpha R\,(j\omega)=0 \tag{6.35}$$

odnosno:

$$\alpha\,(j\omega)=-\frac{Q\,(j\omega)}{R\,(j\omega)}=X\,(\omega)+jY\,(\omega) \tag{6.36}$$

Pri promjeni frekvencije u granicama $-\infty<\omega<\infty$, određuju se D-krivulja u kompleksnoj ravnini (X, jY) (sl. 6.6).



Slika 6.6.

Za određivanje krivulje D-rastavljanja dovoljno je koristiti samo pozitivne iznose frekvencije, tj. $0\leq\omega<\infty$, a zatim dobiveni dio krivulje zrcalno preslikati u odnosu na realnu os.

D-krivulju (sl. 6.6) moguće je razmatrati kao rezultat transformiranja imaginarne kompleksne ravnine korijena karakteristične jednadžbe. Lijevoj poluravnini kompleksne ravnine korijena odgovara dio ravnine promjenljivog parametra α koji se nalazi lijevo od krivulje D-rastavljanja gledajući u smjeru porasta frekvencije ω, što odgovara šrafiranom području (sl. 6.6). Ako se u ravnini α prelazi granica D-krivulje u smjeru šrafiranog dijela (strelica 1, sl. 6.6) u ravnini korijena, jedan korijen prelazi kroz imaginarnu os u lijevu poluravninu i obrnuto (strelica 2, sl. 6.6), jedan korijen iz lijeve poluravnine prelazi u desnu poluravninu.

U linearnim sistemima promjenljivi parametar realna je veličina (koeficijent pojačanja, vremenska konstanta) pa je od praktičkog interesa samo dio D-područja na realnoj osi.

Primjenom elektroničkih računala moguće je rješavati zadatke D-rastavljanja analizom velikog broja točaka u ravnini promjenljivih parametara i određivanjem broja korijena u desnoj poluravnini primjenom Routhova kriterija.

Primjer 6.3.

Prijenosna funkcija otvorenog sistema ima oblik:

$$G_0(s)=\frac{K(\tau s+1)}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$$

gdje je: $K=50$; $T_1=0{,}4s$; $T_2=0{,}1s$.

Potrebno je odrediti utjecaj vremenske konstante derivativnog člana τ na stabilnost zatvorenog sistema.

Karakteristična jednadžba zatvorenog sistema je:

$$1+G_0(s)=T_1 T_2 s^3+(T_1+T_2)s^2+(1+K\tau)s+K=0 \tag{6.37}$$

odnosno:

$$0{,}04s^3+0{,}5s^2+(1+50\tau)s+50=0 \tag{6.38}$$

Iz (6.36) i (6.38) proizlazi:

$$\tau=-\frac{1}{50s}(0{,}04s^3+0{,}5s^2+s+50)$$

odnosno:

$$\tau(j\omega)=-\frac{1}{50j\omega}(-j\,0{,}04\,\omega^3-0{,}5\omega^2+j\omega+50)=X(\omega)+jY(\omega)$$

gdje je:

$$X=0{,}02\,(-1+0{,}04\,\omega^2)$$
$$Y=\frac{1}{\omega}(1-0{,}01\,\omega^2) \tag{6.39}$$

Za određivanje krivulje D-rastavljanja potrebno je izračunati iznose X i Y za $\omega=0$ i $\omega=\infty$.

$$\omega=0; \quad X=-0{,}02; \quad Y=+\infty$$
$$\omega=\pm\infty; \quad X=+\infty; \quad Y=-\infty \tag{6.40}$$

Iz (6.39) proizlaze točke presjeka D-krivulje s imaginarnom i realnom osi:

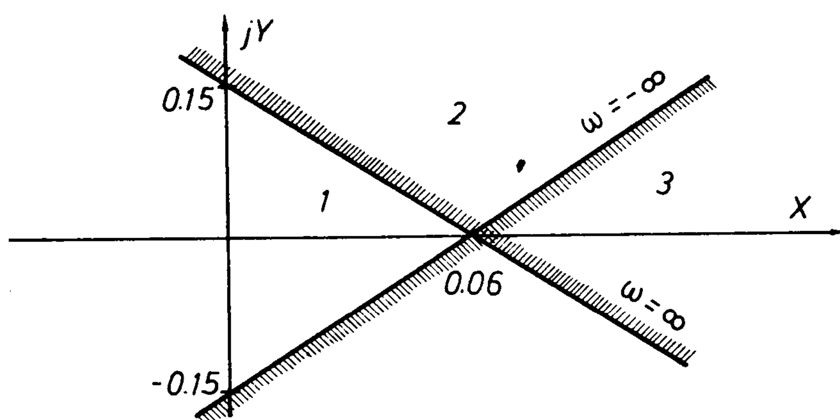
$$\omega_1=\sqrt{\frac{1}{0{,}04}}=5; \quad Y=0{,}15$$
$$\omega_2=\sqrt{\frac{1}{0{,}01}}=10; \quad X=0{,}06 \tag{6.41}$$

Na osnovi (6.40) i (6.41) određena je krivulja D-rastavljanja (sl. 6.7).

Kako je iz sl. 6.7. vidljivo, ravnina kompleksnog parametra τ podijeljena je na tri područja od kojih na stabilnost pretendira područje 3. Ako se u tom području odabere $\tau = 0{,}1$, karakteristična jednadžba (6.38) poprima oblik:

$$0{,}04s^3 + 0{,}5s^2 + 6s + 50 = 0 \tag{6.42}$$

Primjenom Hurwitzova kriterija slijedi da je za $\tau = 0{,}1$ sistem stabilan, odnosno sistem će biti stabilan u području 3, tj. za $\tau > 0{,}06$.



Slika 6.7.

Primjer 6.4.

Prijenosna funkcija otvorenog sistema ima oblik:

$$G_0(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

potrebno je odrediti utjecaj vremenskih konstanti τ i T_2 na stabilnost sistema ako je $K = 50$; $T_1 = 0{,}4s$.

Karakteristična je jednadžba zatvorenog sistema:

$$1 + G_0(s) = T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + (1 + K)s + K = 0, \tag{6.43}$$

odnosno:

$$0{,}4T_2 s^3 + (0{,}4 + T_2)s^2 + (1 + 50\tau)s + 50 = 0 \tag{6.44}$$

Iz (6.44) proizlazi:

$$T_2(0{,}4s^3 + s^2) + \tau 50s + (0{,}4s^2 + s + 50) = 0 \tag{6.45}$$

Zamjenom u (6.45) $s = j\omega$, te odvajanjem realnog i imaginarnog dijela prema (6.31) proizlazi:

$$\begin{aligned} X(\omega, T_2, \tau) &= -T_2\omega^2 + 50 - 0{,}4\omega^2 = 0 \\ Y(\omega, T_2, \tau) &= -T_2 \cdot 0{,}4\omega^3 + \tau \cdot 50\omega + \omega = 0 \end{aligned} \tag{6.46}$$

Determinante Δ, ΔT_2 i $\Delta\tau$ sistema (6.46) prema (6.34) jesu:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\omega^2 & 0 \\ -0{,}4\omega^3 & 50\omega \end{vmatrix} = -50\omega^3 \tag{6.47}$$

$$\Delta T_2 = \begin{vmatrix} -(50+0{,}4\omega^2) & 0 \\ -\omega & 50\omega \end{vmatrix} = -(50-0{,}4\omega^2)\,\omega\cdot 50$$

$$\Delta\tau = \begin{vmatrix} -\omega^2 & -(50-0{,}4\omega^2) \\ -0{,}4\omega^3 & -\omega \end{vmatrix} = \omega^3 - 0{,}4\omega^3\,(50-0{,}4\omega^2)$$

Primjenom (6.32) proizlazi:

$$T_2 = \frac{\Delta T_2}{\Delta} = \frac{50}{\omega^2} - 0{,}4 \tag{6.48}$$

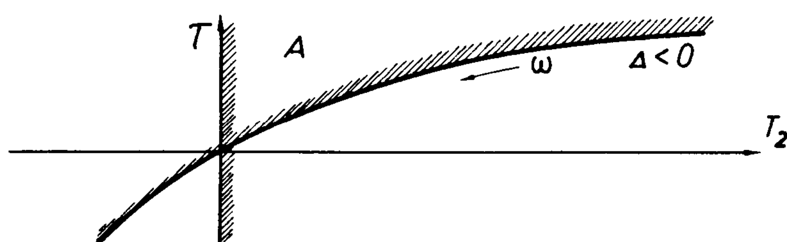
$$\tau = \frac{\Delta\tau}{\Delta} = 0{,}02\,(19-0{,}16\omega^2) \tag{6.49}$$

Za različite iznose ω iz (6.48) i (6.49) proizlaze iznosi promjenljivih parametara T_2 i τ kojima je određena krivulja D-rastavljanja (tablica 6.1).

tablica 6.1.

ω	0	5	6	7	8	9	10	$\sqrt{\frac{19}{0{,}16}}$	$\sqrt{\frac{50}{0{,}4}}$	15	$\pm\infty$
T_2	∞	1,60	0,99	0,62	0,38	0,22	0,1	0,02	0	−0,18	−0,4
τ	0,38	0,30	0,27	0,22	0,18	0,12	0,06	0	−0,02	−0,34	$-\infty$

Krivulja D-rastavljanja određena prema tablici 6.1. prikazana je na sl. 6.8



Slika 6.8.

S obzirom da je duž krivulje D-rastavljanja pri porastu frekvencija $\omega > 0$, $\Delta < 0$, šrafira se desna strana krivulje. Determinanta sistema $\Delta = 50\,\omega^2$ za $\omega \neq 0$ uvijek je različita od nule, tj. slobodni član karakteristične jednadžbe $a_0 = 50$ nije ovisan o parametrima T_2 i τ pa za $\omega = 0$ ne postoji singularni pravac. Koeficijent $a_n = 0{,}4\,T_2$ ovisi o parametru T_2, pa za $T_2 = 0$ slijedi jednadžba singularnog pravca, a to je ordinatna os τ koja se asimptotski približava D-krivulji za $\omega = \infty$.

Iz slike 6.8. vidljivo je da se ravnina parametara (T_2, τ) dijeli na četiri područja od kojih područje A pretendira na moguće područje stabilnosti. Provjera stabilnosti može se izvršiti po Hurwitzovom kriteriju npr. za $T_2 = \tau = 0{,}2$. Karakteristična jednadžba sistema u navedenom slučaju je:

$$0{,}08\,s^3 + 0{,}6\,s^2 + 11\,s + 50 = 0 \tag{6.50}$$

Primjenom Hurwitzova kriterija na (6.50) proizlazi:

$$0{,}6 \cdot 11 = 6{,}6 > 0{,}08 \cdot 50 = 4 \tag{6.51}$$

tj. područje A ravnine (T_2, τ) stabilno je područje.

Primjer 6.5.

Potrebno je odrediti utjecaj parametara K i τ na stabilnost sistema iz prethodnog primjera za $T_1 = 0{,}4\,s$ i $T_2 = 0{,}1\,s$.

Karakteristična jednadžba zatvorenog sistema je:

$$T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + (1 + K\tau) s + K = 0$$

odnosno:

$$0{,}4\,s^3 + 0{,}5\,s^2 + (1 + K\tau)\,s + K = 0 \tag{6.52}$$

Uvrštenjem u (6.52) $K\tau = \alpha$ i $K = \beta$, sistem jednadžbi (6.31) poprima oblik:

$$X(\omega, \alpha, \beta) = -0{,}5\,\omega^2 + \beta$$
$$Y(\omega, \alpha, \beta) = -0{,}04\,\omega^3 + \omega + \alpha \tag{6.53}$$

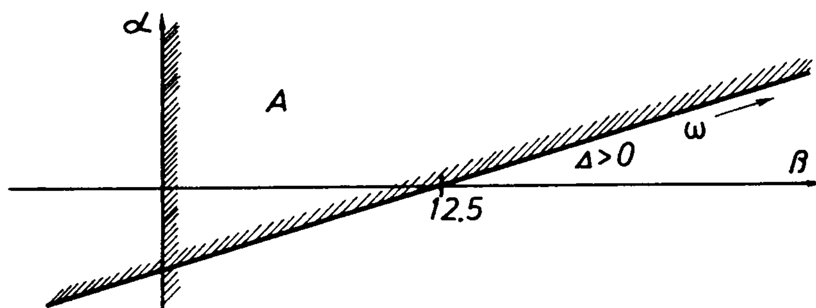
Iz (6.53) proizlazi:

$$\beta = 0{,}5\,\omega^2$$
$$\alpha = -1 + 0{,}4\,\omega^2$$
$$\Delta = \omega.$$

Krivulja D-rastavljanja (sl. 6.9) određena je iznosima parametara navedenih u tablici 6.2.

Tablica 6.2.

ω	0	$\sqrt{\frac{1}{0{,}04}}$	6	7	8	9	10	11	12	14	$\pm\infty$
α	−1	0	0,4	0,96	1,6	2,24	3	3,84	4,76	6,84	$+\infty$
β	0	12,5	18	24,5	32	40,5	50	60,5	72	98	$+\infty$



Slika 6.9.

Primjenom Hurwitzova kriterija za $\beta = 20$ i $\alpha = 2$, proizlazi da je pretendentno područje A stabilno područje. Budući da je $\alpha = K\tau$ pozitivna veličina, područje stabilnosti je dio područja A koji se nalazi u prvom kvadrantu.

6.3. Strukturna stabilnost SAU

Pojam strukturne stabilnosti SAU vezan je za postojanje oblasti stabilnosti u prostoru parametara sistema. Ovisno o postojanju oblasti stabilnosti, razlikuju se *strukturno stabilni* i *strukturno nestabilni SAU*. Za razliku od strukturno stabilnih sistema, stabilnost strukturno nestabilnih sistema nije moguće postići promjenom iznosa parametara (ne postoji oblast stabilnosti), već isključivo promjenom strukture sistema.

U nekim slučajevima postojanje područja stabilnosti može se odrediti prema obliku strukturne sheme sistema. Za sisteme zatvorene jediničnom povratnom vezom s karakterističnom jednadžbom $C(s)+B(s)=0$, gdje je $C(s)$ produkt dinamičkih komponenata oblika s, $1+sT$, $1+2\xi Ts+T^2s^2$, $1+T^2s^2$ i $sT-1$, a $B(s)$ je polinom koji sadrži korijene s negativnim realnim dijelom, formulacija kriterija strukturne stabilnosti (tj. uvjeta postojanja oblasti stabilnosti) glasi: SAU će biti strukturno stabilan ako su ispunjeni uvjeti:

$$m>q+l-1 \tag{6.54}$$

i jedna od nejednadžbi iz tablice 6.3.

Tablica 6.3.

μ \ m	$m=0$	$m>0$ parno	$m<0$ neparno
μ parno	$N>4\rho$	$N>4\rho-1$	$N>4\rho-2$
μ neparno	$N>4\rho$	$N>4\rho$	$N>4\rho+1$

Oznake u tablici 6.3. jesu:

μ = $q+l+2r$

m – stupanj polinoma $B(s)$

n – stupanj polinoma $C(s)$; $n>m$

q – broj dinamičkih komponenata $G(s)=s$ u polinomu $C(s)$

l – broj dinamičkih komponenata $G(s)=Ts-1$ u polinomu $C(s)$

r – broj dinamičkih komponenata $G(s)=1+T^2s^2$ u polinomu $C(s)$

N = $n+m$

ρ – cijeli dio razlomka $\frac{\mu}{2}$.

U slučajevima kada sistem sadrži idealnu diferencijalnu dinamičku komponentu prvog reda, tj. $B(s)=Bs+K$, uvjeti strukturne stabilnosti određeni su izrazima

1. $q+l<2$ (6.55)

Tablica 6.4.

2.

$q+l$	0	1	2
nejednadžba	$n>4r-3$	$n>4r$	$n>4r+1$

Primjer 6.6.

Za prijenosnu funkciju otvorenog sistema:

$$G_o(s)=\frac{B(s)}{C(s)}=\frac{K}{s(1+sT)(1+sT_2)}$$

$q=1$, $l=0$, $n=3$, $r=0$ zatvoreni sistem strukturno je stabilan.

Primjer 6.7.

Neka je

$$G_o(s)=\frac{K}{s^2(1+sT_1)}$$

$q=2$, $l=0$, uvjet $q+l<2$ nije ispunjen, zatvoren sistem strukturno je nestabilan.

Primjer 6.8.

Neka je prijenosna funkcija otvorenog sistema:

$$G_o(s)=\frac{K}{s(-1+sT_1)}$$

$q=1$, $l=1$; zatvoreni sistem strukturno je nestabilan.

Primjer 6.9.

Neka je

$$G_o(s)=\frac{K(1+sT_2)}{s(-1+sT_1)}$$

$q=1$, $l=1$, $n=2$, $r=0$, zatovren sistem strukturno je nestabilan.

Primjer 6.10.

Neka je

$$G_o(s)=\frac{K(1+sT_2)}{s(1+s^2T_1^2)}$$

$q=1$, $l=0$; $q+l=1<2$, $r=1$, $n=2<4r=4$, zatvoren sistem strukturno je nestabilan.

6.4. Stabilnost nestacionarnih sistema

Pod linearnim sistemima s *promjenljivim parametrima* ili *nestacionarnim sistemima* (vidi 1.12.) razumijevaju se sistemi koji se opisuju linearnim diferencijalnim jednadžbama s promjenljivim koeficijentima:

$$[a_n(t)D^n+a_{n-1}(t)D^{n-1}+\ldots+a_0(t)]\,y(t)=[b_m(t)D^m+b_{m-1}(t)D^{m-1}+\ldots+b_0(t)]\,u(t) \qquad (6.56)$$

Postupci pri određivanju stabilnosti nestacionarnih sistema imaju svoju specifičnost i bitno se razlikuju od postupaka koji se primjenjuju u analizi stabilnosti stacionarnih sistema. Na primjer, ako se pretpostavi da je vodeća veličina sistema $u(t) = U^{\circ} = \text{const}$ i da se prijelazni proces završava u trenutku $t = t_1$, tj. u (6.56) operator $D = d/dt = 0$, izlazna veličina sistema u intervalu $t > t_1$ bit će određena jednadžbom:

$$y(t) = \frac{b_0(t)}{a_0(t)} u^{\circ} \tag{6.57}$$

Iz (6.57) vidljivo je da promjena izlazne veličine nestacionarnog sistema za $u(t) = u^{\circ}$, ovisi o karakteru promjene koeficijenata $a_0(t)$ i $b_0(t)$, tj. izlazna veličina općenito se može mijenjati neograničeno vrijeme. S obzirom da je vrijeme rada realnih sistema ograničeno, pojam asimptotske stabilnosti nestacionarnih sistema nema praktičkog smisla. Pri određivanju stabilnosti nestacionarnih sistema u praksi se koriste približne metode. Najjednostavnija metoda ima naziv *postupak zamrzavanja koeficijenata.* Taj postupak može se primjenjivati u slučajevima kada nestacionarni sistem radi u ograničenom vremenskom intervalu τ, a koeficijenti jednadžbe (6.56) za vrijeme trajanja prijelaznog procesa bitno se ne mijenjaju. Postupak se primjenjuje tako da se u nekom fiksiranom vremenu $t = t_k$ određuju odgovarajući iznosi koeficijenata $a_i(t_k)$ i $b_i(t_k)$, u izrazu (6.56), tj. u trenutku $t = t_k$ nestacionarni sistem opisuje se jednadžbom nekog fiktivnog stacionarnog sistema. Stabilnost tako dobivenog fiktivnog stacionarnog sistema određuje se primjenom nekog od kriterija stabilnosti. Pri tome se smatra da je stabilnost nestacionarnog sistema u trenutku $t = t_k$ određena stabilnošću fiktivnog stacionarnog sistema. Postupak se ponavlja za vrijeme rada sistema, tj. za interval $0 < t < \tau$.

Ako su uvjeti stabilnosti fiktivnog sistema u intervalu $0 < t < \tau$ zadovoljeni, razmatrani nestacionarni sistem smatra se stabilnim.

Potrebno je naglasiti da se rezultati dobiveni tim postupkom ne mogu smatrati dovoljno točnim, jer ovaj postupak nije matematički osnovan. Stupanj točnosti bit će dovoljno velik u slučajevima kada je promjena koeficijenata za vrijeme prijelaznog procesa dovoljno mala. Efikasnost ovog postupka također može ovisiti o pravilnom izboru fiksiranih trenutaka t_k, naime, izbor trenutaka t_k treba da bude takav da obuhvati sve moguće varijante iznosa koeficijenata, s posebnom pažnjom na „kritične" točke u kojima dolazi do znatnih promjena iznosa ili predznaka koeficijenata.

Primjer 6.11.

Sistem automatskog upravljanja opisuje se diferencijalnom jednadžbom

$$[0{,}1D^3 + 4{,}2D^2 + (72 - 0{,}1t)D + 400]\, y(t) = 400\, u(t) \tag{6.58}$$

potrebno je približno ocijeniti stabilnost sistema, ako rad sistema traje $\tau = 100\, s$.

Za određivanje približne ocjene stabilnosti sistema primjenom postupka „zamrzavanja" koeficijenata, prikladno je provesti analizu stabilnosti fiktivnog stacionarnog sistema u trenucima $t = 0$ i $t = \tau = 100\, s$.

Uvrštenjem u (6.58) $t = 0$ i $\tau = 100$, proizlaze karakteristične jednadžbe fiktivnog stacionarnog sistema:

$$0{,}1s^3 + 4{,}2s^2 + 72s + 400 = 0 \tag{6.59}$$

$$0{,}1s^3 + 4{,}2s^2 + 62s + 400 = 0 \tag{6.60}$$

Analizom izraza (6.59) proizlazi:

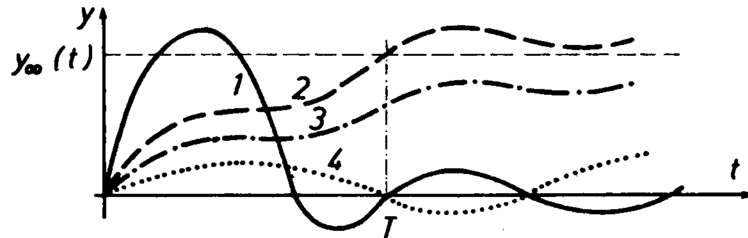
$s_1 = -10$; $s_{2,3} = (-16 \pm j\,12)$, vrijeme trajanja prijelaznog procesa $t_s \leq \frac{3}{10} = 0{,}33\,s$.

Analizom izraza (6.60) proizlazi:

$$s_1 = -25; \qquad s_{2,3} = (-8{,}8 \pm j\,8{,}7); \qquad t_s \leq \frac{3}{8{,}8} = 0{,}34\,s.$$

Za vrijeme prijelaznog procesa koeficijent $a_1(t)$ mijenja se za iznos $\Delta a_1 \approx 0{,}1 \cdot 0{,}34 = 0{,}034$, tj. za 0,05% pa se sistem može analizirati kao kvazistacionaran. Primjenom Hurwitzova kriterija slijedi: $a_1 a_2(t) > a_0 a_3$; $4{,}2\,(72 - 0{,}1t) > 40$, tj. razmatrani sistem je u intervalu $0 < t < 100$ stabilan.

Općenito, kada se koeficijenti jednadžbe (6.56) znatno mijenjaju, u analizi stabilnosti nestacionarnih sistema koristi se pojam *tehničke stabilnosti*, tj. stabilnosti na konačnom intervalu vremena rada sistema τ. *Sistem se smatra tehnički stabilnim ako izlazna veličina* $y(t)$ *ostaje u granicama dopuštenog iznosa* $y_{DOP}(t)$ *u intervalu* $0 < t < \tau$ (sl. 6.10).



Slika 6.10.

Krivulje 1 i 2 (sl. 6.10) odgovaraju *tehnički nestabionom* sistemu, a krivulje 3 i 4 odgovaraju *tehnički stabilnom* sistemu.

Iz prikaza (sl. 6.10) vidljivo je da tehnički stabilan sistem može biti asimptotski nestabilan (krivulja 3), i obratno, tehnički nestabilan sistem može biti asimptotski stabilan (krivulja 1).

Općenito uzevši u današnje vrijeme nisu dovoljno razrađeni primjenljivi i dovoljno poopćeni kriteriji tehničke stabilnosti. Zapravo jedini način za određivanje tehničke stabilnosti nestacionarnih sistema svodi se na određivanje izlazne veličine $y(t)$ pri zadanoj ulaznoj veličini $u(t)$.

U inženjerskoj praksi kao primjeri nestacionarnih sistema vrlo često tretiraju se sistemi upravljanja letećim i podvodnim objektima. Kod tih objekata u toku kretanja dolazi do promjena koeficijenata diferencijalne jednadžbe. Do tih promjena dolazi npr. zbog promjene mase pri utrošku goriva, promjene gustoće atmosfere, promjene brzine gibanja itd.

7

KVALITETA PROCESA UPRAVLJANJA

Pod kvalitetom procesa upravljanja može se razumijevati kompleks zahtjeva kojima se definira ponašanje sistema u prijelaznom i stacionarnom stanju.

Pri skokovitoj promjeni vodeće (poremećajne) veličine u SAU uspostavlja se prijelazni proces. Zahtjevi koji se postavljaju na sistem za vrijeme rada u prijelaznom režimu općenito su proturječni. S jedne strane poželjno je da prijelazni proces traje što manje, što se može postići osiguranjem velike brzine i ubrzanja promjene izlazne veličine. Udovoljenje ovom zahtjevu povezano je sa znatnim povećanjem snage izvršnih mehanizama i preopterećenjima objekta upravljanja. S druge strane spori i monotoni prijelazni proces omogućava smanjenje opterećenja objekta upravljanja i snage izvršnog mehanizma, što smanjuje efikasnost upravljanja. Zahtjevi u vezi s karakterom prijelaznog procesa određuju se mnogim faktorima, ovisno o namjeni SAU.

U analizi prijelaznih procesa SAU često treba riješiti dva osnovna zadatka:

a) ocjena kvalitete prijelaznog procesa pri zadanim parametrima sistema,

b) izbor strukture i parametara sistema kojima se osigurava potrebna kvaliteta prijelaznog procesa.

Pri ocjeni kvalitete prijelaznih procesa linearnih stacionarnih SAU dovoljno je ograničiti se na određivanje odziva sistema na standardne pobudne funkcije: $S(t)$; $tS(t)$ i $t^2 S(t)$.

Analiza kvalitete prijelaznog procesa može se obaviti na temelju analitičkih i eksperimentalnih postupaka određivanja krivulje prijelaznog procesa. Analitički postupci određivanja krivulje prijelaznog procesa općenito su složeni i neprikladni za inženjersku praksu.

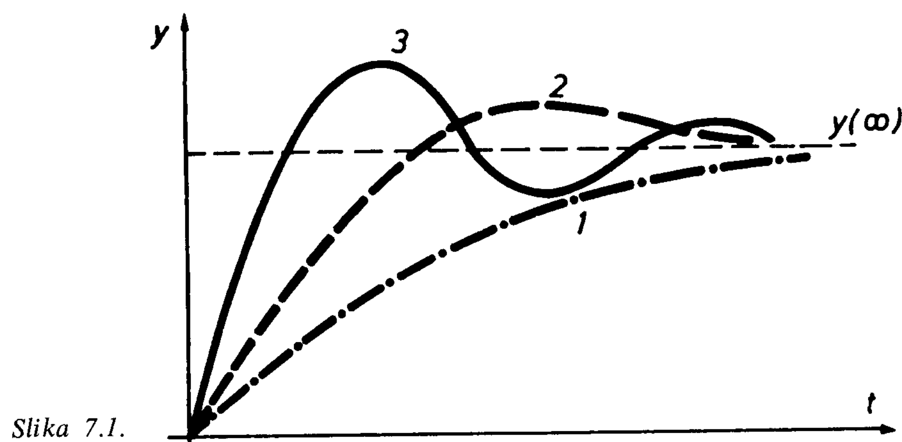
Analitički postupci određivanja *pokazatelja kvalitete* omogućavaju dovoljno točnu analizu ponašanja sistema u prijelaznom režimu, a da pri tome nije potrebno egzaktno poznavanje krivulje prijelaznog procesa. Pokazatelji kvalitete mogu se odrediti direktno iz krivulje prijelaznog procesa i indirektno ovisno o primijenjenoj metodi analize razmatranog sistema.

7.1. Ocjena kvalitete SAU po prijelaznoj funkciji $h(t)$

Prijelazni procesi stabilnih SAU općenito se mogu svrstati u tri karakteristična oblika (sl. 7.1).

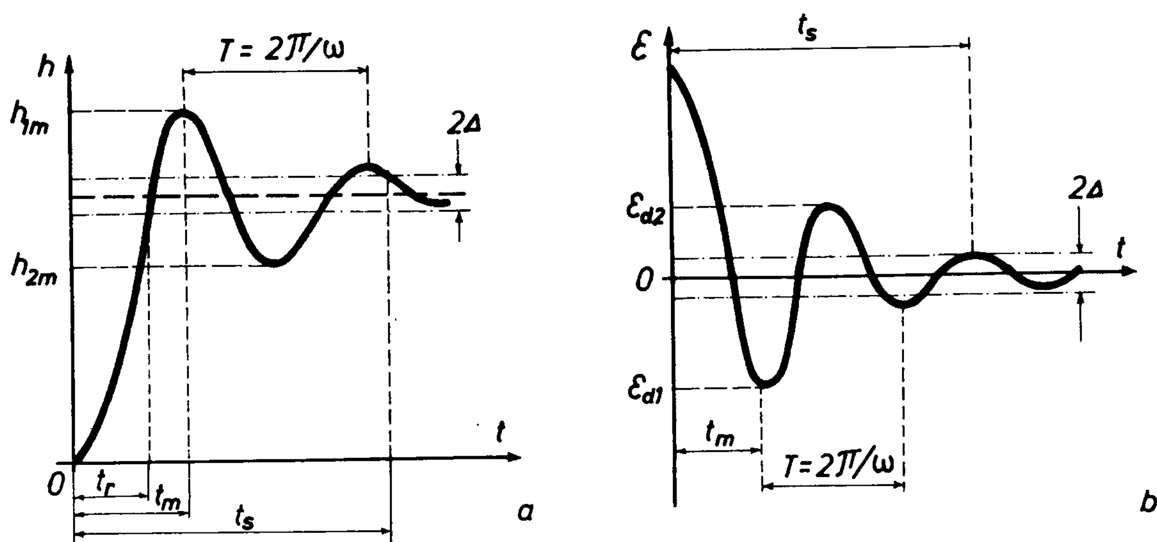
Prema sl. 7.1. razlikuju se monotoni, aperiodski i oscilatorni prijelazni procesi. Kod monotonih procesa prva derivacija izlazne veličine dy/dt ima konstantan predznak (krivulja 1, sl. 7.1). Kod aperiodskih procesa predznak dy/dt mijenja se najviše jedanput (krivulja 2. sl. 7.2), a kod oscilatornih procesa (krivulja 3, sl. 7.3), predznak dy/dt mijenja se periodički (teoretski beskonačni broj puta).

Za definiranje pokazatelja kvalitete prijelaznog procesa koristi se prijelazna karakteristika $h(t)$, tj. odziv sistema (pri nultim početnim uvjetima) na jediničnu skokovitu funkciju $S(t)$. U praksi se primjenjuje odzivna karakteristika izlazne



Slika 7.1.

veličine $y(t)$ i odzivna karakteristika regulacijskog odstupanja $\varepsilon_d(t)$ (sl. 7.2.a, b). Za sisteme s jediničnom povratnom vezom regulacijsko odstupanje jednako je signalu razlike, tj. $\varepsilon_d(t) = \varepsilon(t)$.



Slika 7.2.

Prema sl. 7.2. najčešće se koriste sljedeći direktni pokazatelji kvalitete:

1. *vrijeme smirivanja* (reguliranja) odnosno brzina djelovanja sistema, t_s – minimalno vrijeme nakon kojeg će izlazna (regulirana) veličina (u granicama zadane točnosti) biti jednaka zadanom iznosu u stacionarnom stanju:

ili

$$\left.\begin{aligned} |h(t) - h(\infty)| &\leq \Delta \\ |\varepsilon_d(t)| &\leq \Delta \end{aligned}\right\} t \geq t_s \tag{7.1}$$

gdje je: Δ – potrebna statička točnost koja se obično zadaje u postocima od stacionarnog iznosa izlazne veličine. U velikom broju slučajeva $\Delta \approx 0{,}05$.

2. *Nadvišenje* σ_m – maksimalni iznos prijelazne karakteristike od stacionarnog iznosa izlazne veličine, izražava se u relativnim jedinicama ili postocima.

$$\sigma_m = \frac{h_{1\max} - h_{(\infty)}}{h_{(\infty)}} 100\% = \frac{|\varepsilon_d(t)|_{\max}}{h_{(\infty)}} 100\% = \frac{|\varepsilon_d(t)|_{\max}}{|\varepsilon_d(0)|} 100\% \tag{7.2}$$

gdje je $h_{1\max}$ – iznos prvog maksimuma $h(t)$.

Dopušten iznos nadvišenja u svakom konkretnom slučaju proizlazi iz uvjeta eksploatacije sistema. U većini slučajeva $\sigma_m = 10 \div 30\%$, a u nekim posebnim slučajevima nadvišenje može iznositi i do 70%.

3. *Frekvencija oscilacija* $\omega = 2\pi/T$, gdje je T – period oscilacija kod oscilatornih prijelaznih karakteristika.

4. *Broj oscilacija* $N \approx t_s/T$ – broj koji pokazuje koliko puta oscilacije $h(t)$ oko stacionarnog iznosa $h(\infty)$ prelaze dopušteni iznos Δ, tj. koliko puta je zadovoljen uvjet:

$$h_{\max} - h_{(\infty)} > \Delta > 0 \tag{7.3}$$

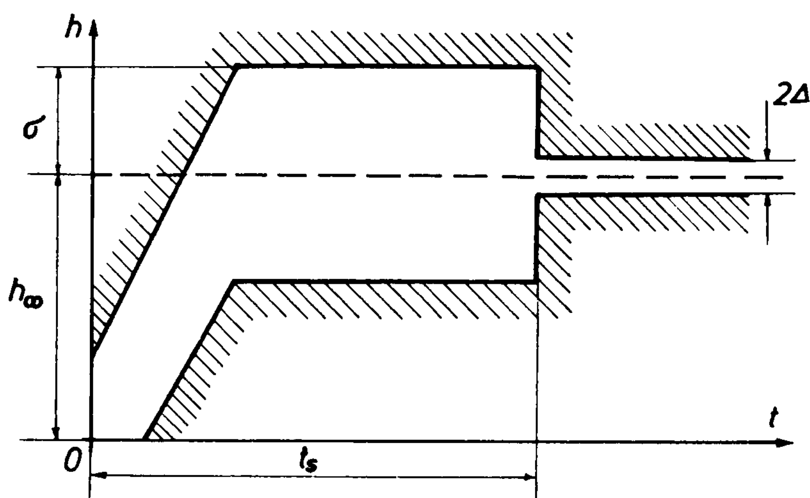
Pri projektiranju sistema najčešće se dopušta $N = 1 \div 2$, a ponekad je dopušteno $N = 3 \div 4$, a u nekim slučajevima oscilatorni prijelazni procesi nisu dopušteni.

5. *Dekrement prigušenja d*, određen kao odnos modula dva uzastopna nadvišenja:

$$d = \frac{|h_{1\max} - h_{\infty}|}{|h_{2\max} - h_{\infty}|} \tag{7.4}$$

Navedeni direktni pokazatelji mogu se ovisno o specifičnostima konkretnog sistema nadopuniti i drugim pokazateljima, npr. vremenima t_r i t_m (sl. 7.2).

Na osnovi dosad izloženih pokazatelja kvalitete moguće je odrediti granice područja odvijanja prijelaznog procesa, što je u velikom broju slučajeva dovoljno za inženjersku praksu (sl. 7.3).



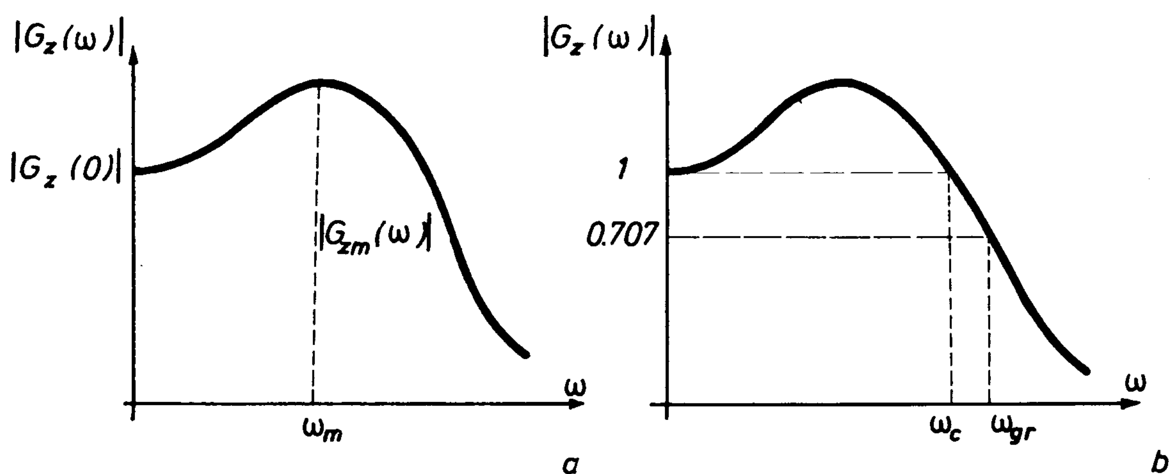
Slika 7.3.

S obzirom na suvremene mogućnosti primjene računarske tehnike, direktni pokazatelji kvalitete sve više se primjenjuju pri projektiranju SAU.

7.2. Ocjena kvalitete prijelaznog procesa po frekvencijskim karakteristikama SAU

Ocjena kvalitete procesa upravljanja, kada na sistem djeluju periodičke ulazne veličine, vrši se na temelju frekvencijskih karakteristika sistema. Za ocjenu kvalitete prijelaznog procesa, minimalno-faznih sistema koriste se sljedeće veličine: pokazatelj oscilatornosti M, rezonantna frekvencija sistema ω_m, propusni opseg sistema ω_{gr}, frekvencija presjeka ω_c, amplitudno i fazno osiguranje sistema i svojstva realne frekvencijske karakteristike zatvorenog sistema $P(\omega)$.

Pokazatelj oscilatornosti M definira se kao odnos maksimalnog iznosa amplitudno-frekvencijske karakteristike zatvorenog sistema i iznosa te karakteristike u točki $\omega = 0$ (sl. 7.4.a).



Slika 7.4.

Prema definiciji pokazatelja oscilatornosti i sl. 7.4.a. proizlazi:

$$M = \frac{|G_{zm}(\omega)|}{|G_z(0)|} \tag{7.5}$$

za $|G_z(0)| = 1$; $M = |G_{zm}(\omega)|$.

Pokazatelj oscilatornosti karakterizira sklonost sistema prema oscilacijama. Povećanje pokazatelja M uzrokuje smanjenje faznog osiguranja, što ima za posljedicu oscilatorniji prijelazni proces odnosno veliko vrijeme t_s, tj. slabiju kvalitetu prijelaznog procesa.

Ako je amplitudno-frekvencijska karakteristika sistema, neovisno o složenosti sistema, bliska amplitudno-frekvencijskoj karakteristici oscilatorne dinamičke komponente, tj. s približno jednakim iznosima pokazatelja M i ω_m; prijelazni proces razmatranog sistema bit će blizak prijelaznom procesu odgovarajuće dinamičke komponente drugog reda. Ova hipoteza omogućava ocjenjivanje prijelaznih funkcija mnogih složenih sistema pomoću amplitudno-frekvencijske karakteristike zatvorenog sistema (pokazatelj oscilatornosti M) i pomoću frekvencijske karakteristike otvorenog sistema (fazno osiguranje γ). Na temelju teoretskih i eksperimentalnih istraživanja došlo se do zaključka da se u većini slučajeva postižu zadovoljavajući rezultati kada se pokazatelj oscilatornosti i fazno osiguranje kreću u granicama:

$$M = 1{,}1 \div 1{,}5; \qquad \gamma = 30^\circ \div 60^\circ \tag{7.6}$$

Propusni opseg sistema ω_{gr} (sl. 7.4.b) određen je kao interval $0<\omega<\omega_{gr}$ u kojem je ispunjen uvjet:

$$|G_z(\omega_{gr})| \leq 0{,}707|G_z(0)| \tag{7.7}$$

Propusni opseg ne smije biti prevelik, jer će sistem biti vrlo osjetljiv na visokofrekventne smetnje.

Frekvencija presjeka indirektno karakterizira trajanje prijelaznog procesa; pri tome vrijedi izraz:

$$t_s \approx (1 \div 2)\frac{2\pi}{\omega_c} \tag{7.8}$$

U slučajevima kada prijelazni proces sadrži $N=1\div 2$ oscilacija, vrijeme postizanja prvog maksimuma približno je jednako:

$$t_m \approx \pi/\omega_c \tag{7.9}$$

Sklonost sistema prema oscilacijama karakterizira se amplitudnim i faznim osiguranjem, definiranim u petom poglavlju. Osiguranje stabilnosti vrši se amplitudno-faznim i logaritamskim frekvencijskim karakteristikama sistema. Općenito se može smatrati da će kvaliteta procesa upravljanja biti zadovoljavajuća kada se osiguranje stabilnosti kreće u granicama: $A.O.=6\div 20$ dB; $\gamma=30°\div 60°$.

Iz (2.161) i (7.5) vidljivo je da faktor oscilatornosti definiran prema modulu dinamičke komponente drugog reda odgovara modulu frekvencijske karakteristike zatvorenog sistema, tj. oscilatornost M se grafoanalitičkim postupkom određuje pomoću M-krugova. Pri provođenju sinteze SAU upotrebljavaju se nomogrami kojima je određena povezanost funkcija $M(\omega)$, ω_c, $P(\omega)$, i osiguranja stabilnosti s direktnim pokazateljima kvalitete, što se podrobnije tretira u postupcima sinteze linearnih sistema.

Budući da izloženi indirektni pokazatelji određuju brzinu djelovanja, nadvišenje i sl., oni se koriste i u slučajevima proračuna sistema koji su podvrgnuti djelovanjima neperiodičkih ulaznih veličina.

7.3. Ocjena kvalitete upravljanja u stacionarnom stanju

Pri analizi ponašanja SAU u stacionarnom stanju općenito su moguća dva režima rada – *statički* i *dinamički* stacionarni režim.

Statički stacionarni režim uspostavlja se u slučajevima kada se parametri sistema i vanjska djelovanja na sistem vremenski ne mijenjaju.

Dinamički stacionarni režim uspostavlja se u sistemu u slučajevima kada na sistem djeluju vanjske veličine koje se vremenski mijenjaju po nekom zadanom zakonu.

Kvaliteta rada SAU u stacionarnom stanju ocjenjuje se iznosom regulacijskog odstupanja ε_d, odnosno iznosom signalne razlike ε za sisteme zatvorene jediničnom povratnom vezom. Ovisno o obliku stacionarnog režima rada sistema razlikuju se pojmovi: statičko i dinamičko odstupanje (pogreška) odnosno pojmovi: *statička točnost sistema* i *dinamička točnost sistema.*

Za određivanje točnosti SAU u stacionarnom stanju općenito se koristi prikaz sistema u obliku strukturne sheme s jediničnom povratnom vezom jer ista omogućava da se umjesto regulacijskog odstupanja određuje iznos signala razlike u

stacionarnom stanju. U slučaju kada na sistem djeluju upravljajuća i poremećajna veličina, signal razlike određuje se izrazom (4.43).

$$E(s)=G_e(s)\,U(s)+\sum_{i=1}^{n} G_{efi}(s)\,F_i(s) \qquad (7.10)$$

Stacionarni iznos izraza (7.10) slijedi primjenom teorema o konačnom iznosu originala:

$$\varepsilon_{st}=\lim_{p\to 0} sE(s) \qquad (7.11)$$

odnosno:

$$\varepsilon_{st}=\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) \qquad (7.12)$$

Iz izraza (7.10) proizlazi da točnost SAU u stacionarnom stanju ovisi o iznosu vanjskih veličina, strukturi sistema i o parametrima sistema. Neposredno određivanje točnosti SAU u stacionarnom režimu rješenjem izraza (7.10) dosta je otežano. U slučajevima kada je ulazna funkcija derivabilna u intervalu $0\leq t\leq\infty$, signal razlike $\varepsilon(t)$ može se prikazivati u obliku reda:

$$\varepsilon(t)=C_0 u(t)+C_1\frac{du(t)}{dt}+C_2\frac{d^2u(t)}{2!\,dt^2}+\ldots+C_m\frac{d^mu(t)}{m!\,dt^m}+\ldots \qquad (7.13)$$

Koeficijenti C_0, C_1, $C_2\ldots C_m$ imaju naziv *koeficijenti regulacijskog odstupanja SAU.*

Koeficijenti reda (7.13) mogu se odrediti iz prijenosne funkcije sistema u odnosu na signal razlike. Za sistem zatvoren jediničnom povratnom vezom pri $F_i(s)=0$, iz (7.10) i (4.41) proizlazi:

$$E(s)=G_e(s)\,U(s)=\frac{U(s)}{1+G_0(s)} \qquad (7.14)$$

Razlaganjem prijenosne funkcije $G_e(s)$ u red po rastućim potencijama „s" u okolišu $s=0$, što odgovara velikim iznosima vremena $(t\to\infty)$, tj. stacionarnom iznosu signala razlike, proizlazi:

$$E(s)=\left[C_0+C_1 s+\frac{1}{2!}C_2 s^2+\ldots+\frac{1}{m!}C_m s^m+\ldots\right]U(s) \qquad (7.15)$$

U slučajevima kada prijenosna funkcija $G_e(s)$ ima oblik razlomljene racionalne funkcije, razlaganje u red prikladno je obaviti dijeljenjem polinoma u brojniku s polinomom u nazivniku. Primjenom inverzne L – transformacije na izraz (7.15) određuje se original funkcije $\varepsilon(t)$ u obliku (7.13).

Koeficijenti reda C_0, C_1, $C_2\ldots C_m$ mogu se odrediti po formulama za razlaganje funkcije $G_e(s)$ u Taylorov red:

$$C_0=[G_e(s)]\,s=0; \qquad C_1=\left[\frac{\partial G_e(s)}{\partial s}\right]_{s=0}$$

$$C_2=\left[\frac{\partial^2 G_e(s)}{\partial d^2}\right]_{s=0}; \qquad C_m=\left[\frac{\partial^m G_e(s)}{\partial s^m}\right]_{s=0} \qquad (7.16)$$

Za neke tipične ulazne signale koeficijenti regulacijskog odstupanja imaju konkretni fizikalni smisao. Tako za ulazni signal $u(t) = S(t)$, sve derivacije funkcije $u(t)$ jednake su nuli. Regulacijsko odstupanje prema (7.13) je:

$$\varepsilon(t) = C_0 \tag{7.17}$$

Koeficijent C_0 ima još naziv *koeficijent statičkog (pozicionog) regulacijskog odstupanja*, odnosno *koeficijent regulacijskog odstupanja po položaju.*

U slučaju da na sistem djeluje ulazna veličina $u(t) = t$; $du/dt = 1$; $d^2u/dt = \ldots = d^m u(t)/dt = 0$.

Iz (7.13) proizlazi: $C_0 = G_e(0)$; $C_1 = \left[\frac{\partial G_e(s)}{\partial s}\right]_{s=0}$; $C_2 d^2 u(t)/d^2 t = \ldots = C_m d^m t/dt^m = 0$, odnosno:

$$\varepsilon(t) = C_0 + C_1 t \tag{7.18}$$

Analogno pri djelovanju na sistem funkcije oblika $u(t) = t^2$, stacionarni iznos regulacijskog odstupanja određen je izrazom:

$$\varepsilon(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 \tag{7.19}$$

Koeficijent C_1 ima naziv *koeficijent regulacijskog odstupanja po brzini*, a koeficijent C_2 se naziva *koeficijent regulacijskog odstupanja po ubrzanju.*

Primjer 7.1.

Potrebno je odrediti regulacijsko odstupanje u stacionarnom stanju sistema zatvorenog jediničnom povratnom vezom, ako je zadano:

$$u(t) = 5 + 20t + 20t^2; \qquad G_0(s) = \frac{K}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

gdje je: $K = 10s^{-1}$; $T_1 = 0{,}2s$, $T_2 = 0{,}02s$.

Rješenje:

Prijenosna funkcija sistema u odnosu na signal razlike je:

$$G_e(s) = \frac{E(s)}{U(s)} = \frac{1}{1+G_0(s)} = \frac{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)+K},$$

odnosno:

$$G_e(s) = \frac{s^3 T_1 T_2 + s^2(T_1+T_2) + s}{s^3 T_1 T_2 + s^2(T_1+T_2) + s + K}, \tag{7.20}$$

Dijeljenjem brojnika s nazivnikom izraza (7.20) proizlazi:

$$G_e(s) = C_1 s + C_2 s^2 + \ldots + = \frac{s}{K} + \frac{1}{K} s^2 \left(T_1 + T_2 - \frac{1}{K}\right) + \ldots \tag{7.21}$$

Iz (7.21) proizlazi:

$$C_0 = 0; \qquad C_1 = \frac{1}{K} = 0{,}1; \qquad C_2 = \frac{1}{10}(0{,}2 + 0{,}02 - 0{,}1) = 0{,}012 \tag{7.22}$$

Iz (7.19) i (7.22) proizlazi iznos regulacijskog odstupanja razmatranog sistema u stacionarnom režimu rada.

$$\varepsilon(t) = 2{,}48 + 4t$$

Sistemi koji sadrže statički iznos regulacijskog odstupanja, tj. $C_0 \neq 0$, nazivaju se statičkim *sistemima automatskog upravljanja*. Sistemi kod kojih je $C_0 = 0$ imaju naziv astatički sistemi. Razlikuju se sistemi s *astatizmom prvog reda* ($C_0 = 0$, $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$) i sistemi s *astatizmom drugog reda* ($C_0 = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$) i općenito sistemi s astatizmom višeg reda.

Na temelju izraza (7.13) definiraju se komponente regulacijskog odstupanja:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_v + \varepsilon_a + \ldots + \varepsilon_i \qquad (7.23)$$

gdje je:

$\varepsilon_0 = C_0 u(t)$ – regulacijsko odstupanje po položaju

$\varepsilon_v = C_1 \dfrac{du(t)}{dt}$ – regulacijsko odstupanje po brzini

$\varepsilon_a = C_2 \dfrac{du(t)}{dt^2}$ – regulacijsko odstupanje po ubrzanju

$\varepsilon_i = C_i \dfrac{d^i u(t)}{dt^i}$ – regulacijsko odstupanje po i-toj derivaciji.

U sintezi SAU vrlo često se kao kriteriji točnosti zadaju recipročne vrijednosti koeficijenata regulacijskog odstupanja C_1 i C_2:

$D_v = \dfrac{1}{C_1}$ – koeficijent dobrote po brzini

$D_a = \dfrac{1}{C_2}$ – koeficijent dobrote po ubrzanju.

U analizi točnosti SAU često se koristi regulacijsko odstupanje u stacionarnom stanju koje nastaje u sistemu podvrgnutom djelovanju standardnih pobudnih funkcija: $u(t) = U_0 \cdot S(t)$; $u(t) = U_1 \cdot t \cdot S(t)$ i $u(t) = U_m \cdot \sin \omega t \cdot S(t)$.

Statičko regulacijsko odstupanje definira se kao regulacijsko odstupanje sistema podvrgnutog djelovanju konstantnim ulaznim veličinama. Za sistem zatvoren jediničnom povratnom vezom proizlazi:

$$\varepsilon(t) = \mathrm{L}^{-1}\left\{G_e(s)\frac{U_0}{s}\right\},$$

odnosno:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0}\left[sG_e(s)\frac{U_0}{s}\right] = G_e(0)\,U_1 \qquad (7.24)$$

Iz (7.16) i (7.24) proizlazi da je $G_e(0) \equiv C_0$, tj. postojanje statičkog regulacijskog odstupanja svojstvo je statičkih sistema automatskog upravljanja.

Kinetičko regulacijsko odstupanje (ε_{kin}) definira se kao regulacijsko odstupanje sistema podvrgnutog djelovanju nagibne podubne funkcije $u(t) = U_1 t\ S(t) \cdot \varepsilon_{kin}$ je

veličina koja se koristi kao osnovni kriterij točnosti mnogih automatskih sistema, a najčešće kod projektiranja slijednih sistema. Analogno izrazu (7.24) proizlazi:

$$\varepsilon(t) = \mathrm{L}^{-1}\left\{G_e(s)\frac{U_1}{s^2}\right\},$$

odnosno:

$$\varepsilon_{kin} = \lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim_{s\to 0}\left[sG_e(s)\frac{U_1}{s^2}\right] = \lim_{s\to\infty}\frac{G_e(s)}{s}U_1 = G_e(0)\,U_1 \tag{7.25}$$

Dinamičko regulacijsko odstupanje (ε_{din}) definira se kao regulacijsko odstupanje sistema podvrgnutog djelovanju harmonijske ulazne funkcije $u(t) = U_m \sin\omega t\, S(t)$. Točno određivanje dinamičkog regulacijskog odstupanja dobije se primjenom izraza:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{din} = U_m\left|G_e(j\omega)\right|\sin\left[\omega t + \operatorname{arctg}\frac{Im\{G_e(j\omega)\}}{Re\{G_e(j\omega)\}}\right] \tag{7.26}$$

Modul dinamičkog odstupanja pri malim frekvencijama ulazne funkcije određuje se približnim izrazom:

$$\left|\varepsilon_{din}\right| = U_m\sqrt{(C_0 - C_2\omega_0^2 + \ldots)^2 + (C_1\omega_0 - C_3\omega_0^3 + \ldots)^2} \tag{7.27}$$

gdje su: C_0, C_1, $C_2 \ldots$ koeficijenti regulacijskog odstupanja.

Modul dinamičkog regulacijskog odstupanja može se odrediti grafičkim postupkom pomoću amplitudno-faznih karakteristika otvorenog sistema. Budući je:

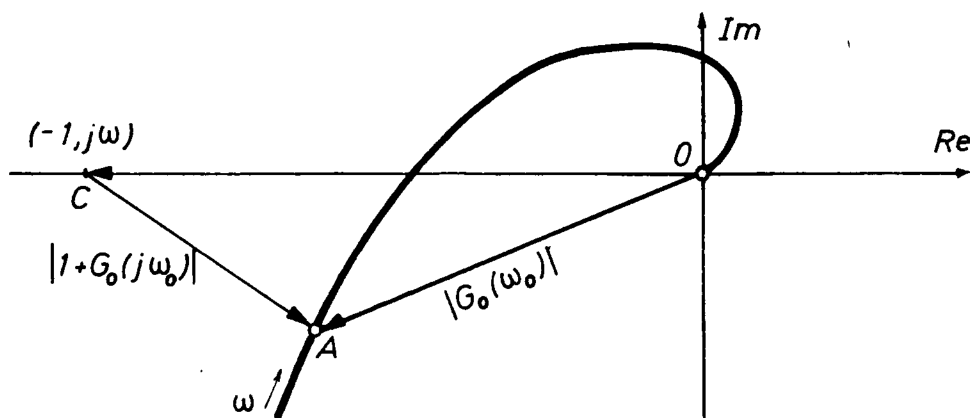
$$G_e(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)},$$

proizlazi:

$$\left|\varepsilon(t)\right| = U_m\left|\frac{1}{1 + G(j\omega_0)}\right|\sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{7.28}$$

Iz izraza (7.28) i sl. 7.5. proizlazi:

$$\varepsilon_{din} = \frac{1}{\overline{AC}}U_m, \qquad \varphi = \sphericalangle OCA \tag{7.29}$$



Slika 7.5.

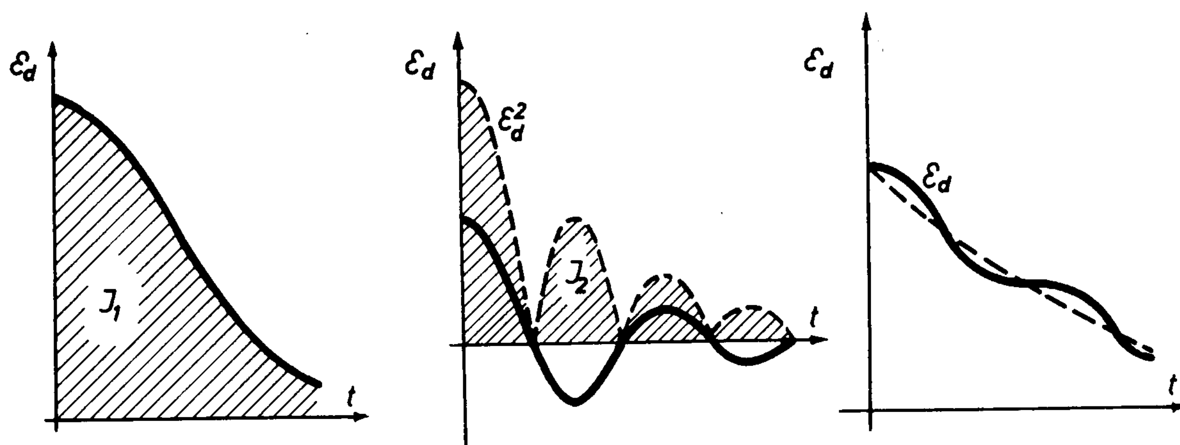
7.4. Integralne ocjene kvalitete

Integralne ocjene kvalitete zapravo su kombinirani kriteriji kojima se istovremeno ocjenjuje osiguranje stabilnosti, brzina djelovanja sistema i regulacijsko odstupanje u stacionarnom režimu rada. Zasnovane su na integralnim pokazateljima koji relativno jednostavno karakteriziraju odstupanje prijelaznog procesa realnog sistema od zadanog (idealnog) procesa. Pod idealnim procesom obično se razumijeva proces odskočne funkcije ili eksponencijalni proces sa zadanim parametrima.

Osnovna ideja integralnih ocjena sastoji se u karakteriziranju procesa upravljanja jednim brojem, po čijem iznosu bi bilo moguće prosuđivati o odvijanju procesa u toku zadanog intervala vremena. U praksi se najviše koriste sljedeće ocjene:

Linearna integralna ocjena jednaka je površini ispod krivulje $\varepsilon_d(t)$ (sl. 7.6), definirana je funkcionalom oblika:

$$I_1 = \int_0^{\infty} \varepsilon_d(t)\,dt = \lim_{s \to 0} E_d(s) \tag{7.30}$$



Slika 7.6.

Osim funkcionala (7.30) često se koristi složenija linearna integralna ocjena definirana funkcionalom oblika:

$$I_{10} = \int_0^{\infty} \varepsilon_d(t)\,t^m dt = (-1)^m \lim \frac{d^m E_d(s)}{ds^m} \tag{7.31}$$

Poznavanjem iznosa funkcionala (7.31) mogu se odrediti koeficijenti signala razlike (7.13) pomoću izraza:

$$C_m = (-1)^m I, \tag{7.32}$$

što omogućava određivanje približnog rješenja linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima.

Iznos funkcionala (7.30) odnosno (7.31) za $m=1$, karakterizira brzinu djelovanja sistema s monotonim prijelaznim procesom. Što je iznos funkcionala manji, trajanje prijelaznog procesa je manje, tj. sistem je kvalitetniji.

Primjena linearnih integralnih ocjena praktički je ograničena; naime, znatno je složeno unaprijed ustanoviti monotonost prijelaznog procesa.

Kvadratne integralne ocjene primjenjuju se kao mjera kvalitete sistema neovisno o monotonosti prijelaznog procesa. Opći oblik integralnih kvadratnih ocjena vrlo često se zadaje funkcionalom oblika:

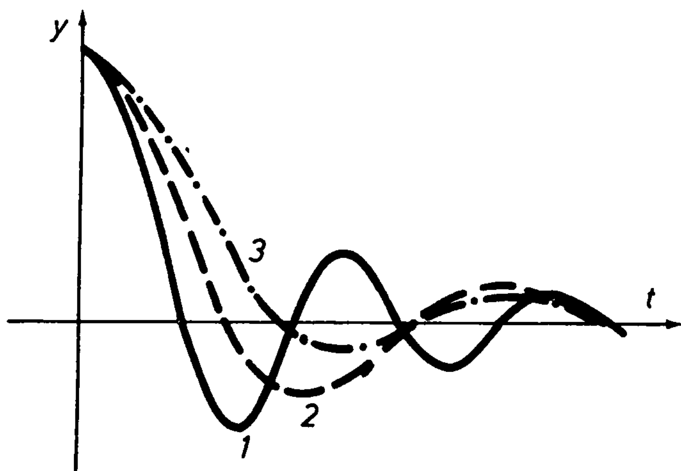
$$I_K = \int_0^\infty \{\varepsilon_d^2(t) + \tau_1^2 \dot{\varepsilon}^2(t) + \ldots + \tau_K^{2K}[\varepsilon^{(K)}(t)]^2\}\, dt \tag{7.33}$$

U praksi se vrlo često koriste kvadratne integralne ocjene oblika:

$$I_2 = \int_0^\infty \varepsilon_d^2(t)\, dt \tag{7.34}$$

$$I_3 = \int_0^\infty [\varepsilon_d^2(t) + \tau^2 \dot{\varepsilon}_d^2(t)]\, dt \tag{7.35}$$

Integralna ocjena I_2, za razliku od ocjene I_1, može se primijeniti i na sisteme s monotonim i oscilatornim prijelaznim procesima i vrlo često se koristi kao kriterij sinteze optimalnih parametara sistema. Pri tome manji iznos funkcionala I_2 odgovara prijelaznom procesu s većim prigušenjem i manjim regulacijskim odstupanjem. Primjenom toga kriterija nije moguće dobiti informaciju o stupnju oscilatornosti prijelaznog procesa; naime, moguće su situacije gdje različiti prijelazni procesi imaju isti iznos I_2, a da se istovremeno po kvaliteti znatno razlikuju. Na sl. 7.7. prikazana su tri prijelazna procesa s jednakim iznosom I_2; kako je vidljivo, proces 3 odgovara najboljim svojstvima sistema.



Slika 7.7.

U slučajevima kada je prijelazni proces s velikom oscilatornošću neprikladan kao mjera kvalitete sistema primjenjuje se *poboljšana integralna kvadratna ocjena* I_3.

Integral I_3 sastoji se iz dva dijela, tj. iz integrala I_2 i integrala od $\frac{d\varepsilon_d}{dt}$. Minimiziranjem I_3 zapravo se ne dozvoljava trajnije postavljanje viših otklona ε_d i $\frac{d\varepsilon_d}{dt}$, tj. dobiva se ne samo brzina već i manje oscilatorni prijelazni proces.

Što je viši iznos τ u izrazu (7.35), to će biti veća uloga ε_d; prijelazni proces bit će manje oscilatoran i sporije će se odvijati.

Minimum I_3 osigurava prijelazni proces blizak eksponencijalnom s konstantom τ. Naime, funkcional I_3 može se prikazati u obliku:

$$I_3=\int_0^\infty [\varepsilon_d^2(t)+\tau^2\dot{\varepsilon}_d^2(t)]\,dt=\int_0^\infty [\varepsilon_d(t)+\tau\dot{\varepsilon}_d(t)]^2\,dt-$$
$$-2\tau\int_0^\infty \varepsilon(t)\,\dot{\varepsilon}(t)\,dt=\int_0^\infty [\varepsilon(t)+\tau\dot{\varepsilon}(t)]^2\,dt-\tau\varepsilon_d^2(t)\Big|_0^\infty$$

Budući je $\varepsilon_d(\infty)=0$, *za* $\varepsilon_d(0)=\varepsilon_{d0}$ proizlazi:

$$I_3=\int_0^\infty [\varepsilon_d(t)+\tau\dot{\varepsilon}_d(t)]^2\,dt+\tau\varepsilon_{d0} \tag{7.36}$$

Integral (7.36) imat će minimum ako je $\varepsilon_d(t)$ rješenje jednadžbe

$$\tau\dot{\varepsilon}_d+\varepsilon_d=0 \tag{7.37}$$

odnosno:

$$\varepsilon_d(t)=\varepsilon_{d0}e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{7.38}$$

Iz (7.38) proizlazi da se umjesto idealiziranog prijelaznog procesa $h(t)=S(t)$ dobije eksponencijalna funkcija kojoj se približava realni prijelazni proces (sl. 7.6.e). Ocjenu I_3 svrsishodno je primjenjivati u slučajevima kada je moguće odrediti vremensku konstantu τ „optimalne" eksponencijalne funkcije. Većinom se vremenska konstanta τ zadaje u granicama:

$$\frac{t_s}{6}<\tau<\frac{t_s}{3} \tag{7.39}$$

Općenito se može smatrati da je nedostatak integralnih ocjena u nepostojanju odgovarajuće povezanosti pokazatelja prijelazne karakteristike s iznosima funkcionala I_1 i u relativno složenim matematičkim izrazima koje ih povezuju s parametrima sistema.

Pri izračunavanju integrala kvadrata ocjene I_2 u inženjerskoj praksi najčešće se primjenjuje Parsevalov teorem:

$$I=\int_{-8}^{\infty} f_1(t)f_2(t)\,dt=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} F_1(s)F_2(s)\,ds, \tag{7.40}$$

tj. jednadžba Parsevala omogućava provedbu integracije u frekvencijskom području što u većini slučajeva pojednostavnjuje rješavanje zadataka.

Uvrštenjem u (7.40) $f_1(t)=f_2(t)$ proizlazi:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} F(s)F(-s)\,ds \tag{7.41}$$

Iz (7.34) i (7.41) proizlazi:

$$I_2=\int_0^{\infty}\varepsilon_d^2(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}E_d(s)\,E_d(-s)\,ds \tag{7.42}$$

Budući da je kod realnih sistema $E_d(s)$ racionalna razlomljena funkcija od s, integral kvadrata regulacijskog odstupanja može se relativno jednostavno odrediti pomoću tabličnog integrala oblika (Prilog VII):

$$I_n=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{c(s)\,c(-s)}{d(s)\,d(-s)}\,ds \tag{7.43}$$

gdje je:

$$c(s)=c_0+c_1s+c_2s^2+\ldots+c_ms^m \qquad m=n-1$$
$$d(s)=d_0+d_1s+d_2s^2+\ldots+d_ns^n$$

Vrlo često se koriste integrali do $n=3$:

$$\text{za}\quad n=1\quad I=\frac{c_0^2}{2d_0d_1}$$

$$\text{za}\quad n=2\quad I=\frac{c_1^2d_0+c_0d_2}{2d_0d_1d_2} \tag{7.44}$$

$$\text{za}\quad n=3\quad I=\frac{c_2^2d_0d_1+(c_1^2-2c_0c_2)\,d_0d_3+c_0^2d_2d_3}{2d_0d_3\,(d_1d_2-d_0d_3)}$$

Primjer 7.2.

Potrebno je odrediti integralni kvadratni iznos regulacijskog odstupanja sistema zatvorenog jediničnom povratnom vezom, ako je zadano:

$$U(s)=\frac{U_0}{s},\qquad G_0(s)=\frac{K}{s\,(Ts+1)}$$

Rješenje:

Prijenosna funkcija sistema u odnosu na signal razlike jest:

$$G_\varepsilon(s)=\frac{E(s)}{U(s)}=\frac{1}{1+G_0(s)}=\frac{p\,(1+Ts)}{Ts^2+s+K},$$

odnosno:

$$E(s)=\frac{s\,(1+Ts)}{Ts^2+s+K}\,\frac{U_0}{s}=\frac{c_0+c_1s}{d_0+d_1s+d_2s^2} \tag{7.45}$$

gdje je: $c_0=U_0$; $c_1=TU_0$; $d_0=K$; $d_1=1$; $d_2=T$.

Integralna ocjena za polinom drugog reda prema (7.44) jest:

$$I=\frac{U_0^2T^2K+U_0^2T}{2KT}=\frac{U_0^2}{2}\left(T+\frac{1}{K}\right) \tag{7.46}$$

Primjer 7.3.

Potrebno je odrediti optimalni iznos koeficijenta pojačanja sistema iz uvjeta minimuma integralne kvadratne ocjene signala razlike ako je zadano:

$$E(s)=\frac{1}{1+G_0(s)}U(s)=\frac{T_1T_2s^2+(T_1+T_2)s+1}{s^3T_1T_2+s^2(T_1+T_1)+s+K},$$

odnosno:

$$E(s)=\frac{c_2s^2+c_1s+c_0}{d_3s^3+d_2s^2+d_1s+d_0} \tag{7.47}$$

gdje je: $c_0=1$; $c_1=T_1+T_2$; $c_2=T_1T_2$; $d_0=K$, $d_1=1$; $d_2=T_1+T_2$; $d_3=T_1T_2$.

Integralna ocjena za polinom trećeg reda prema (7.39) jest:

$$I=\frac{T_1T_2K+[(T_1+T_2)^2-2T_1T_2]+T_1+T_2}{2K(T_1+T_2-KT_1T_2)} \tag{7.48}$$

Iz uvjeta ekstrema (7.48) $\partial J/\partial K=0$, proizlazi optimalni iznos parametara K:

$$K_{opt}=\frac{1}{2T_1}+\frac{1}{2T_2}-\frac{T_1}{4T_2}-\frac{T_2}{4T_1}-\frac{1}{4} \tag{7.49}$$

7.5. Osjetljivost sistema automatskog upravljanja

Dosad izloženi postupci analize kvalitete procesa upravljanja temelje se na pretpostavci da iznosi parametara SAU odgovaraju proračunatim vrijednostima i da se ne mijenjaju u procesu eksploatacije sistema, što može imati za posljedicu nenamjensko funkcioniranje sistema. Varijacije iznosa parametara sistema uzrokovane su nizom faktora (starenje, temperatura, radijacija, nedovoljna točnost izrade komponenata itd.) i općenito dovode do promjene prijenosne funkcije zatvorenog sistema, a time i do promjene kvalitete procesa upravljanja. Utjecaj promjene parametara sistema na dinamička svojstva sistema proučava *teorija osjetljivosti SAU*.

Pod pojmom „*osjetljivost*" SAU razumijeva se svojstvo sistema da zbog promjene nominalnih iznosa parametara sistema mijenja izlazne karakteristike (pokazatelje kvalitete) sistema. Promjena izlaznih karakteristika sistema ocjenjuje se primjenom *funkcija osjetljivosti*:

$$\Phi(s)=\frac{dG_z(s)}{dG_\delta(s)} \tag{7.50}$$

odnosno:

$$S(s)=\frac{d\ln G_z(s)}{d\ln G_\delta(s)} \tag{7.51}$$

gdje je:

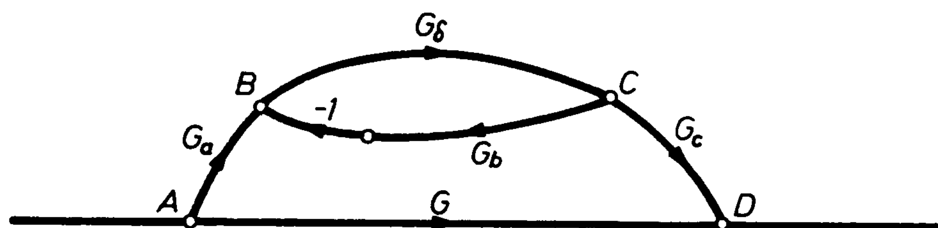
$G_z(s)$ – prijenosna funkcija zatvorenog sistema,
$G_\delta(s)$ – prijenosna funkcija dijela sistema s promjenljivim parametrom.

Osjetljivost sistema definirana je izrazom:

$$S_\delta(s)=\frac{dG_z(s)}{G_z(s)}\bigg/\frac{dG_\delta(s)}{G_\delta(s)}=\Phi(s)\frac{G_\delta(s)}{G_z(s)} \tag{7.52}$$

Prema (7.52) *osjetljivost sistema* $S_\delta(s)$ određena je odnosom relativnih promjena prijenosne funkcije zatvorenog sistema i prijenosne funkcije promjenljivog dijela sistema. Analizom izraza (7.52) proizlazi da će sistem s manjim izrazom $S_\delta(s)$ biti kvalitetniji, tj. prijenosna funkcija promjenljivog dijela sistema $G_\delta(s)$ imat će manji utjecaj na dinamička svojstva zatvorenog sistema $G_z(s)$.

Pri određivanju osjetljivosti SAU prikladno je koristiti *opću formulu osjetljivosti* koja proizlazi iz općeg grafa sistema (sl. 7.8).



Slika 7.8.

Iz općeg grafa sistema (sl. 7.8) proizlazi:

$$G_z(s)=G(s)+\frac{G_a(s)\,G_\delta(s)\,G_c(s)}{1+G_b(s)\,G_\delta(s)} \tag{7.53}$$

Iz (7.50) i (7.53) proizlazi izraz za funkciju osjetljivosti sistema $\Phi(s)$:

$$\Phi(s)=\frac{dG_z(s)}{dG_\delta(s)}=\frac{G_a(s)\,G_c(s)}{[1+G_b(s)\,G_\delta(s)]^2} \tag{7.54}$$

Osjetljivost sistema $S_\delta(s)$ na osnovi (7.52) i (7.54) određena je izrazom:

$$S_\delta(s)=\frac{G_a(s)\,G_b(s)}{1+[G_\delta(s)\,G_b(s)]^2}\,\frac{G_\delta(s)}{G_z(s)} \tag{7.55}$$

Zamjenom u (7.55)

$$G_z(s)-G(s)=\frac{G_a(s)\,G_\delta(s)\,G_c(s)}{1+G_\delta(s)\,G_b(s)} \tag{7.56}$$

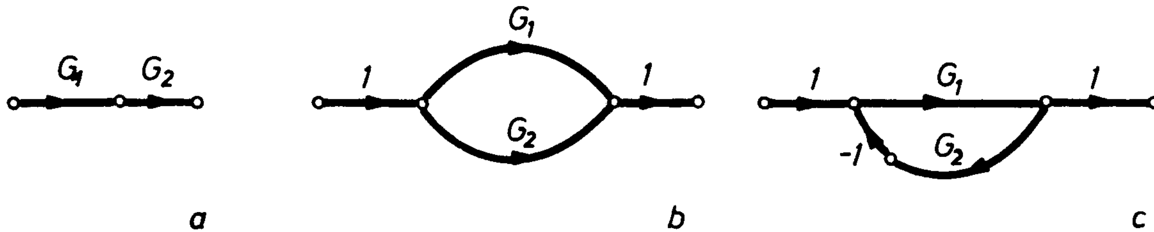
proizlazi *opća formula osjetljivosti*:

$$S_\delta(s)=\frac{1-\dfrac{G(s)}{G_z(s)}}{1+G_\delta(s)\,G_b(s)} \tag{7.57}$$

Opća formula osjetljivosti temeljni je izraz analize osjetljivosti SAU. Metodika analize osjetljivosti svodi se na određivanje variranog dijela sistema $G_\delta(s)$: kruga povratne veze $G_b(s)$, prijenosne funkcije zatvorenog sistema $G_z(s)$ i prijenosne funkcije zatvorenog sistema $G(s)$ pri $G_\delta(s)=0$.

Primjer 7.3.

Potrebno je odrediti osjetljivost sistema prikazanih na sl. 7.9.a, b, c za slučaj da je promjenljivi parametar $G_\delta(s) = G_1(s)$.



Slika 7.9.

Iz izraza (7.57) i slike 7.9.a, b, c proizlazi:

serijska veza (sl. 7.9.a):

$$G_z(s) = G_1(s)\,G_2(s) \tag{7.58}$$

$$G_1(s) = G_\delta(s) \tag{7.59}$$

$$G(s) \equiv 0; \qquad G_b(s) \equiv 0 \tag{7.60}$$

Iz (7.57) proizlazi:

$$S_\delta(s) = S_{G_1}(s) = 1 \tag{7.61}$$

tj. osjetljivost sistema realiziranog serijskom vezom dinamičkih komponenta ili dijelova sistema jednako je jedinici:

paralelna veza (sl. 7.9.b):

$$G_z(s) = G_1(s) + G_2(s) \tag{7.62}$$

$$G_1(s) = G_\delta(s) \tag{7.63}$$

$$G(s) = G_2(s) \tag{7.64}$$

$$G_b(s) \equiv 0 \tag{7.65}$$

Iz opće formule osjetljivosti proizlazi:

$$S_\delta(s) = S_{G_1}(s) = 1 - \frac{G_2(s)}{G_z(s)} = 1 - \frac{G_2(s)}{G_1(s) + G_2(s)} \tag{7.66}$$

odnosno:

$$S_{G_1}(s) = \frac{G_1(s)}{G_1(s) + G_2(s)} \tag{7.67}$$

Prema (7.67) osjetljivost sistema realiziranog paralelnim povezivanjem dinamičkih komponenata odnosno dijelova sistema može se smanjiti povećanjem koeficijenta pojačanja nepromjenljivog dijela sistema.

Povratna veza (sl. 7.9.c): promjenljivi dio sistema sadržan je u direktnoj grani, $G_1(s)=G_\delta(s)$

$$G_z(s)=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)\,G_2(s)} \tag{7.68}$$

$$G_1(s)=G_\delta(s) \tag{7.69}$$

$$G(s)\equiv 0, \qquad G_b(s)=G_2(s) \tag{7.70}$$

Uvrštenjem gornjih izraza u (7.57) bit će:

$$S_\delta(s)=S_{G_1}(s)=\frac{1}{1+G_1(s)\,G_2(s)} \tag{7.71}$$

Iz (7.71) vidljivo je da se osjetljivost sistema s negativnom povratnom vezom, kada je varirani dio sistema sadržan u direktnoj grani, može smanjiti povećanjem koeficijenta pojačanja otvorenog sistema.

U slučaju da je na sl. 7.9.c varirani dio sistema sadržan u grani povratne veze, tj. $G_\delta(s)=G_1(s)$, bit će:

$$G_z(s)=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)\,G_2(s)} \tag{7.72}$$

$$G_\delta(s)=G_2(s) \tag{7.73}$$

$$G(s)=G_1(s); \qquad G_b(s)=G_1(s) \tag{7.74}$$

Uvrštenjem u (7.75) i sređivanjem proizlazi:

$$S_\delta(s)=S_{G_2}(s)=\frac{-G_1(s)\,G_2(s)}{1+G_1(s)\,G_2(s)} \tag{7.75}$$

Na osnovi (7.75) osjetljivost SAU koji sadrži promjenjivi parametar u povratnoj vezi proporcionalna je koeficijentu pojačanja sistema. Za velike iznose koeficijenta pojačanja $K \gg 1$, osjetljivost sistema (7.75) $S_\delta(s) \approx 1$.

Iz (7.71) i (7.75) proizlazi:

$$S_{G_1}(s)-S_{G_2}(s)=1 \tag{7.76}$$

Pri određivanju osjetljivosti osnovnih struktura SAU u pravilu se kao promjenjivi dio sistema tretira objekt (proces) upravljanja. Budući da se objekt upravljanja nalazi u direktnoj grani sistema, opća formula osjetljivosti (7.57) poprima oblik:

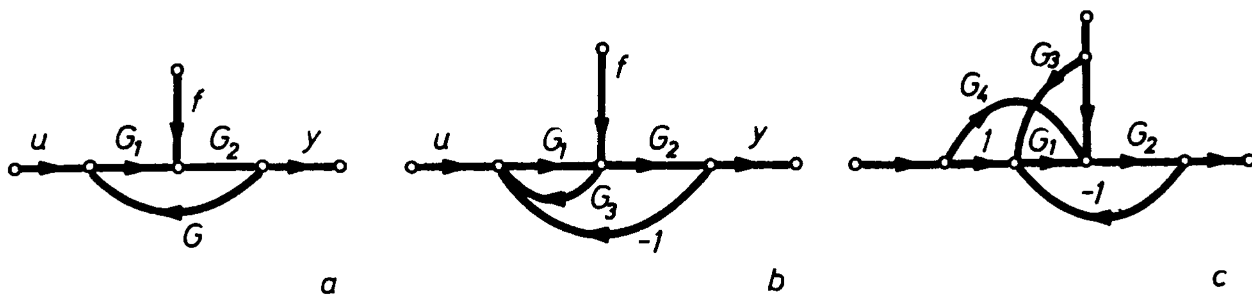
$$G(s)\equiv 0 \tag{7.77}$$

$$S_\delta(s)=\frac{1}{1+G_\delta(s)\,G_b(s)} \tag{7.78}$$

Izraz (7.78) bitno pojednostavnjuje određivanje osjetljivosti sistema.

Primjer 7.4.

Potrebno je odrediti osjetljivost SAU prikazanih na sl. 7.10.



Slika 7.10.

Primjenom (7.78) na sisteme (sl. 7.10.a, b, c) slijedi:

Za sistem sl. 7.10.a:

$$G_\delta(s) = G_1(s)\,G_2(s); \qquad G_b(s) = G_3(s)$$

$$S_\delta(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)\,G_2(s)\,G_3(s)} \tag{7.79}$$

Za sistem sl. 7.10.b:

$$G_\delta(s) = \frac{G_1(s)\,G_2(s)}{1 - G_1(s)\,G_3(s)}; \qquad G_b(s) = 1$$

$$S_\delta(s) = \frac{1 - G_1(s)\,G_3(s)}{1 - G_1(s)\,G_3(s) + G_1(s)\,G_2(s)} \tag{7.80}$$

Za sistem sl. 7.10.c, primjenom opće formule osjetljivosti (7.57) proizlazi:

Prijenosna funkcija zatvorenog sistema u odnosu na vodeću i poremećajnu veličinu jesu:

$$G_{zu}(s) = \frac{G_2(s)[G_1(s) + G_4(s)]}{1 + G_1(s)\,G_2(s)} \tag{7.81}$$

$$G_{zf}(s) = \frac{G_2(s)[1 + G_1(s)\,G_3(s)]}{1 + G_1(s)\,G_2(s)} \tag{7.82}$$

Iz izraza (7.57) (sl. 7.8. i sl. 7.10.c) proizlazi $G_b(s) \equiv 0$. U slučajevima kada su promjenljivi parametri korekcijske komponente G_3 i G_u opća formula osjetljivosti poprima oblik:

$$S_\delta(s) = 1 - \frac{G(s)}{G_z(s)} \tag{7.83}$$

Iz (7.81) i (7.83) za $G_\delta(s) = G_4(s) = 0$ proizlazi:

$$G(s) = \frac{G_1(s)\,G_2(s)}{1 + G_1(s)\,G_2(s)}, \tag{7.84}$$

odnosno:

$$S_\delta(s) = S_{G_4}(s) = \frac{G_4(s)}{G_1(s) + G_4(s)} \tag{7.85}$$

Iz (7.82) i (7.83) za $G_\delta(s) = G_3(s) = 0$ proizlazi:

$$G(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)\,G_2(s)} \tag{7.86}$$

odnosno:

$$S_\delta(s) = S_{G_3}(s) = \frac{G_1(s)\,G_3(s)}{1 + G_1(s)\,G_3(s)} \tag{7.87}$$

Analizom izraza (7.85) i (7.87) proizlazi da osjetljivost razmatranog sistema, u slučajevima kada su promjenljivi formati korekcijske komponente G_3(s) odnosno $G_4(s)$, ovisi isključivo o pojačanju upravljačkog dijela sistema $G_1(s)$. Pri tome se pri povećanju $G_1(s)$ smanjuje $S_{G_4}(s)$, a $S_{G_4}(s)$ se povećava i teži jedinici. Analognim postupkom može se odrediti osjetljivost sistema za slučaj da je $G_\delta(s) = G_1(s)$.

Iz razmatranih primjera i jednadžbe (7.57) proizlaze dva moguća puta smanjenja osjetljivosti SAU.

Prvi pristup sastoji se u kompenzaciji efekata do kojih dolazi zbog promjena parametara variranog dijela sistema, tj. u izmjeni prijenosne funkcije zatvorenog sistema $G_z(s)$, tako da se ista približava prijenosnoj funkciji dijela sistema neovisnog o variranom parametru. Klasičan primjer realizacije kompenzacijskog djelovanja su razne sheme kompenzacijskih mostova.

Drugi pristup sastoji se u povećanju pojačanja u krugu povratne veze. Pri tome za $K \to \infty$, kako proizlazi iz (7.78) i (7.79) osjetljivost sistema teži nuli.

Analizom izraza osjetljivosti općenito je moguće odrediti uvjet *nulte osjetljivosti* (idealni sistem) za bilo koju strukturu SAU. Neovisno o tome što idealne sisteme nije moguće fizički ostvariti, oni predstavljaju velik teorijski i stručni interes, jer se koriste kao etalon pri realizaciji realnih sistema.

8

LINEARNI DISKRETNI SISTEMI AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

8.1. Pojam i podjela diskretnih sistema automatskog upravljanja

Ovisno o načinu prijenosa i obrade signala unutar sistema automatskog upravljanja, sisteme možemo podijeliti na *kontinuirane i diskretne.*

Pod diskretnim SAU razumijeva se sistem barem s jednim elementom koji vrši kvantiziranje kontinuiranog signala.

Diskretni sistemi realiziraju se kvantiziranjem signala po vremenu, nivou ili po vremenu i nivou. *Kvantiziranje je proces pomoću kojega se kontinuirani signal zamjenjuje određenim diskretnim vrijednostima.* Na sl. 8.1. prikazana su tri moguća načina kvantiziranja.



Slika 8.1.

Diskretni sistemi mogu se prema načinu kvantiziranja podijeliti na:

– impulsni sistem – kvantiziranje se vrši po vremenu
– relejni sistem – kvantiziranje se vrši po nivou
– digitalni sistem – kvantiziranje se vrši po vremenu i nivou

Kvantiziranje po vremenu – diskretiziranje, moguće je vršiti: regularno, neregularno i stohastički.

Regularno kvantiziranje jest diskretiziranje pri kojem se uzorci kontinuiranog signala uzimaju u pravilnim vremenskim razmacima. Period diskretiziranja (T) je vrijeme između uzimanja uzoraka. Frekvencija diskretiziranja (f_s) je broj uzimanja uzoraka u jedinici vremena. Često se umjesto frekvencije diskretiziranja $f_s=\frac{1}{T}$, koristi

kružna frekvencija diskretiziranja $\omega_s = 2\pi f_s$, koja se skraćeno također zove frekvencija diskretiziranja.

Neregularno diskretiziranje je ono pri kojem se uzorci kontinuiranog signala ne uzimaju u pravilnim vremenskim razmacima. Na primjer, nakon dva uzimanja uzorka u razmaku od 3 sekunde čeka se 15 sekundi, te se ponovno u razmaku od 3 sekunde uzimaju uzorci.

Stohastičko diskretiziranje je ono pri kojem se uzimanje uzoraka kontinuiranog signala obavlja u slučajno odabranim trenucima.

Karakteristični element diskretnih sistema je diskretni element (DE) – uređaj koji kontinuirane signale pretvara u slijed impulsa. Diskretni element obavlja diskretiziranje kontinuiranog signala.

Diskretiziranje je proces pomoću kojega se kontinuirani signal mjeri ili predstavlja svojim vrijednostima u odvojenim fiksiranim trenucima. Kontinuirana krivulja signala po vremenu $y(t)$ nadomješta se nizom svojih vrijednosti (uzorci) u određenim trenucima $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots$

$$\{y_k\} = y(t_0),\ y(t_1),\ y(t_2), \ldots, y(t_i), \ldots$$

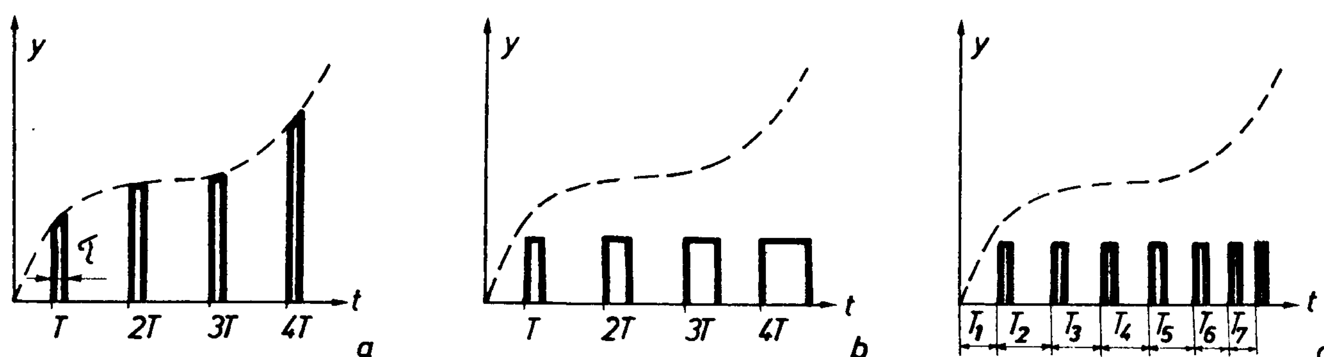
Ako je uzimanje uzoraka dovoljno često, može se pokazati da je diskretizirani signal $\{y_k\}$ ekvivalentan kontinuiranom signalu $y(t)$.

Diskretiziranje – kvantiziranje po vremenu, ostvaruje se modulacijom signala. Najčešće su u upotrebi: (1.10)

- amplitudno-impulsna modulacija (AIM)
- širinsko-impulsna modulacija (ŠIM)
- vremensko-impulsna modulacija (VIM).

Kod amplitudno-impulsne modulacije visina impulsa proporcionalna je amplitudi kontinuiranog signala (sl. 8.2.a).

Kod širinsko-impulsne modulacije trajanje impulsa (τ) proporcionalno je amplitudi kontinuiranog signala, a visina i period ponavljanja impulsa su konstantni (sl. 8.2.b).



Slika 8.2.

Vremensko-impulsna modulacija je takva vrsta diskretizacije kod koje su širina i amplituda impulsa konstantni, a period ponavljanja impulsa se smanjuje proporcionalno s povećanjem amplitude kontinuiranog signala (sl. 8.2.c). Takva vremensko-impulsna modulacija zove se još i frekvencijsko-impulsna modulacija, za razliku od fazno-impulsne modulacije koja također spada u grupu vremensko-impulsnih modulacija.

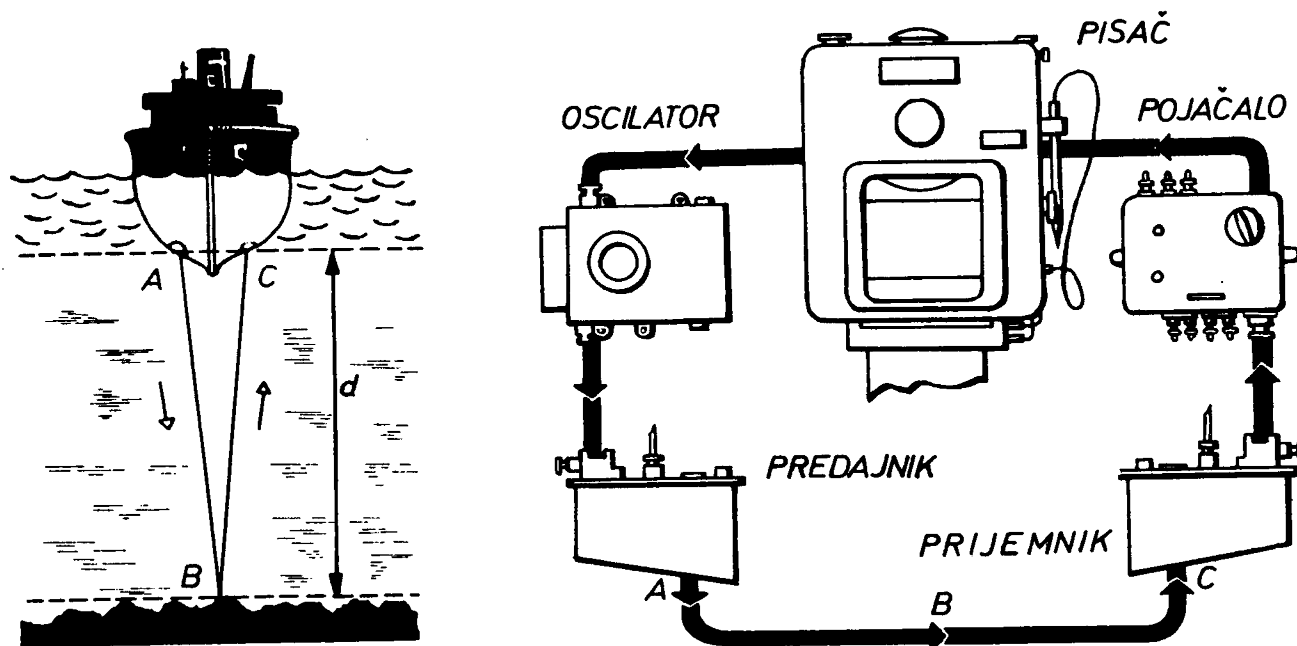
Linearni diskretni sistemi su sistemi s amplitudno-impulsnim diskretnim elementom, te linearnim kontinuiranim dijelom.

8.2. Primjeri diskretnih sistema

Primjeri diskretnih sistema su brojni i nalaze se svugdje oko nas. Tako na primjer, svi sistemi u kojima čovjek obavlja ulogu regulatora, odnosno upravlja sistemom, mogu se smatrati diskretnim sistemima. U njima čovjek obavlja i ulogu diskretnog elementa jer diskretizira signal. Vožnja automobilom često se koristi kao primjer diskretnog sistema. Zapravo, može se reći da bi taj proces bio nemoguć, da nema diskretiziranja signala koji su u tom procesu neophodni. Tako npr. vozač mora procjenjivati rastojanje do vozila ispred sebe, povremeno na retrovizoru pratiti stanje prometa iza svog vozila, a također stanje prometa lijevo i desno od vozila. Istovremeno mora prilagođavati brzinu vozila stanju kolovoza i prometa i imati na umu ostale parametre na instrumentnoj ploči. Svi ovi signali su kontinuirani signali. Na primjer, razmak do pratećeg vozila postoji u svakom trenutku vremena. Ne postoji međutim potreba da se taj signal kontinuirano prati. Vozač može zadovoljavajuće voziti ako diskretizira ovaj signal dovoljno često da primijeti značajnije promjene. On signale obrađuje izmjenično (time sharing) – jedne svake sekunde, druge svakih deset sekundi itd.

Sistemi koji rade s diskretiziranim signalima su npr. svi sistemi koji se baziraju na primopredaji bilo ultrazvučnog (sonar), bilo elektromagnetskog vala (radar, razni sistemi navigacije i dr.).

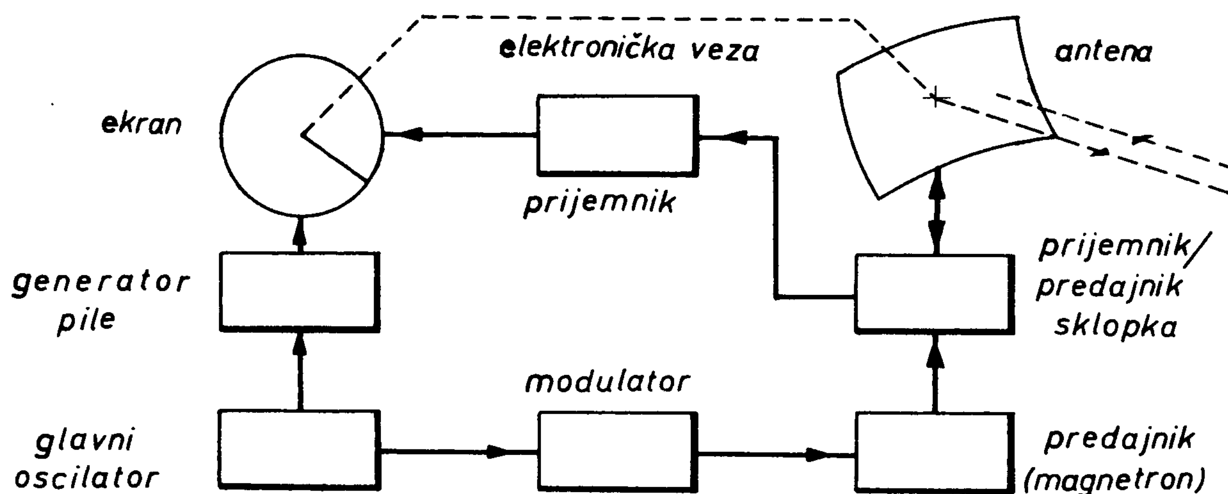
Funkcionalna shema – sistema za mjerenje dubine prikazana je na sl. 8.3.



Slika 8.3.

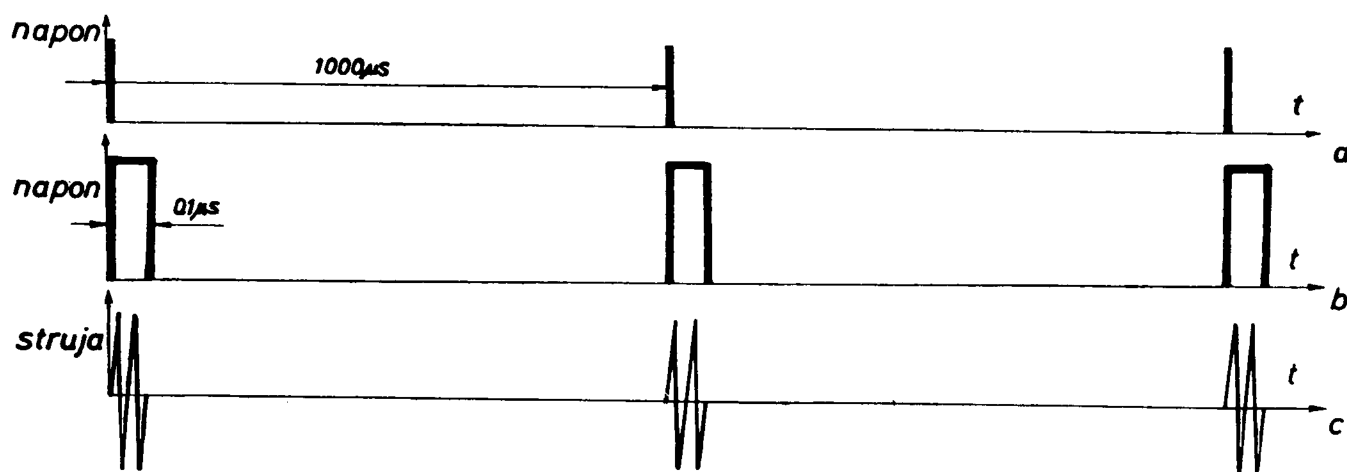
Kratki impulsi frekvencije ultrazvuka šalju se iz prijemnika periodički, npr. s frekvencijom od 100 impulsa/min. Poznavajući brzinu zvuka pod vodom (1 500 m/s) i vrijeme potrebno da signal dođe do dna i vrati se do prijemnika, moguće je odrediti dubinu.

Blok-shema radarskog sistema za promatranje dana je na sl. 8.4.



Slika 8.4.

U glavnom oscilatoru generiraju se impulsi napona male širine (na primjer 0,05 μs). Frekvencija ponavljanja tih impulsa je između 500 – 4000 impulsa u sekundi (sl. 8.5.a). Impulsi se koriste za okidanje modulatora koji na izlazu daje visokonaponske impulse kratkog trajanja (na primjer 0,1 μs) (sl. 8.5.b). Visokonaponski impulsi potrebni su da bi se u magnetronu generirale oscilacije vrlo visokih frekvencija. Visokofrekventne oscilacije postoje sve dok traje djelovanje visokonaponskog impulsa iz modulatora (sl. 8.5.c). Dobiveni elektromagnetski val (snage 30 kW i više) valovodom se propušta na antenu i šalje u prostor. Primopredajna sklopka služi da bi propustila signal s magnetrona na antenu za vrijeme njegova trajanja (0,1 μs), uz istovremeno isključenje prijemnika iz kruga, te za priključenje prijemnika na antenu izvan intervala od 0,1 μs. Valni oblici pojedinih elemenata prikazani su na sl. 8.5.

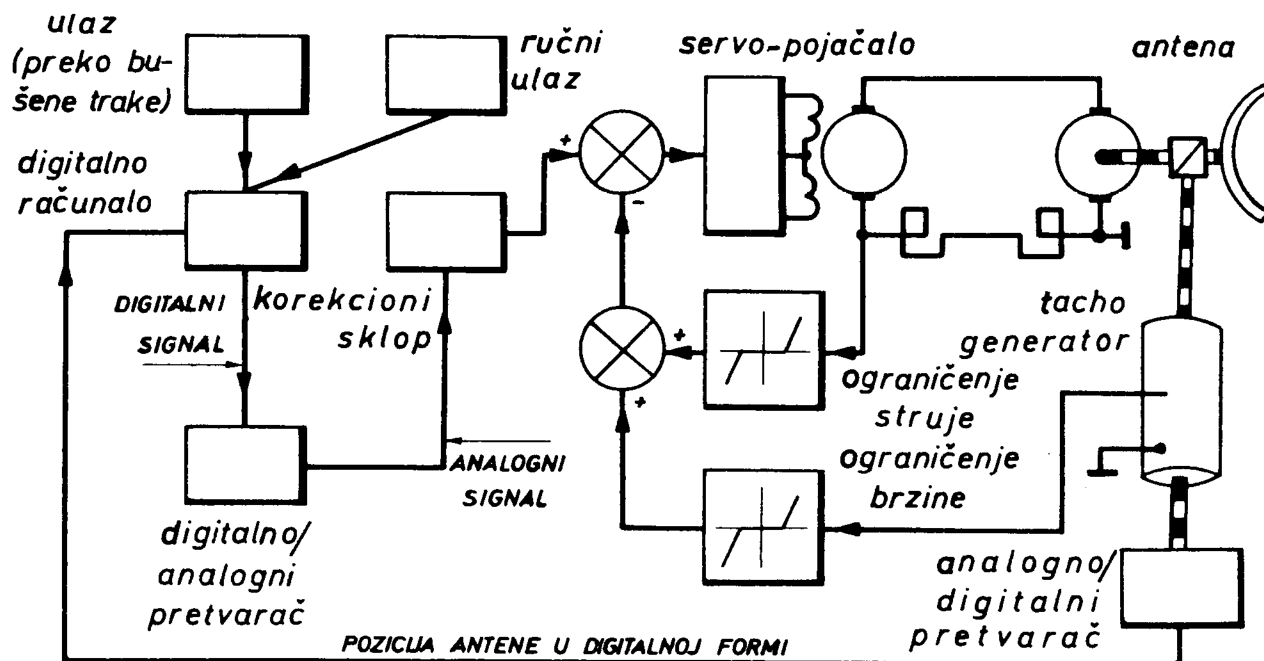


Slika 8.5.

Sistemi za numeričko upravljanje (NC-sistemi) u alatnoj industriji, sistemi za navođenje, sistemi za navigaciju i upravljanje gibajućim objektima, sistemi za izbjegavanje sudara (anticollision-sistemi), sistemi za praćenje i upravljanje prometom, te mnogi drugi sistemi, primjeri su sistema s digitalnim računalom u otvorenom ili

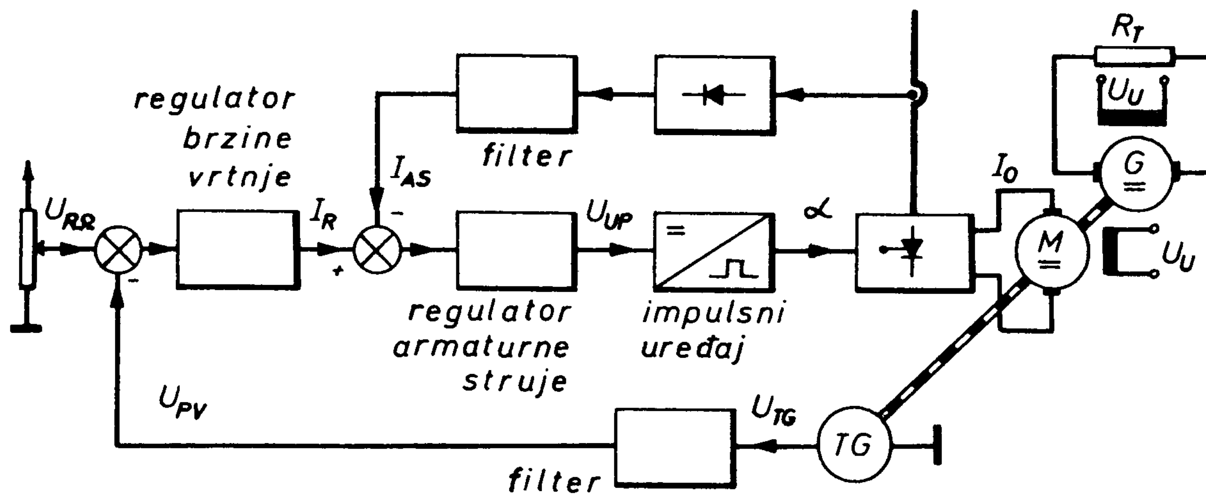
zatvorenom krugu, te se mogu svrstati u grupu digitalnih sistema. Ti sistemi danas sve više nalaze svoju primjenu u praksi.

Na sl. 8.6. prikazan je jedan od mnogih sistema s digitalnim računalom. U ovom slučaju radi se o digitalnom upravljanju radioteleskopske antene.



Slika 8.6.

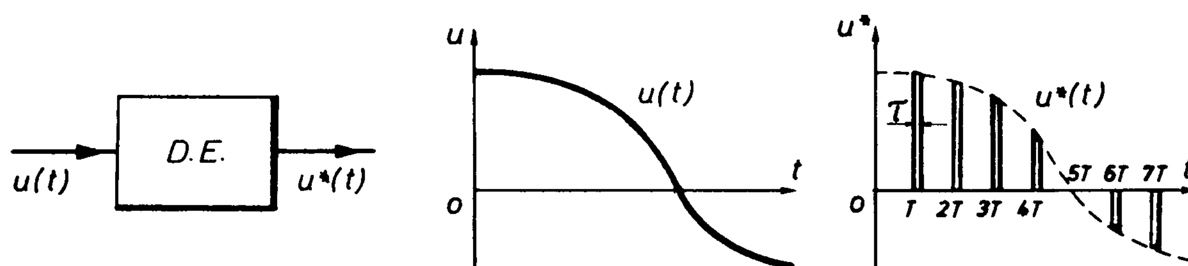
Sistemi u kojima se pojavljuje tiristor kao element sistema također su diskretni sistemi. Kao primjer može se uzeti sistem za regulaciju brzine vrtnje istosmjernog motora (sl. 8.7).



Slika 8.7.

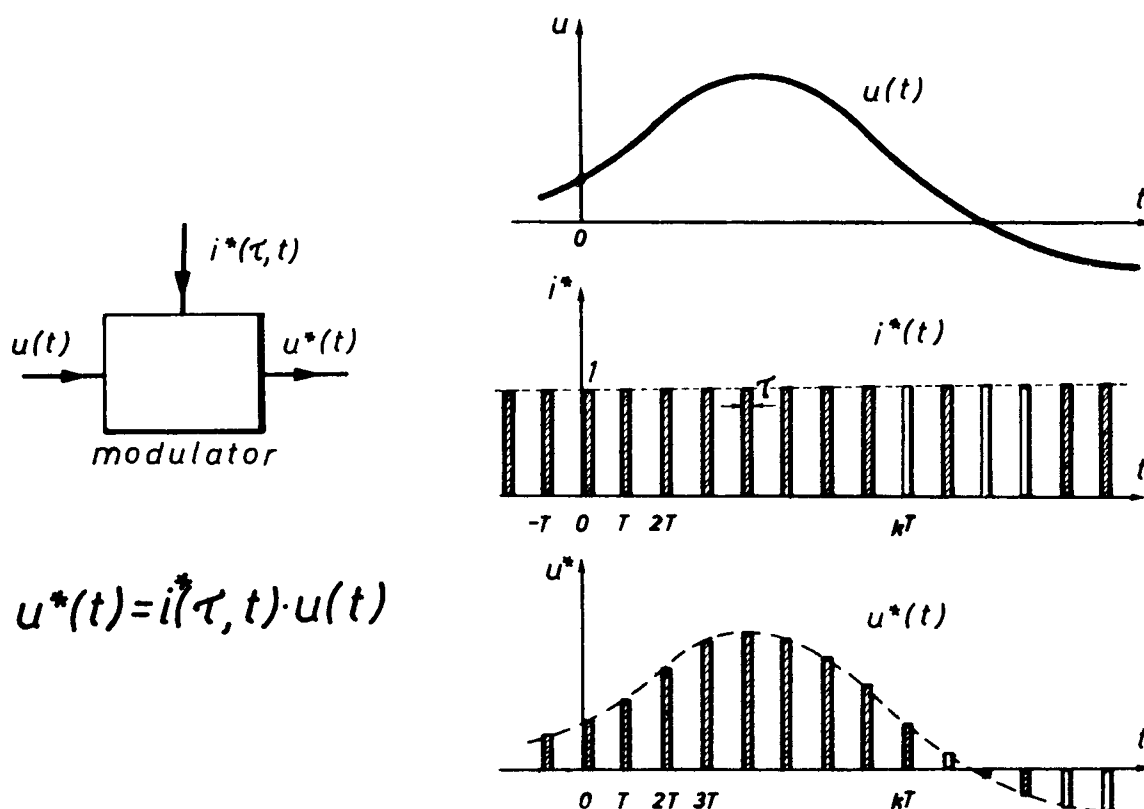
8.3. Diskretni element

Amplitudno-impulsna modulacija ostvaruje se u diskretnom elementu, uređaju koji pretvara kontinuirani signal u niz uskih impulsa koji se pojavljuju u trenucima $t = kT$. Na sl. 8.8. dana je blok-shema diskretnog elementa, te ulazni i izlazni signal tog uređaja (1.10).



Slika 8.8.

Diskretni element propušta signal s ulaza na izlaz samo u kratkom intervalu vremena τ, dok u ostalom dijelu periode diskretiziranja nema prolaza signala kroz diskretni element. Vrijeme prolaska signala τ vrlo je kratko u usporedbi s periodom diskretiziranja T. Diskretiziranje se može shvatiti kao proces modulacije koji pretvara kontinuirani signal u niz impulsa, amplitude jednake amplitudi kontinuiranog signala u pripadnim trenucima. Diskretni element je prema tome modulator kojemu je ulazni signal – signal modulacije, a niz jediničnih impulsa – nosilac modulacije (sl. 8.9).



Slika 8.9.

Na osnovi sl. 8.9. izlazni signal modulatora može se izraziti:

$$u^*(t) = i^*(\tau, t) \cdot u(t) \tag{8.1}$$

Funkcija $i^*(\tau, t)$ ima važnu ulogu u procesu diskretiziranja. Poznavanje karakteristika te funkcije bitno je za analizu ponašanja diskretnog elementa i diskretnih sistema. Budući da je funkcija $i^*(\tau, t)$ periodička funkcija, istu je moguće prikazati u obliku:

$$i^*(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_s t} \tag{8.2}$$

gdje su c_k Fourierovi koeficijenti dani izrazom:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T i^*(\tau, t)\, e^{-jk\omega_s t}\, dt \tag{8.3}$$

Funkcija $i^*(\tau, t)$ unutar periode diskretiziranja opisana je izrazom:

$$i^*(\tau, t) = \begin{cases} 1 & \text{za } kT \leq t \leq kT + \tau \\ 0 & \text{za } t \text{ u ostalom dijelu periode} \end{cases} \tag{8.4}$$

Iz (8.3) i (8.4) proizlazi:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^\tau e^{-jk\omega_s t}\, dt \tag{8.5}$$

odnosno

$$c_k = \frac{1 - e^{-jk\omega_s \tau}}{jk\omega_s T} \tag{8.6}$$

za $k = 0$:

$$c_0 = \frac{\tau}{T}$$

Iz (8.6) i (8.2) proizlazi:

$$i^*(\tau, t) = \frac{\tau}{T} + \frac{2\tau}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right)}{\frac{k\pi\tau}{T}} \cdot \cos[k(\omega_s t - \varphi)] \tag{8.7}$$

$\omega_s = \frac{2\pi}{T} \ldots$ frekvencija diskretiziranja

$\varphi = \omega_s \frac{\tau}{2} \ldots$ fazni pomak k-tog harmonika jedinične impulsne funkcije $i^*(\tau, t)$

Jednadžba (8.7) pokazuje da jedinična impulsna funkcija u sebi sadrži jednu istosmjernu komponentu $\frac{\tau}{T}$, kao i beskonačan broj harmonika s opadajućom amplitudom.

Amplituda i-tog harmonika jednaka je:

$$A_i = \frac{2\tau}{T} \cdot \frac{\sin \frac{i\pi\tau}{T}}{\frac{i\pi\tau}{T}} \tag{8.8}$$

Ona brzo opada s povećanjem „i".

Na osnovi izraza (8.7) može se zaključiti da diskretni element prenosi originalni signal, ali također i generira više harmonike dobivene procesom diskretiziranja. Posljedice diskretiziranja mogu se također pokazati usporedbom frekvencijskog spektra originalnog signala i diskretiziranog signala.

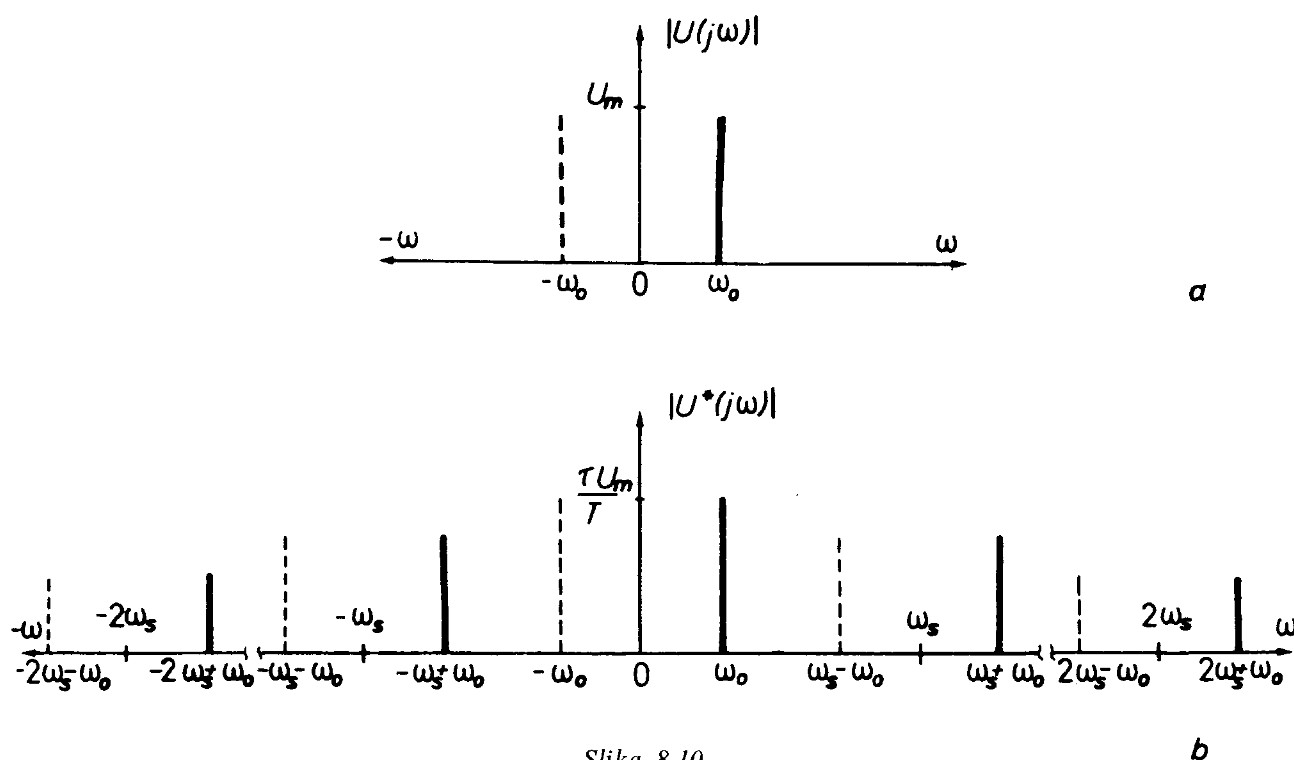
Jednadžba (8.1) daje odnos diskretiziranog signala i kontinuiranog – originalnog signala. Ako se u jednadžbu (8.1) uvrsti jednadžba (8.7) dobit će se izraz:

$$u^*(t)=\frac{\tau}{T}\cdot u(\tau)+\frac{2\tau}{T}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi\tau}{T}}{\frac{k\pi\tau}{T}}\cdot \mathrm{u}(\mathrm{t})\cos[k(\omega_s t-\varphi)] \tag{8.9}$$

Najjednostavniji način ispitivanja spektra sastoji se u pretpostavci da originalni signal sadrži samo jednu frekvencijsku komponentu. Takav signal opisuje se npr. funkcijom:

$$\begin{aligned} u(t)&=U_m\cos(\omega_0 t+\varphi_0)\\ &=\frac{U_m}{2}e^{j\varphi_0}\cdot \mathrm{e}^{j\omega_0 t}+\frac{U_m}{2}e^{-j\varphi_0}\cdot \mathrm{e}^{-j\omega_0 t} \end{aligned} \tag{8.10}$$

Frekvencijski spektar neke funkcije prikaz je raspodjele amplituda i faza, komponenata te funkcije, na određenim frekvencijama. Spektar periodičke funkcije je krivulja koja pokazuje amplitude sinusoidnih komponenata u toj funkciji na pripadnim frekvencijama. Tako, na primjer, amplitudno-frekvencijski spektar originalnog signala danog jednadžbom (8.10) sastoji se od dvije vertikalne linije (ako uzmemo u obzir i negativne frekvencije), na frekvencijama $\pm\omega_0$, duljine jednake amplitudi signala na tim frekvencijama (sl. 8.10).



Slika 8.10.

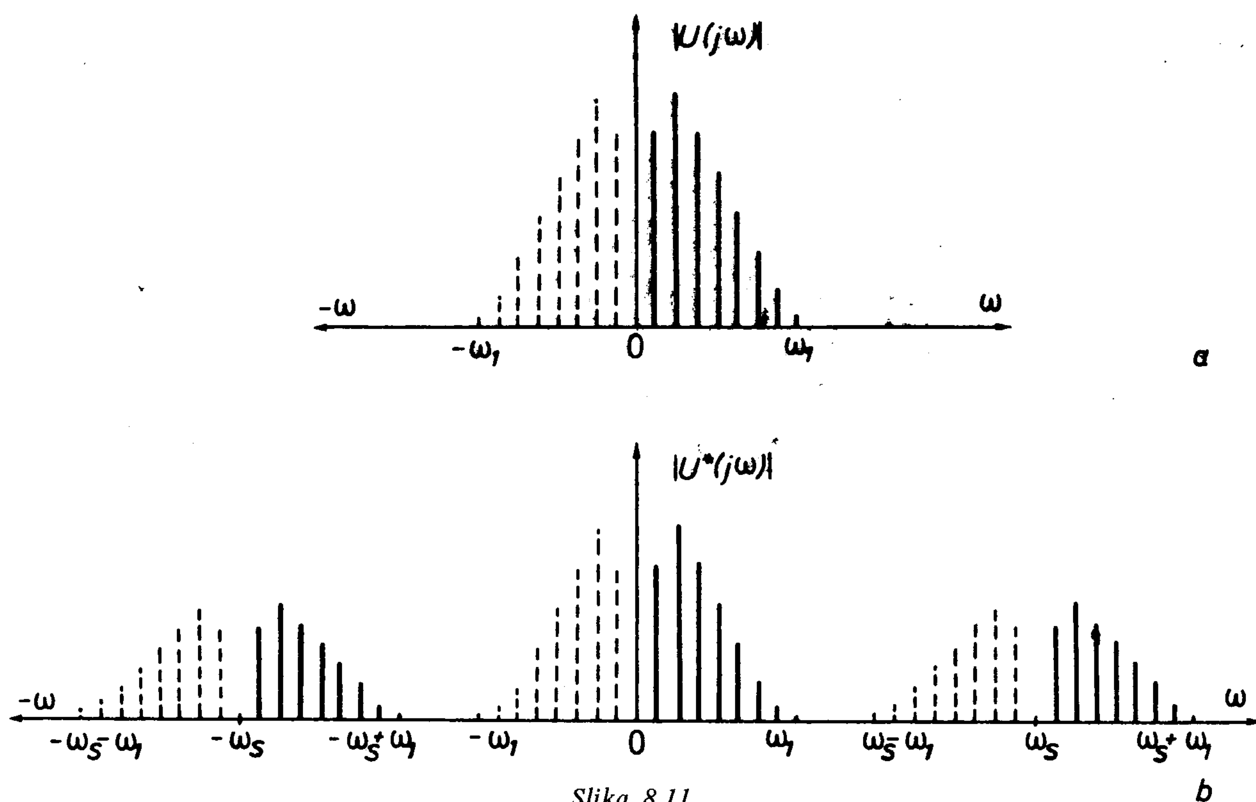
Diskretni frekvencijski spektri često se zovu i linijski (sl. 8.10.b), jer su sastavljeni od okomitih linija na određenim frekvencijama. Energija periodičkog signala proporcionalna je duljini linije na frekvenciji signala. Frekvencijski spektar periodičkog signala, koji opisuje amplitudu i fazu frekvencijskih komponenata signala, daje prikladan pregled informacije koja je sadržana u signalu.

Djelovanje diskretnog elementa može se analizirati na slici 8.10. Na slici se jasno uočava da diskretiziranje unosi beskonačan broj frekvencijskih komponenata (na frekvencijama $\omega_0 \pm k\omega_s$) u diskretizirani signal. Također je vidljivo da ono unosi gušenje originalnog signala s koeficijentom $\frac{\tau}{T}$. Diskretni element prema tome daje originalni signal prigušen za $\frac{\tau}{T}$, tj. $\frac{U_m \tau}{T} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, kojemu se pribraja beskonačan broj sinusoidnih komponenata amplitude:

$$\frac{U_m \tau}{T} \cdot \frac{\sin \frac{k\pi\tau}{T}}{\frac{k\pi\tau}{T}} \tag{8.11}$$

koje se razlikuju u frekvenciji i fazi od originalnog signala za $\pm k\omega_s$ i $\mp k\varphi$. Ove dodatne komponente u diskretiziranom signalu zovu se komplementarni signali. Komplementarni signali guše se s povećanjem frekvencije.

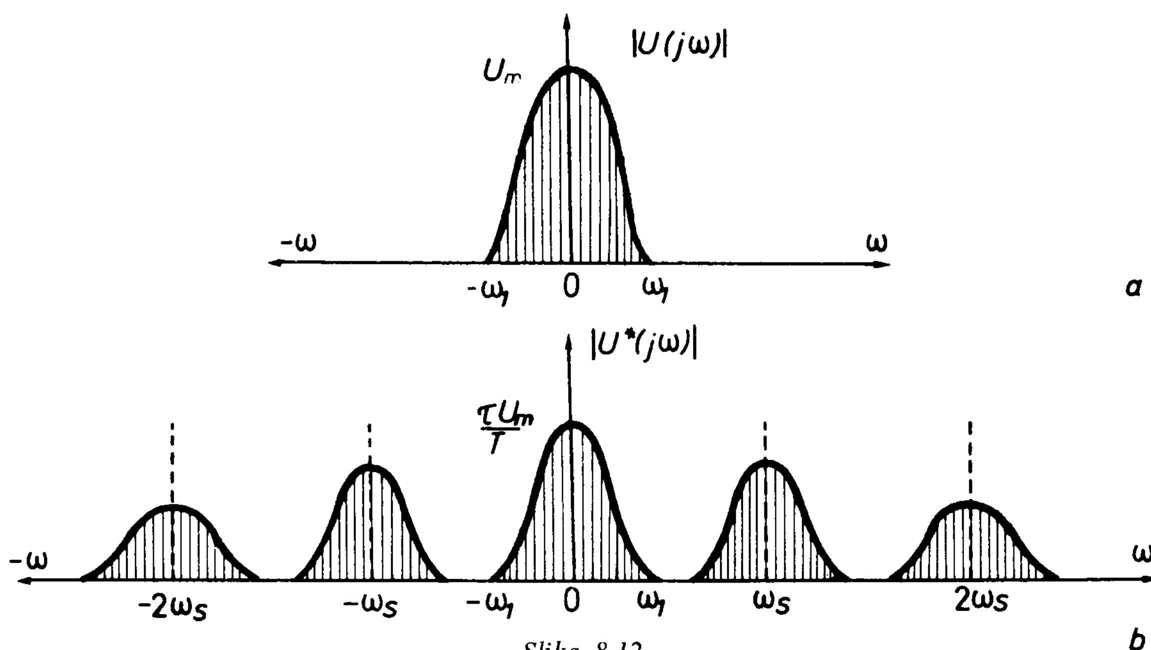
U slučaju kada se originalni signal $u(t)$ sastoji od m frekvencijskih komponenata u području frekvencija između 0 i ω_1 [1/s], amplitudni frekvencijski spektar sastojat će se od m okomitih linija, kao što je prikazano na sl. 8.11.a. Duljina pojedine linije



Slika 8.11.

jednaka je amplitudi pripadne frekvencijske komponente. Na isti način kao u slučaju s jednom frekvencijskom komponentom, može se pokazati da će amplitudno-frekvencijski spektar diskretnog signala sadržavati ne samo prigušene komponente originalnog signala, već i komponente originalnog signala pomaknute za $\pm k\omega_s$ (sl. 8.11.b).

Ako originalni signal sadrži beskonačan broj frekvencijskih komponenata unutar frekvencijskog područja $0-\omega_1\,[1/s]$, tada se spektar može prikazati kontinuiranom krivuljom (sl. 8.12).



Slika 8.12.

Signal koji sadrži beskonačan broj komponenata može se smatrati neperiodičkim, a to znači da se frekvencijski spektar takvog signala može odrediti iz frekvencijskog prikaza njegove Fourierove transformacije. Ovaj prikaz je kontinuirana funkcija frekvencije. Spektralna funkcija diskretiziranog signala dana je Fourierovim integralom jednadžbe (8.9).

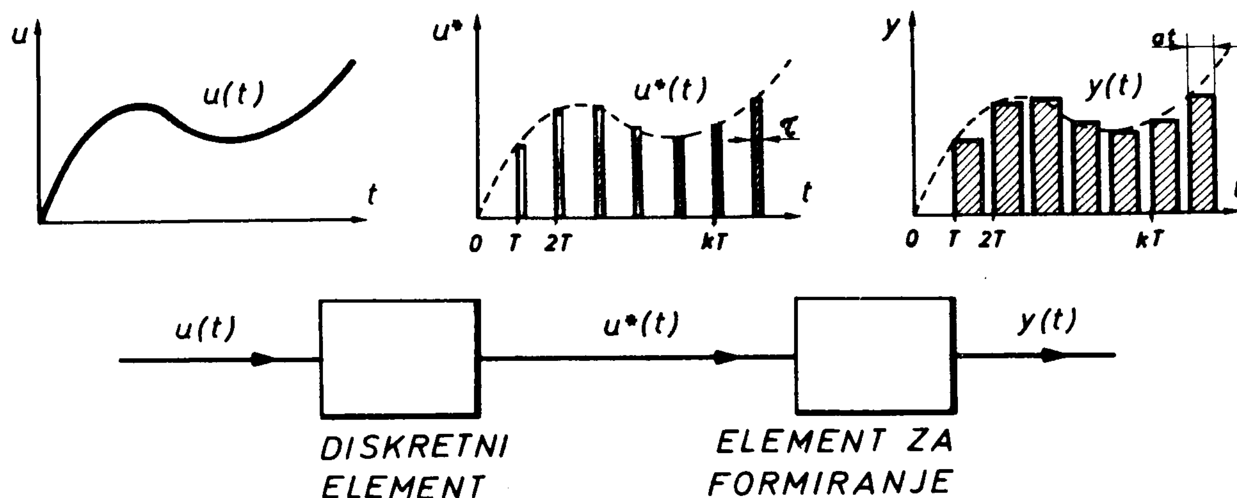
Na osnovi do sada izloženog može se zaključiti da diskretni element:

- proširuje spektar originalnog signala na čitavo frekvencijsko područje, unoseći u diskretni signal komplementarne signale
- prigušuje originalni signal (gušenje se povećava s povećanjem frekvencije)
- daje mali energetski sadržaj diskretiziranom signalu, jer je $\tau \ll T$.

Proširenje spektra nepovoljno djeluje na prijenos signala. Naime, na izlazu SAU pojavljuju se nepoželjne oscilacije malih amplituda, što daje isti efekt kao da je na sistem priključen signal smetnje. Te oscilacije rezultat su prolaza visokofrekventnih komponenata diskretiziranog signala kroz preostali dio sistema (koji je u većini slučajeva niskofrekventni filter).

Diskretni element koristi se u sistemima automatskog upravljanja, a njegov izlazni signal $u^*(t)$ može se koristiti za upravljanje. Međutim, njegova slaba energija to onemogućava. Kada $\tau\to 0$, tada je površina ispod impulsa jednaka amplitudi kontinuiranog signala, a to znači da impulsi nose samo informaciju o kontinuiranom signalu u trenucima uzimanja uzoraka.

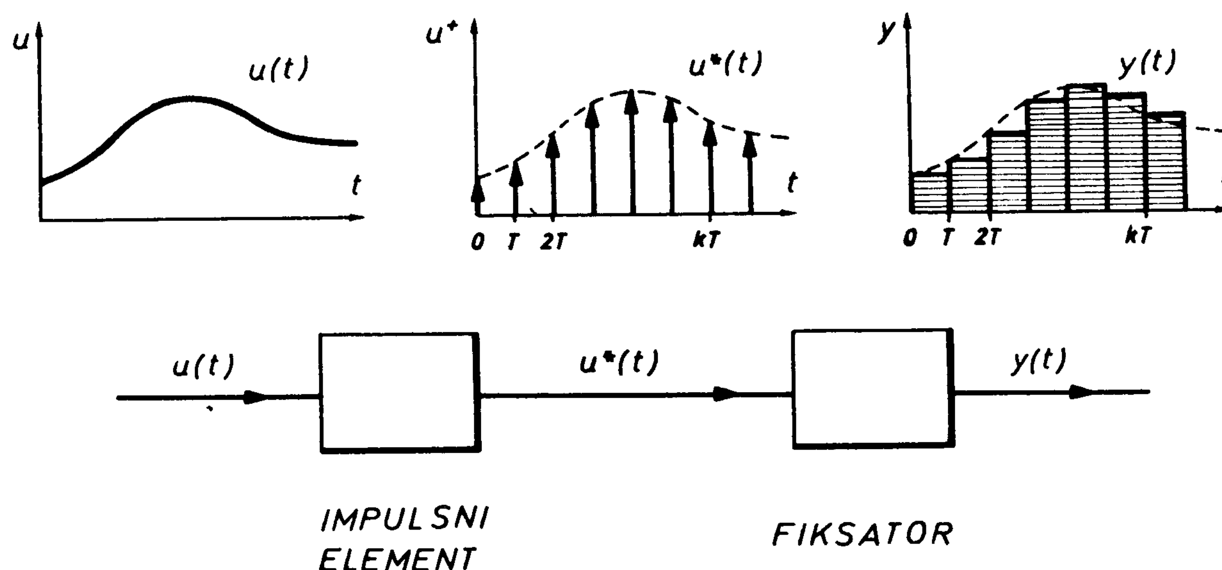
Diskretni element se u sistemima automatskog upravljanja, zbog navedenih razloga, mora proširiti s uređajem koji će restaurirati originalni signal iz diskretnog signala. To drugim riječima znači da će taj uređaj filtrirati visokofrekventne komponente u diskretnom signalu, dajući ujedno dovoljan energetski nivo dobivenom signalu. Takav uređaj zove se element za formiranje (sl. 8.13).



Slika 8.13.

Općenito, element za formiranje može na svom izlazu dati bilo kakav oblik signala. Na slici je prikazan pravokutni oblik signala. Element za formiranje prema tome je demodulator. Najčešća vrsta demodulatora koji se pojavljuju u sistemima automatskog upravljanja su oni kod kojih je memoriranje signala protegnuto na čitav period diskretiziranja. Takvi elementi imaju naziv *fiksatori.*

Radi lakše analize diskretnih sistema automatskog upravljanja, te prikladnijeg matematičkog aparata, realni diskretni element i element za formiranje mogu se nadomjestiti idealnim diskretnim elementom i elementom za formiranje, koji u sebi sadrži i inercijska svojstva realnog diskretnog elementa (sl. 8.14).



Slika 8.14.

Idealni diskretni element u daljnjem će tekstu imati naziv impulsni element, a označavat će se kao na sl. 8.15.a. Ostale oznake impulsnog elementa također se susreću u literaturi (sl. 8.15.b, c).



Slika 8.15.

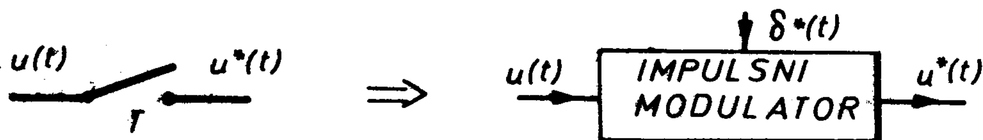
Impulsni element razlikuje se od diskretnog elementa u tome što nema inerciju, tj. $\tau = 0$.

8.4. Impulsni element i njegova svojstva

Impulsni element jest diskretni element kod kojega trajanje impulsa $\tau \to 0$.

Budući da je u praksi trajanje, tj. širina impulsa zanemarivo mala u usporedbi s vremenskim konstantama sistema upravljanja, moguće je izlazni niz impulsa promatrati kao impulsni niz s površinom impulsa jednakoj iznosu kontinuiranog signala u trenutku diskretiziranja. Izloženi pojam impulsnog elementa omogućava relativno jednostavno matematsko tretiranje analize i sinteze diskretnih sistema. S energetskog stajališta širina impulsa proporcionalna je energiji koju impuls nosi. U graničnom slučaju, kada trajanje impulsa teži nuli, izlazni signal iz impulsnog elementa ne sadrži energiju već samo informaciju, tj. nije primjenjiv za upravljanje fizikalnog sistema. Naime, sistem pobuđen takvim impulsom neće dati nikakav odziv. Treba napomenuti da tokovi energije i informacije u sistemima automatskog upravljanja ne moraju biti istovjetni.

Impulsni element moguće je promatrati kao modulator δ funkcije, jer je izlazni signal $u^*(t)$ niz moduliranih δ funkcija.



Slika 8.16.

Fizikalno, δ funkcija odgovara impulsu beskonačne amplitude i beskonačno male širine s površinom impulsa jednakoj 1.

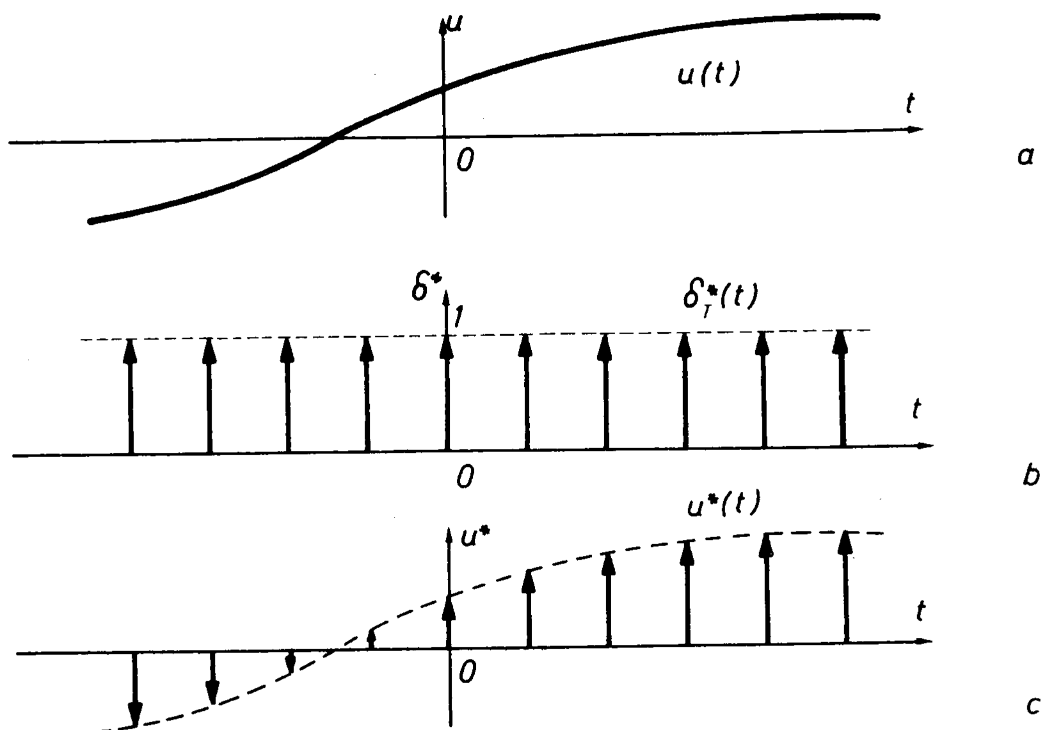
Ako je $u(t)$ kontinuirani ulazni signal, a $u^*(t)$ izlazni signal impulsnog modulatora, tada se slično jednadžbi (8.1) može pisati:

$$u^*(t) = \delta_T^*(t) \cdot u(t) \tag{8.12}$$

gdje je $\delta_T^*(t)$ idealna funkcija diskretiziranja predstavljena nizom jediničnih impulsa (sl. 8.17.b).

Funkcija $\delta_T^*(t)$ može se analitički izraziti:

$$\delta_T^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \tag{8.13}$$



Slika 8.17.

$\delta(t)$ jedinična je impulsna funkcija u trenutku $t=0$, a $\delta(t-kT)$ zakašnjela je impulsna funkcija koja se pojavljuje u trenutku $t=kT$. Izlazni signal impulsnog elementa $u^*(t)$ (sl. 8.17.c) dobiven je modulacijom, pri čemu je signal $u(t)$ (sl. 8.17.a) bio izvor informacije (modulacijski signal), a $\delta_T^*(t)$ „nosilac" modulacije.

Budući da je $\delta_T^*(t)$ periodička funkcija (sl. 8.17.b), može se razviti u kompleksni Fourierov red:

$$\delta_T^*(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_s t} \tag{8.14}$$

gdje je $\omega_s=\frac{2\pi}{T}=2\pi f_s$, frekvencija diskretiziranja, a c_k su Fourierovi koeficijenti dani izrazom:

$$c_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta_T^*(t)\, e^{-jk\omega_s t}\, dt \tag{8.15}$$

kako je:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \delta_T^*(t)\, e^{-jk\omega_s t}\, dt=\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, dt=1 \tag{8.16}$$

proizlazi

$$\delta_T^*(t)=\frac{1}{T}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t} \tag{8.17}$$

Izlazni signal impulsnog elementa može se prema tome izraziti:

$$u^*(t)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} u(t)\,e^{jk\omega_s t} \tag{8.18}$$

Primjenom L-transformacije na izraz (8.18) proizlazi diskretna Laplaceova transformacija:

$$U^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{L}\{u(t)\,e^{jk\omega_s t}\} \tag{8.19}$$

odnosno

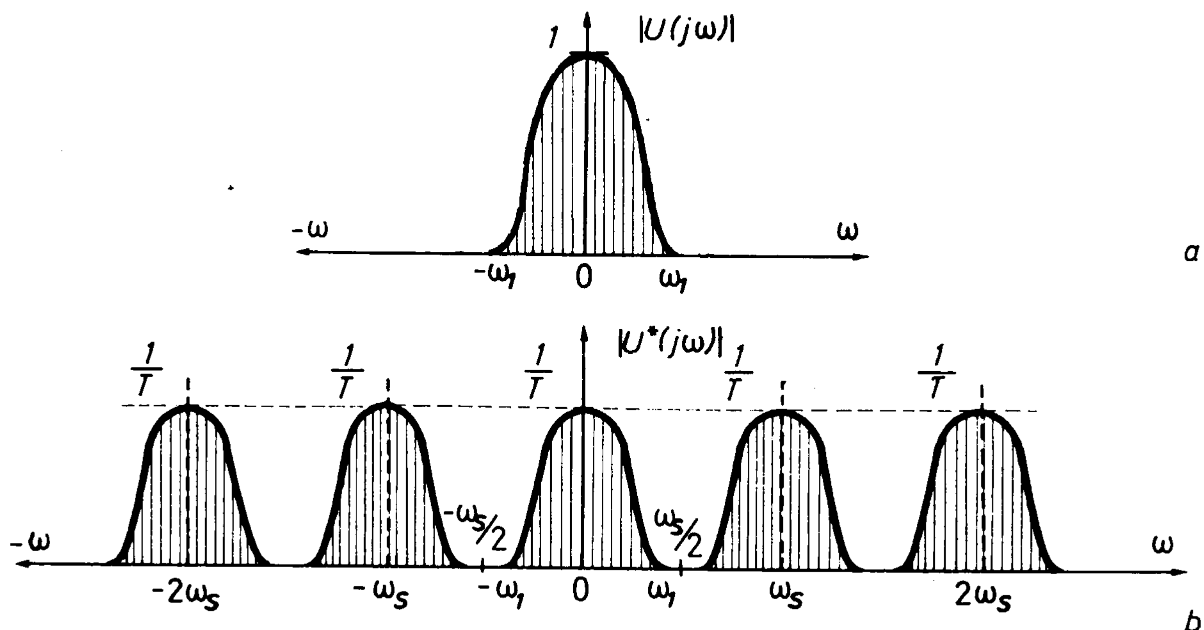
$$U^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} U(s+jk\omega_s) \tag{8.20}$$

Gornji izraz pokazuje da je Laplaceova transformacija signala $u^*(t)$ periodička funkcija s periodom $j\omega_s$. Općenito se može ustvrditi da periodička kontinuirana vremenska funkcija ima diskretne frekvencijske spektre, a diskretna vremenska funkcija, dobivena periodičkim diskretiziranjem, ima periodičke frekvencijske spektre. Poznavanje frekvencijskog spektra u osnovi je ekvivalentno poznavanju vremenske funkcije.

Uvrštenjem $s=j\omega$ u jednadžbu (8.20) dobit će se:

$$U^*(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} U[j(\omega+k\omega_s)] \tag{8.21}$$

Ako je frekvencijski spektar kontinuiranog signala $u(t)$ prikazan slikom 8.18.a, tada se frekvencijski spektar diskretnog signala može odrediti iz jednadžbe (8.21). Slika 8.18.b daje spektar izlaznog signala impulsnog elementa. Uočava se sličnost slika 8.12. i 8.18.

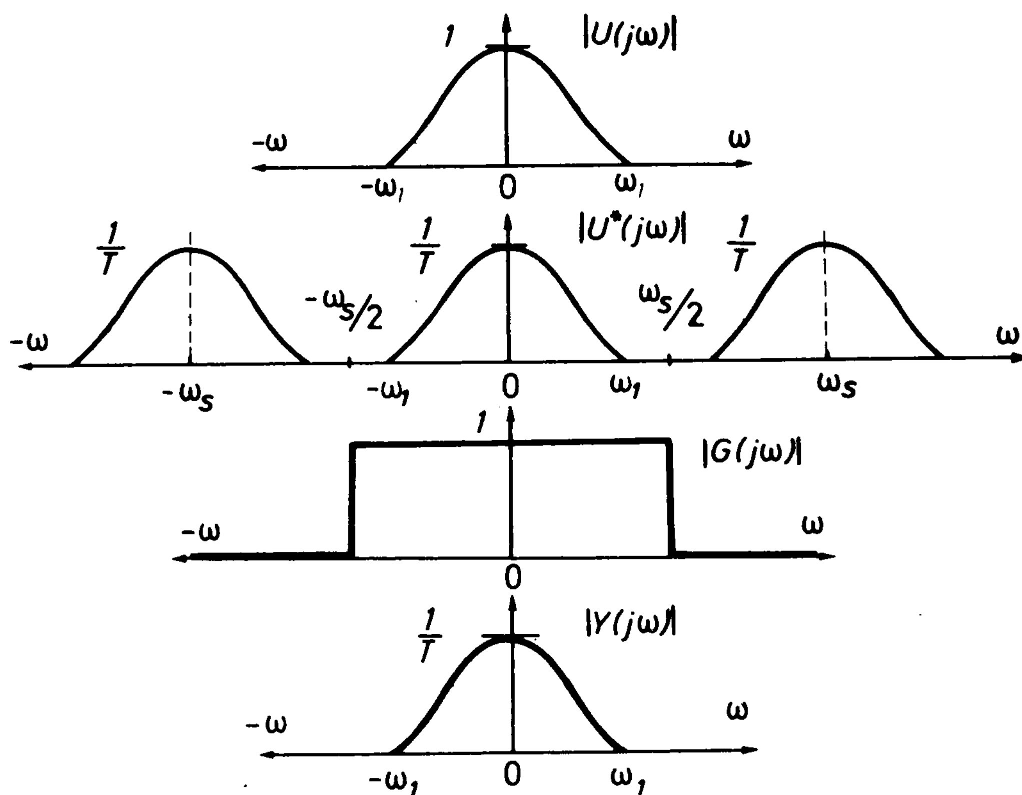


Slika 8.18.

Signal $u^*(t)$ formira se množenjem $u(t)$ sa $\delta_T^*(t)$. Niz impulsa koji se tako dobiju imaju površinu $u(0)$, $u(T)$, $u(2T)$,... Spektar ovog impulsnog niza je suma originalnog spektra $\left(\text{prigušenog s } \frac{1}{T}\right)$, te spektara pomaknutih za $\pm\omega_s$, $\pm 2\omega_s$ itd. Za razliku od diskretnog elementa, impulsni element, budući da ne sadrži inerciju, ne povećava gušenje s povećanjem frekvencije.

Slika 8.19. prikazuje:

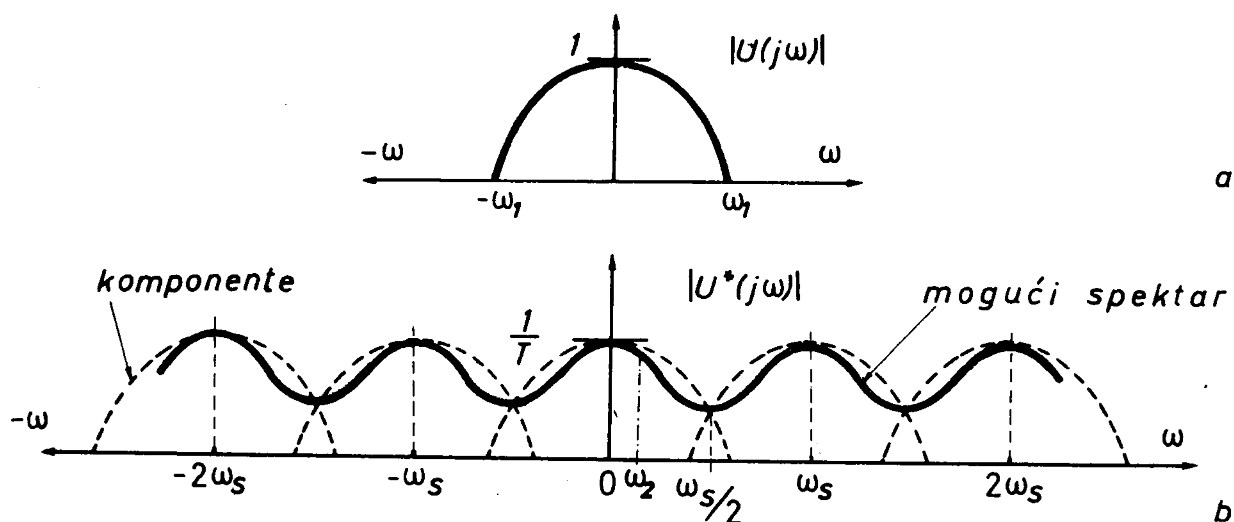
a) Za $\omega_s > 2\omega_1$ ne postoji preklapanje među spektrima (sl. 8.18.b). Spektar oko točke $\omega = 0$ reproducirani je originalni spektar $|U(j\omega)|$ umanjen za $\frac{1}{T}$. Ako se signal $u^*(t)$ propusti kroz filter s pojačanjem 1 unutar frekvencijskog intervala $(-\omega_s/2, \omega_s/2)$ i pojačanjem 0 izvan tog intervala (sl. 8.19), izlaz iz takvog filtera bit će originalni signal $u(t)$ prigušen s $\frac{1}{T}$. Takvim idealnim filterom može se restaurirati originalni signal $u(t)$ iz diskretnog signala $u^*(t)$, ako je frekvencija diskretiziranja veća od dvostruke najveće frekvencije koja se pojavljuje u originalnom signalu.



Slika 8.19

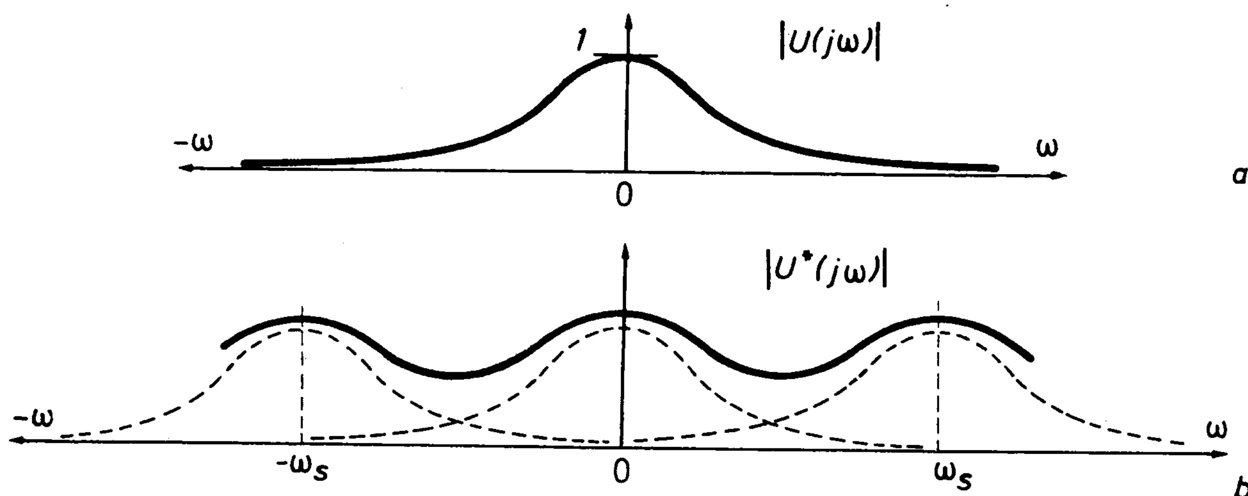
b) Ako je frekvencija diskretiziranja $\omega_s < 2\omega_1$ dio informacijskog sadržaja se u procesu diskretiziranja gubi. Sa slike 8.20. vidljivo je da je u području $0 \leq \omega \leq \omega_2$ spektar diskretiziranog signala $|U^*(j\omega)|$ jednak spektru kontinuiranog signala $|U(j\omega)|$ umanjenom s koeficijentom gušenja $\frac{1}{T}$. U frekvencijskom području $\omega_2 \leq \omega \leq \omega_1$, $|U^*(j\omega)|$ vektorska je suma dviju komponenti oko frekvencija $\omega = 0$

i $\omega=\omega_s$. Pravi oblik spektra u tom intervalu ovisit će o fazama ovih komponenti. Na sl. 8.20. pretpostavljeno je da spektar može imati oblik dan punom linijom.



Slika 8.20.

c) Informacijski sadržaj mijenja se i onda kada je spektar originalnog signala beskonačan $\omega_1 \to \infty$ (sl. 8.21).



Slika 8.21.

U takvim situacijama period diskretiziranja odabire se prema vremenskim konstantama u sistemu.

Na osnovi izloženog može se reći da uključivanje impulsnog elementa u regulacijski krug ima za posljedicu:

- deformaciju kontinuiranog signala, tj. gubitak dijela korisne informacije sadržane u kontinuiranom signalu
- generiranje visokofrekventnih komponenata u diskretnom signalu
- proširenje spektra na čitavo frekvencijsko područje zbog pomicanja originalnog spektra za $\pm k\omega_s$ $(k=1, 2, \ldots)$
- gubitak energetskog nivoa kontinuiranog signala.

Teorem o uzimanju uzoraka

Kod diskretiziranja kontinuiranog signala postavlja se pitanje koliko često treba uzimati uzorke da bi diskretizirani signal bio ekvivalentan kontinuiranom, tj. da sadržaj informacije diskretnog i kontinuiranog signala bude ekvivalentan. Teorem koji daje odgovor na to pitanje zove se *impulsni teorem*. U anglosaksonskoj literaturi ima naziv teorem Shannona (odnosno Nyquist – Shannona), a u sovjetskoj literaturi ima naziv teorem Koteljnikova:

Ako je srednja frekvencija diskretiziranja (ω_s) *veća od dvostruke najviše frekvencije u kontinuiranom signalu* (ω_1), *diskretizirani signal potpuno će vjerno prenositi svojstva kontinuiranog signala.*

$$\omega_s > 2\omega_1$$

Kao primjer može se uzeti signal govora u kojem je maksimalna frekvencija $f_1 = 4000$ Hz. Prema impulsnom teoremu dovoljno je diskretizirati govorni signal s dvostruko većom frekvencijom $f_s = 8000$ Hz ili svakih $T = 125\ \mu s$, pa da dobiveni diskretni signal sadrži poruku originalnog signala. Originalni govorni signal moguće je reproducirati iz diskretnog pomoću filtera (sl. 8.19). Na tom principu (princip *time sharinga*) rade mnogi uređaji. Tako na primjer, ako telefonski kabel može prenijeti impulse širine 1 μs, tada je takvim kabelom moguće prenijeti 125 govora „istovremeno" na taj način da se svaki od govora diskretizira u drugom trenutku. Svake 1 μs diskretizira se drugi govor.

U sistemima u kojima se računalo koristi u upravljanju, taj princip ima važnu ulogu, jer omogućava da jedno računalo upravlja s više procesa.

U instrumentaciji taj princip omogućava da se mjerenje neke veličine ne mora kontinuirano pratiti, već samo u određenim trenucima. Na taj način izbjegava se da detektor djeluje na sredinu u kojoj mjeri signale (na primjer) utjecaj temperaturnog otpornika na temperaturu koju mjeri).

U slučajevima kada nije poznata maksimalna frekvencija u signalu ili kada je ona beskonačna (npr. opadajuća eksponencijalna funkcija ima beskonačan spektar), period diskretiziranja određuje se na više načina.

Jedan od načina jest da se procijeni trajanje prijelaznog procesa $t_s[s]$ u sistemu i za period diskretizacije odabere deseti dio tog iznosa. Ako je najmanja vremenska konstanta sistema manja od tako dobivenog perioda diskretiziranja, tada je potrebno za period diskretiziranja uzeti veličinu jedne polovine najmanje vremenske konstante sistema. Taj izbor predstavlja procjenu od koje treba poći pri izboru prave periode diskretiziranja, koju je tada moguće dobiti ispitivanjem sistema simulacijom.

Druga mogućnost L[22] izbora perioda diskretiziranja osniva se na frekvencijskom prikazu odziva sistema $|Y(j\omega)|$ na skokovitu pobudu. Ako se iz dobivene frekvencijske krivulje $|Y(j\omega)|$ odredi frekvencija (ω_T) kod koje je gušenje u sistemu veliko, na primjer $20 \log |Y(j\omega_T)| = -40$ dB ili $|Y(j\omega_T)| = 0{,}01$ tada se na osnovi te frekvencije period diskretiziranja može po impulsnom teoremu odrediti kao:

$$T = \frac{\pi}{\omega_T} \tag{8.22}$$

Treća mogućnost L [19] jest da se iz frekvencijske karakteristike otvorenog kontinuiranog dijela sistema $G(j\omega)$, odredi frekvencija ω_{gr}, kod koje gušenje padne na -20 dB. Period diskretiziranja tada se odredi iz izraza:

$$T \leq \frac{0{,}6}{\omega_{gr}} \tag{8.22.a}$$

S takvim izborom greška u realizaciji diskretiziranog sistema u odnosu na originalni kontinuirani sistem ne premašuje $5 \div 10\%$.

Navedene preporuke pri izboru perioda diskretiziranja su početni korak, koji uz naknadna ispitivanja sistema (na primjer, simulacijom na računalu), mogu olakšati brže i točnije definiranje perioda diskretiziranja T.

8.5. Element za formiranje

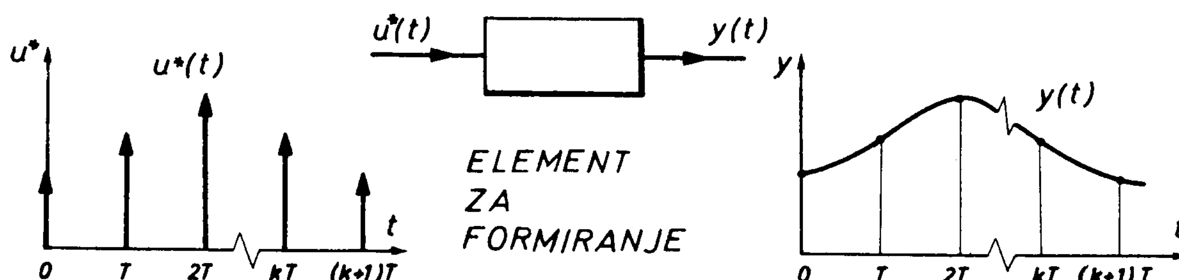
Signal iz impulsnog elementa je niz impulsa beskonačno male širine, koji nose informaciju o kontinuiranom signalu na njegovu ulazu. Prije priključivanja ovog signala na proces (kontinuirani dio sistema) potrebno je rekonstruirati kontinuirani signal iz impulsnog niza. To se vrši kako zbog potrebe za energijom, tako i zbog potrebe za filtriranjem visokofrekventnih komponenata koje su generirane procesom diskretiziranja. *Element za formiranje (ekstrapolator) je sklop koji rekonstruira kontinuirani signal (s ulaza impulsnog elementa) iz diskretnog signala (na izlazu impulsnog elementa)* (sl. 8.13).

Frekvencijska karakteristika elementa za formiranje mora prema tome imati oblik niskofrekventnog filtera, kako bi se odstranile neželjene visokofrekvencijske komponente (sl. 8.19).

Element za formiranje pretvara diskretizirani signal u kontinuirani, interpolacijom ili ekstrapolacijom ulaznih impulsa, kako bi se iz dobivene funkcije mogao približno odrediti oblik originalnog signala. „Izglađivanje“ impulsa pomoću elementa za formiranje u osnovi je problem ekstrapolacije. Naime, ekstrapolirana vremenska funkcija između dva uzastopna trenutka diskretizacije kT i $(k+1)T$ ovisi o njenim vrijednostima u prethodnim trenucima diskretizacije $(k-1)T$, $(k-2)T, \ldots$ i općenito se može opisati Taylorovim redom jednadžbe 8.23. između $t=kT$ i $t=(k+1)T$:

$$y_k(t) = u(kT) + \frac{u'(kT)}{1!} \cdot (t-kT) + \frac{u''(kT)}{2!} \cdot (t-kT)^2 + \\ + \ldots + \frac{u^{(\nu)}(kT)}{\nu!} \cdot (t-kT)^{\nu} + \ldots \tag{8.23}$$

$u(kT)$ je vrijednost funkcije $u(t)$ u $t=kT$, a $u'(kT)$, $u''(kT), \ldots$, $u^{(\nu)}(kT)$ su derivacije funkcije $u(t)$ u $t=kT$.

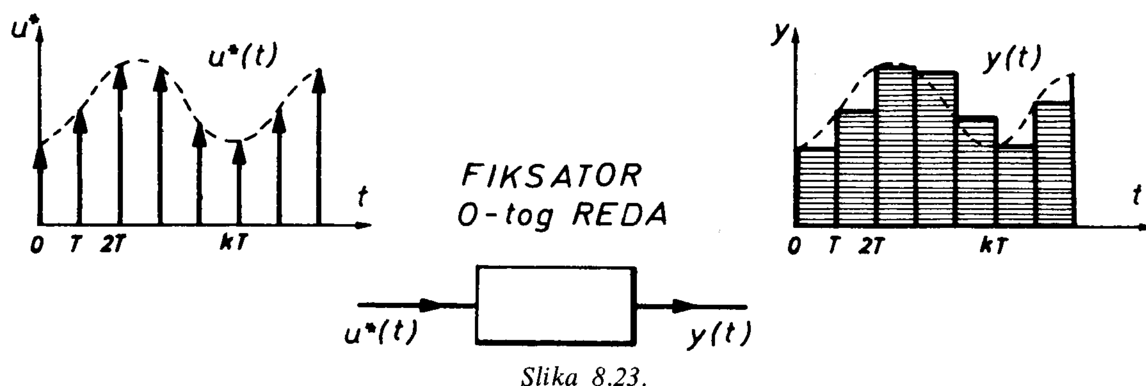


Slika 8.22.

Kada se element za formiranje projektira tako da u intervalu između dva otipkavanja funkciju $u(t)$ aproksimira s polinomom nultog reda, tj. konstantom jednakoj vrijednosti funkcije na početku intervala,

$$y_k(t)=u(kT) \quad \text{za} \quad kT \leq t \leq (k+1)T \tag{8.24}$$

tada se takav element zove fiksator nultog reda. Na sl. 8.23. prikazan je izlazni signal fiksatora nultog reda.

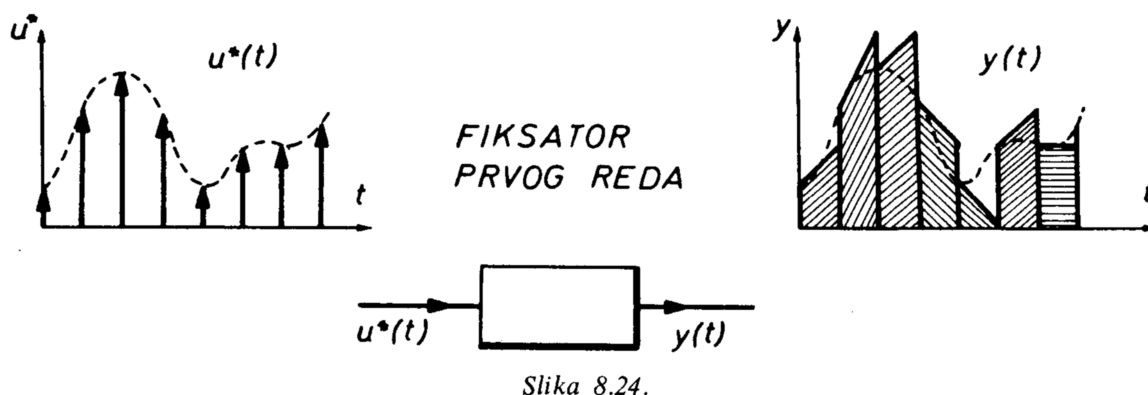


Slika 8.23.

Ako element za formiranje aproksimira kontinuiranu funkciju polinomom prvog reda u intervalu između dva uzimanja uzorka,

$$y_k(t)=u(kT)+u'(kT)\cdot(\mathrm{t}-kT) \tag{8.25}$$

tada se takav element naziva fiksator prvog reda. Na sl. 8.24. prikazan je oblik izlaznog signala fiksatora prvog reda.



Slika 8.24.

Izraz (8.25) može se napisati:

$$y_k(t)=u(kT)+\frac{u(kT)-u[(k-1)T]}{T}\cdot(\mathrm{t}-kT) \tag{8.26}$$

Jednadžba (8.26) pokazuje da je za aproksimaciju funkcije polinomom prvog reda potrebno poznavati dva podatka o funkciji. U $t=kT$ i u $t=(k-1)T$. Aproksimacija druge derivacije signala $u(t)$ u $t=kT$ dana je izrazom (8.27):

$$u''(kT)=\frac{u'(kT)-u'[(k-1)T]}{T}$$

$$= \frac{u(kT) - 2u[(k-1)T] + u[(k-2)T]}{T^2} \tag{8.27}$$

Može se ustvrditi da je minimalni broj podataka potrebnih za aproksimaciju funkcije polinomom ν-tog reda jednak $\nu + 1$.

Tako npr. za fiksator drugog reda potrebna su 3 podatka o funkciji u trenutku $t = kT$ i u dva prethodna trenutka $t = (k-1)T$ i $t = (k-2)T$. Prema tome, za određivanje derivacije funkcije u nekoj točci potrebno je to više podataka, što je veći red derivacije koja se traži.

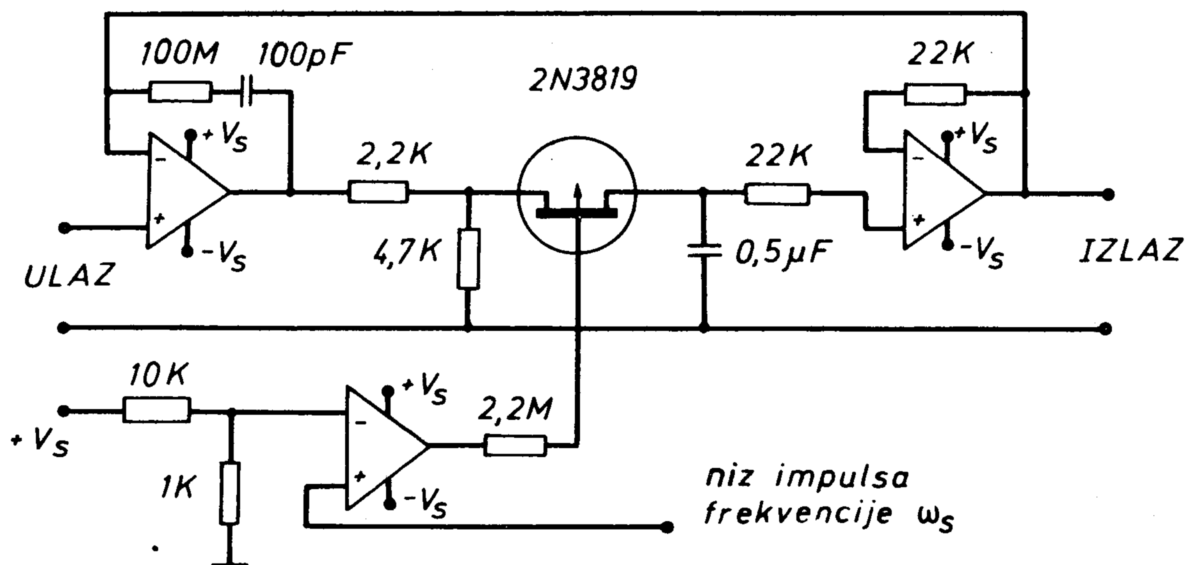
Fiksatori višeg reda točnije aproksimiraju kontinuirani signal, nepovoljno utječu na stabilnost, jer unose u sistem veće kašnjenje i efikasnije filtriraju visokofrekventne komponente sadržane u diskretnom signalu.

Pri projektiranju fiksatora treba imati na umu dva kontradiktorna zahtjeva, a to su dozvoljene količine visokofrekventnih komponenti u izlaznom signalu fiksatora te potrebna stabilnost, tj. dinamička svojstva sistema. Rješenje je očito u kompromisu među tim zahtjevima.

Zbog visokih troškova i konstrukcijskih problema koji se javljaju pri projektiranju fiksatora viših redova, kao i zbog faznih pomaka koje oni unose u sistem, najčešće se susreću fiksatori nultog reda a ponekad i fiksatori prvog reda. Oni u praksi potpuno zadovoljavaju, pogotovo kada su frekvencije diskretiziranja veće.

Fiksator nultog reda

Fiksator nultog reda „pamti" vrijednost signala $u(kT)$ u intervalu $kT \leq T \leq (k+1)T$. Jedan jednostavan sklop fiksatora prikazan je na sl. 8.25.



Slika 8.25.

Osnovni princip rada fiksatora nultog reda sastoji se u naglom punjenju i sporom pražnjenju kondenzatora. Kondenzator se naglo puni u trenutku diskretizacije i drži postignuti napon do sljedećeg trenutka uzimanja uzorka. Što je pražnjenje kondenzatora sporije, to je veća kvaliteta fiksatora. Idealni fiksator trebao bi u

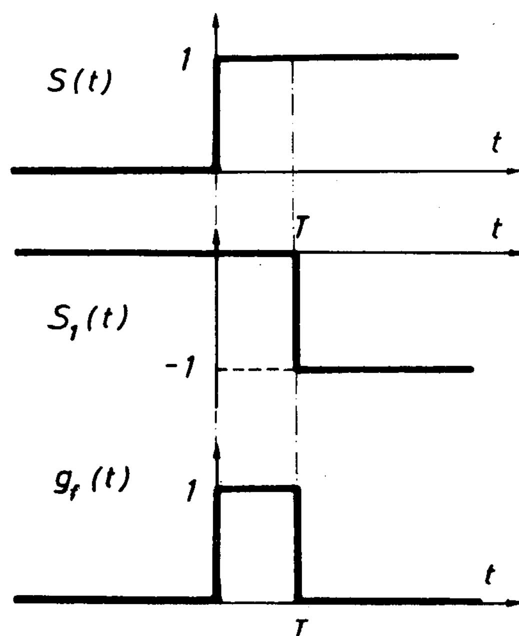
intervalu između dva otipkavanja imati konstantan napon, jednak iznosu napona signala $u(t)$ u $t=kT$.

Prijenosna funkcija fiksatora dobije se Laplaceovom transformacijom težinske funkcije (impulsnog odziva) fiksatora $g_f(t)$.



Slika 8.26.

Impulsni odziv (težinska funkcija) fiksatora nultog reda može se tretirati kao zbroj dvije odskočne funkcije, od kojih je jedna pomaknuta za T i ima negativnu amplitudu (sl. 8.27).



Slika 8.27.

Iz sl. 8.27. proizlazi:

$$g_f(t)=S(t)-S(t-T) \tag{8.28}$$

$$G_F(s)=\mathrm{L}\{g_f(t)\}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-Ts}=\frac{1-e^{-Ts}}{s} \tag{8.29}$$

Iz izraza (8.29) vidljivo je da se fiksator nultog reda pri visokim frekvencijama ponaša kao deformirani integrator. Naime, povećanjem frekvencije ulaznog signala povećava se i fazno deformiranje tog signala uslijed člana s kašnjenjem uz istovremeno gušenje amplitude.

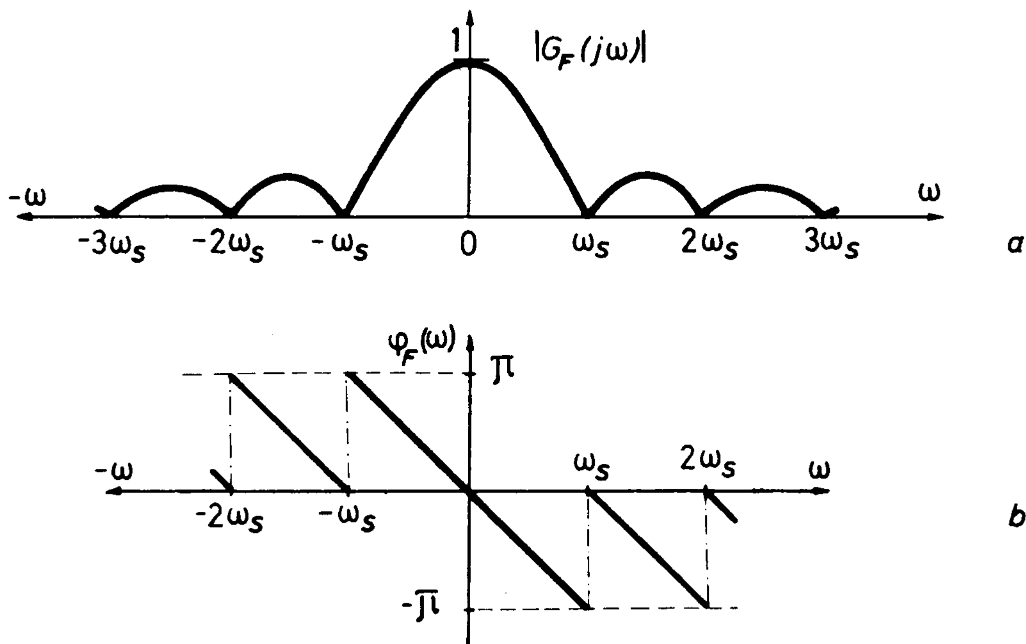
Zamjenom s s $j\omega$ u jednadžbi (8.29) dobit će se frekvencijska karakteristika fiksatora nultog reda:

$$G_F(j\omega)=\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega} \tag{8.30}$$

$$|G_F(j\omega)| = \left| T \cdot \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right| \tag{8.31}$$

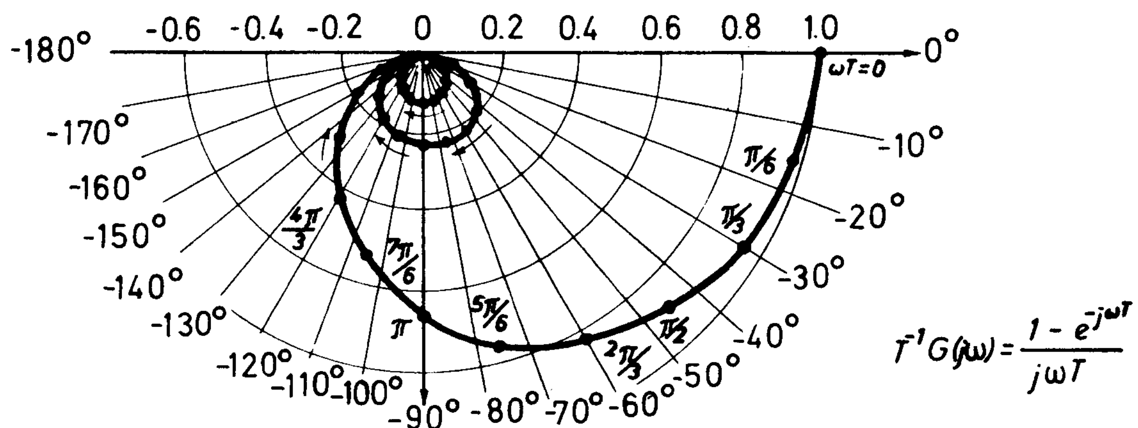
$$\varphi_F(\omega) = -\frac{\pi}{\omega_s} \cdot \omega = -\frac{T}{2} \cdot \omega \tag{8.32}$$

Jednadžba (8.32) pokazuje da fiksator nultog reda unosi fazno zaostajanje od $-180°$ na frekvenciji diskretiziranja ω_s. Slika 8.28.a i 8.28.b daje frekvencijske karakteristike fiksatora nultog reda.



Slika 8.28.

Na slici je vidljivo da se ovdje radi o niskofrekventnom filteru koji propušta niskofrekventne osnovne komponente, a guši pomaknute visokofrekventne komponente dobivene diskretiziranjem kontinuiranog signala.



Slika 8.29.

Na sl. 8.29. dana je frekvencijska karakteristika fiksatora nultog reda podijeljena s periodom diskretiziranja u polarnom koordinatnom sistemu.

Tablica 8.1. daje nekoliko vrijednosti za frekvencijsku karakteristiku fiksatora nultog reda.

Tablica 8.1.

ω/ω_s	0	$^1/_4$	$^1/_2$	$^3/_4$	1
$\lvert G_F(j\omega)\rvert$	T	0,901 T	0,636 T	0,300 T	0
$\varphi_F(\omega)$	0°	−45°	−90°	−135°	−180°

Na frekvenciji $\omega_s/2$ (tabela 8.1) fiksator propušta 63,6% od ulaznog signala. Fiksator ne guši naglo komponente viših frekvencija, iako se faza naglo smanjuje s povećanjem frekvencije. Kada je ulazni signal sporo promjenjiv, fiksator nultog reda je efikasniji.

U slučaju kad element za formiranje ne „pamti" signal u čitavom periodu diskretiziranja (sl. 8.13), tada njegova prijenosna funkcija glasi:

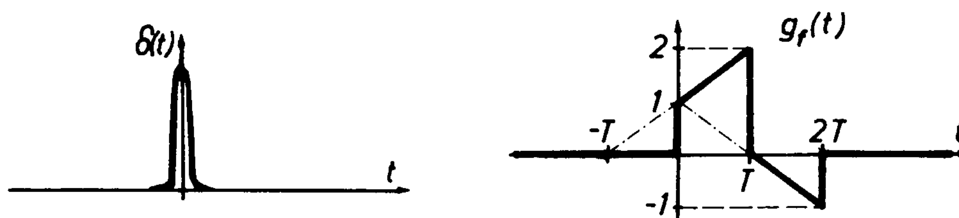
$$G_F(s) = K_F \cdot \frac{1 - e^{-aTs}}{s} \tag{8.33}$$

kada je $a \ll 1$ tada:

$$G_F(s) \simeq K_F \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{a} \tag{8.34}$$

Fiksator prvog reda

Fiksator prvog reda ekstrapolira signal između dva otipkavanja polinomom prvog reda. Na sl. 8.30. prikazan je impulsni odziv fiksatora prvog reda.



Slika 8.30.

U intervalu $0 \leq t \leq T$, $\quad g_f(t) = 1 + \frac{t}{T}$

u intervalu $T \leq t \leq 2T$, $\quad g_f(t) = 1 - \frac{t}{T}$

u intervalu $2T \leq t \leq 0$, $\quad g_f(t) = 0$.

Na temelju izloženog impulsni odziv fiksatora prvog reda opisuje se izrazom:

$$g_f(t) = \left(1+\frac{t}{T}\right)\cdot S(t) - 2\cdot\left(1+\frac{t-T}{T}\right)\cdot S(t-T) + \\ + \left(1+\frac{t-2T}{T}\right)\cdot S(t-2T) \tag{8.35}$$

Prijenosna funkcija fiksatora glasi:

$$G_F(s) = \mathsf{L}\{g_f(t)\} = \frac{1}{s} + \frac{1}{Ts^2} - 2\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{Ts^2}\right)e^{-Ts} + \\ + \left(\frac{1}{s}+\frac{1}{Ts^2}\right)e^{-2Ts} \tag{8.36}$$

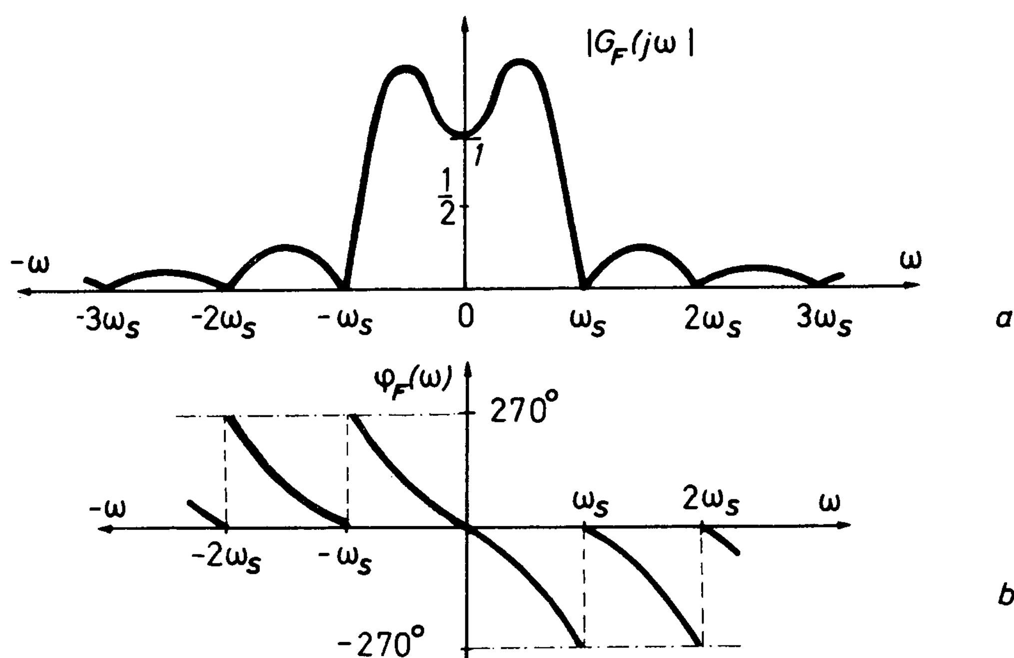
$$G_F(s) = \frac{1+Ts}{T}\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right)^2 \tag{8.37}$$

Zamjenom s s $j\omega$ u gornjoj jednadžbi dobit će se:

$$G_F(j\omega) = \frac{1+jT\omega}{T}\cdot\left(\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}\right)^2 \tag{8.38}$$

$$|G_F(j\omega)| = T\cdot\sqrt{1+T^2\omega^2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{\pi\omega}{\omega_s}}{\frac{\pi\omega}{\omega_s}}\right)^2 \tag{8.39}$$

$$\varphi_F(j\omega) = -\frac{2\pi\omega}{\omega_s} + \operatorname{arctg}\frac{2\pi\omega}{\omega_s} \tag{8.40}$$



Slika 8.31.

Amplitudna i fazna frekvencijska karakteristika fiksatora prvog reda prikazana je na sl. 8.31.

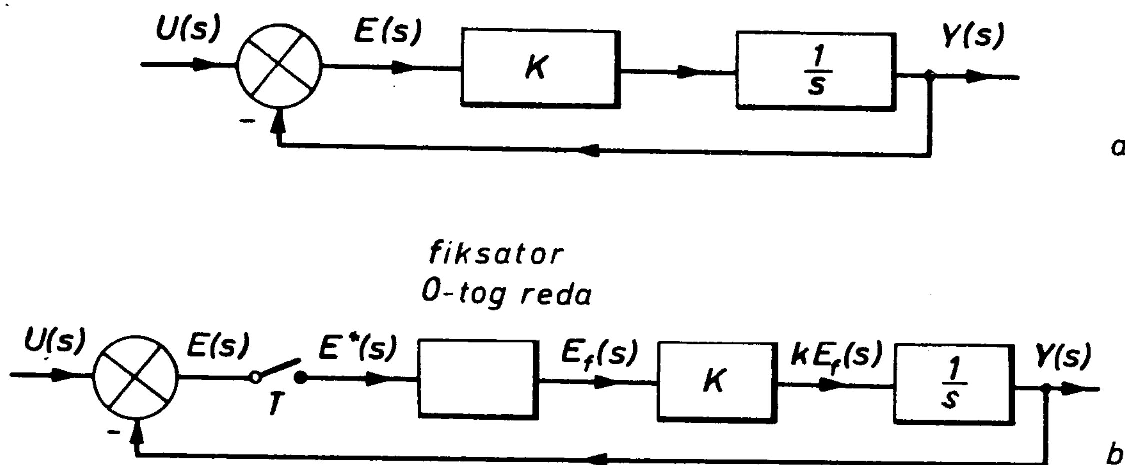
Usporedbom sl. 8.31. i sl. 8.28. vidljivo je da fiksator prvog reda efikasnije filtrira od fiksatora nultog reda, a to znači bolje „izglađuje" signal. S druge strane on unosi veća fazna zaostajanja, tj. više destabilizira sistem. Na frekvenciji ω_s fiksator prvog reda ima fazno zaostajanje $-270°$, dok fiksator nultog reda ima $-180°$.

Fiksator nultog reda može se promatrati i kao sistem s usporenjem (sl. 8.29). Uz pravilno određen period diskretiziranja, prema vremenskim konstantama u sistemu, on može i poboljšati stabilnost, pogotovo ako stabilizacija zahtijeva korekciju s faznim zaostajanjem.

8.6. Jednadžba diferencija

Analogno primjeni diferencijalnih jednadžbi u analizi kontinuiranih sistema, u teoriji diskretnih sistema koriste se jednadžbe diferencija. Na sl. 8.32. dan je prikaz strukturnih shema kontinuiranog (a) i diskretnog sistema (b). Za razliku od kontinuiranog sistema, diskretni sistem sadrži u svojoj strukturi barem jedan impulsni element i element za formiranje.

Iz slike 8.32. vidljivo je da se prikazani diskretni sistem (b) razlikuje od kontinuiranog (a) samo po signalu razlike koji je diskretna veličina. Kontinuirani sistem može se dobiti iz diskretnog, ako period diskretiziranja teži nuli.



Slika 8.32.

Diferencijalnu jednadžbu kontinuiranog sistema moguće je dobiti sljedećim načinom:

$$\varepsilon(t) = u(t) - y(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) = K \cdot \varepsilon(t)$$

$$\dot{y}(t) + K \cdot \mathrm{y}(\mathrm{t}) = K \cdot \mathrm{u}(\mathrm{t}) \tag{8.41}$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe (8.41) jest:

$$y(t) = y(0)\, e^{-K \cdot t} + \int_0^t e^{-K(t-\tau)} \cdot K \cdot u(\tau)\, d\tau \tag{8.42}$$

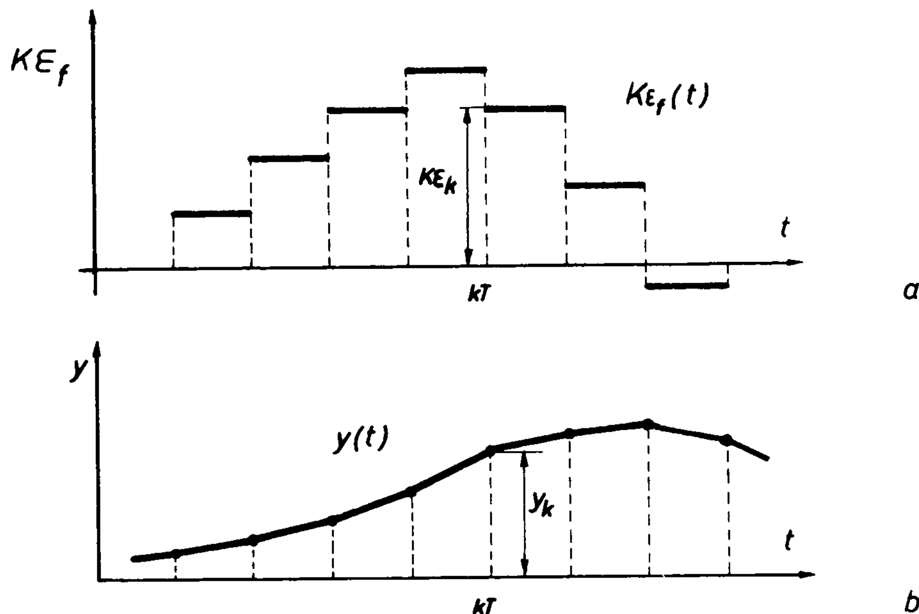
Prvi dio rješenja predstavlja opće rješenje pripadne homogene diferencijalne jednadžbe, a drugi dio predstavlja partikularno rješenje. Često se opće rješenje zove prijelazni dio rješenja (jer ovisi samo o početnim uvjetima $y(0)$ dok je $u(t)=0$), a partikularno rješenje – prinudno rješenje (jer ne ovisi o početnim uvjetima već o signalu $u(t)$).

Na primjer, ako nema početnih uvjeta $y(0)=0$, a na ulaz je narinuta pobuda $u(t)=S(t)$, tada rješenje glasi:

$$y(t)=\int_0^t e^{-K\cdot(t-\tau)}K d\tau = e^{-Kt}\int_0^t K e^{-K\tau} d\tau = 1-e^{-Kt}$$

što predstavlja poznati odziv statičkog sistema s usporenjem prvog reda na odskočnu pobudnu funkciju.

Za diskretni sistem, signal $K\varepsilon_f(t)$ prikazan je na sl. 8.33.a, dok je izlazni signal iz integratora prikazan slikom 8.33.b.



Slika 8.33.

Na osnovi vrijednosti funkcije $y[(k+1)T]$, moguće je odrediti funkciju $y(kT)$. Budući da je signal na sl. 8.33.b integral signala sa slike 8.33.a slijedi jednadžba diferencije:

$$y[(k+1)T]=y(kT)+K\cdot T\cdot\varepsilon(kT) \tag{8.43}$$

Izraz (8.43) povezuje vrijednosti signala u trenutku $t=(k+1)T$ s vrijednošću signala u prethodnom trenutku $t=kT$.

$$\varepsilon(kT)=u(kT)-y(kT) \tag{8.44}$$

Uvrštenjem (8.44) u (8.43) dobit će se jednadžba diferencije sistema:

$$y[(k+1)T]=(1-kT)\cdot y(kT)+KT\cdot \mathrm{u}(\mathrm{kT}) \tag{8.45}$$

odnosno:

$$\frac{y[(k+1)T]-y(kT)}{T}+K\cdot y(kT)=K\cdot u(kT) \tag{8.46}$$

Usporedbom jednadžbe (8.46) s jednadžbom (8.41) uočava se da prvoj derivaciji signala $y(t)$ odgovara prvi član u jednadžbi (8.46), koji se zove prva diferencija ili diferencija prvog reda (oznaka Δ):

$$\Delta y(kT) = \frac{y[(k+1)T] - y(kT)}{T} \tag{8.47}$$

druga diferencija može se izraziti:

$$\begin{aligned}\Delta^2 y(kT) &= \frac{\Delta y[(k+1)T] - \Delta y(kT)}{T^2} \\ &= \frac{y[(k+2)T] - 2y[(k+1)T] + y(kT)}{T^2}\end{aligned} \tag{8.48}$$

v-ta diferencija:

$$\begin{aligned}\Delta^{\nu} y(kT) &= \frac{\Delta^{\nu-1} y[(k+1)T] - \Delta^{\nu-1} y(kT)}{T^{\nu}} \\ &= \frac{1}{T^{\nu}} \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^{\nu-i} \cdot \frac{\nu!}{i!\,(\nu-i)!} \cdot y[(k+i)T]\end{aligned} \tag{8.49}$$

Nedostatak takvog tipa diferencije jest u tome da za diferenciju u k-tom trenutku zahtijeva poznavanje funkcije u sljedećem trenutku $k+1$.

Druga vrsta diferencija mnogo je prikladnija, jer koristi podatke iz prethodnih trenutaka (oznaka ∇). Tako za prvu diferenciju:

$$\nabla y(kT) = \frac{y(kT) - y[(k-1)T]}{T} \tag{8.50}$$

za drugu diferenciju:

$$\begin{aligned}\nabla^2 y(kT) &= \frac{\nabla y(kT) - \nabla y[(k-1)T]}{T^2} \\ &= \frac{y(kT) - 2y[(k-1)T] + y[(k-2)T]}{T^2}\end{aligned} \tag{8.51}$$

Za v-tu diferenciju:

$$\begin{aligned}\nabla^{\nu} y(kT) &= \frac{\nabla^{\nu-1} y(kT) - \nabla^{\nu-1} y[(k-1)T]}{T^{\nu}} \\ &= \frac{1}{T^{\nu}} \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^{i} \cdot \frac{\nu!}{i!\,(\nu-i)!} \cdot y[(k-i)T]\end{aligned} \tag{8.52}$$

Veza ovih dviju vrsta diferencija dana je izrazom:

$$\nabla^{\nu} y(kT) = \Delta^{\nu} y[(k-\nu)T] \tag{8.53}$$

Za rješavanje jednadžbi diferencija postoje rekurzivne i analitičke metode rješavanja.

Rekurzivne metode prikladne su kada se jednadžbe rješavaju pomoću digitalnog računala. Tako se npr. rješenje jednadžbe diferencija (8.45) dobije uzastopnim rješavanjem jednadžbe za $k=0, 1, 2, \ldots$ Ako je poznat početni uvjet $y(0)$, te iznos funkcije $u(0)$, $u(T)$, $u(2T), \ldots$ može se dobiti rješenje:

$$\left.\begin{aligned} y(T) &= (1-KT)\cdot y(0)+KT\cdot u(0) \\ y(2T) &= (1-KT)\cdot y(T)+KT\cdot u(T) \\ &= (1-KT)^2\cdot y(0)+(1-KT)KT\cdot u(0)+KT\cdot u(T) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y(kT) &= (1-KT)^k\cdot y(0)+KT\sum_{i=0}^{k-1}(1-KT)^{1-k-i}\cdot u(iT) \end{aligned}\right\} \tag{8.54}$$

Analitičke metode rješavanja jednadžbe diferencija analogne su postupku koji se primjenjuje pri rješavanju linearnih diferencijalnih jednadžbi. Rješenje jednadžbe diferencija traži se u obliku:

$$y(n)=Az^n \tag{8.55}$$

gdje su A i z u općem slučaju kompleksne veličine.

U općem slučaju linearnu jednadžbu diferencija moguće je napisati u obliku:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k+i)=\sum_{j=0}^{m} b_j u(k+j); \quad \text{uz } m\leq n \tag{8.56}$$

n ... red diferencije signala $y(kT)$

m ... red diferencije signala $u(kT)$

a_i, b_j ... konstante koje karakteriziraju svojstva sistema. Ako a_i, b_j nisu konstante, sistem je nestacionaran.

Kada je $m>n$ sistem je fizikalno neostvariv, budući da tada jednadžba (8.56) pretpostavlja da su vrijednosti izlaznog signala $y(kT)$ ovisne o budućim vrijednostima ulaznog signala $u[(k+v)T]$.

8.7. Z-transformacija

Rješenja jednadžbe diferencija mogu se dobiti operatorskim postupkom. Na sličan način kao što se Laplaceova transformacija koristi kao operatorski postupak pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi, tako se i Z-transformacija koristi kao operatorski postupak za rješavanje jednadžbi diferencija.

Diskretna funkcija (8.12) može se izraziti u obliku:

$$y^*(t)=\delta_T^*(t)\cdot y(t) \tag{8.57}$$

Uz pretpostavku da za $t<0 \Rightarrow y(t)=0$ iz (8.57) i (8.13) proizlazi:

$$\begin{aligned} y^*(t) &= y(t)\delta(t)+y(t)\delta(t-T)+y(t)\delta(t-2T)+\ldots \\ &= y(0)\delta(t)+y(T)\delta(t-T)+y(2T)\delta(t-2T)+\ldots \end{aligned} \tag{8.58}$$

Primjenom L-transformacije na diskretnu funkciju (8.58) proizlazi diskretna Laplaceova transformacija:

$$Y^*(s) = y(0) + y(T)e^{-Ts} + y(2T)e^{-2Ts} + \dots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)e^{-kTs} \tag{8.59}$$

Ako se u izrazu (8.59), e^{-Ts} zamijeni sa $\frac{1}{z}$ dobit će se Z-transformacija funkcije:

$$Y(z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k} \tag{8.60}$$

Uz

$$\frac{1}{z} = e^{-Ts} \tag{8.61}$$

proizlazi također:

$$s = \frac{1}{T} \cdot \ln z \tag{8.62}$$

$$Y(z) = Y^*\left(\frac{1}{T}\ln z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k} \tag{8.63}$$

ili

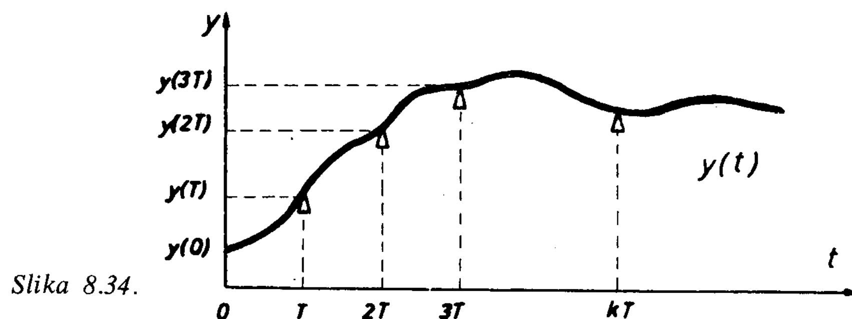
$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} \tag{8.64}$$

Usporedi li se izraz (8.60) s izrazom za Laplaceovu transformaciju kontinuirane funkcije

$$Y(s) \overset{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} y(t)e^{-st}dt \tag{8.65}$$

uočava se sličnost tih dviju transformacija. Jezgra Laplaceove transformacije e^{-st} postaje jezgra Z-transformacije z^{-k}. Kontinuirana funkcija $y(t)$ postaje diskretna funkcija $y(kT)$, a integral se pretvara u sumu.

Operator z^{-k} predstavlja zapravo kašnjenje δ funkcije u vremenskoj domeni za kT perioda diskretiziranja.



Slika 8.34.

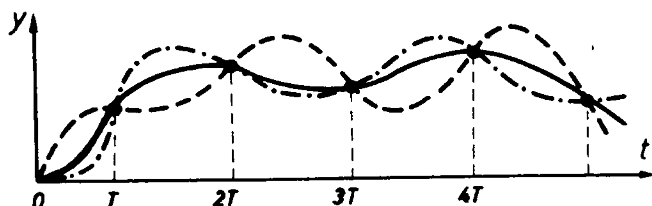
Izraz (8.60) omogućava da se poznata funkcija, npr. prikazana grafički na slici 8.34, preslika u Z-domenu jednostavnim uvrštavanjem vrijednosti funkcije u red u kojem koeficijent uz z^{-k} definira vrijednost funkcije u trenutku $t = kT$.

Sa slike 8.34. moguće je očitovanjem vrijednosti funkcije pisati:

$$Y(z)=y(0)+y(T)z^{-1}+y(2T)z^{-2}+y(3T)z^{-3}+\dots \tag{8.66}$$

Kod Z-transformacije može se uočiti da veza između funkcije u vremenskoj domeni $y(t)$ i pripadne Z-transformacije te funkcije nije jednoznačna u oba smjera. Naime, više različitih kontinuiranih funkcija može imati istu Z-transformaciju, jer imaju iste vrijednosti u trenucima diskretiziranja, kao što je prikazano na sl. 8.35.

Z-transformacija daje vrijednost funkcije samo u trenucima diskretiziranja, a ne daje odgovor o ponašanju funkcije između trenutaka diskretiziranja.



Slika 8.35.

Red u jednadžbi (8.60) treba se uvijek promatrati kao formalni red s kojim će se vršiti određene manipulacije, a ne kao red kojeg treba uvijek sumirati.

Ako $y(t)$ ima skok u trenutku $t=kT$, za vrijednost funkcije u tom trenutku $y(kT)$ će se uzeti limes funkcije $y(t)$, kada $t \to kT^{+}$ (pretpostavlja se da limes postoji).

Svojstva Z-transformacije

Svojstva Z-transformacije mogu se izložiti preko osnovnih teorema Z--transformacije. Analogno teoremima L-transformacije kontinuirane funkcije, definirani su teoremi Z-transformacije.

1. Linearnost

Ako su funkcije $y(t)$, $y_1(t)$ i $y_2(t)$ *Z-transformabilne*, tj. imaju *Z-transformacije* $Y(z)$, $Y_1(z)$ i $Y_2(z)$, te ako je „a“ konstanta tada proizlazi:

$$Z\{a\,y(t)\}=a\cdot Y(z) \tag{8.67}$$

$$Z\{y_1(t)\pm y_2(t)\}=Y_1(z)\pm Y_2(z) \tag{8.68}$$

Teorem se može jednostavno dokazati primjenom izraza (8.60), pomoću kojega se dokazuju i ostali teoremi.

2. Teorem realnog pomaka

Ako je $Z\{y(t)\}=Y(z)$ tada proizlazi:

$$Z\{y(t\pm T)\}=z^{\pm 1}[Y(z)-f(0^{+})] \tag{8.69}$$

što se može poopćiti:

$$Z\{y(t\pm kT)\}=z^{\pm k}\left[Y(z)-\sum_{\upsilon=0}^{k-1} y(\upsilon T)z^{-\upsilon}\right] \tag{8.70}$$

Ovim teoremom pomak u vremenskoj domeni preslikava se u z domenu množenjem sa $z^{\pm k}$. Teorem ima važnu ulogu pri rješavanju jednadžbi diferencija.

3. Teorem o promjeni mjerila u z domeni (teorem kompleksne promjene skale)

Ako je $Z\{y(t)\} = Y(z)$ tada proizlazi:

$$Z\{e^{\pm at}y(t)\} = Y(e^{\mp aT}z) \qquad (8.71)$$

Množenje u vremenskoj domeni s $e^{\pm at}$ preslikava se u z domenu kao promjena z skale.

4. Teorem o konačnom sumiranju

Da bi se dobila Z-transformacija

$$Z\left\{\sum_{\upsilon=0}^{k} y(\upsilon T)\right\}$$

potrebno je najprije definirati:

$$\sum_{\upsilon=0}^{k} y(\upsilon T) \overset{\text{def}}{=} f(kT)$$

ili

$$\sum_{\upsilon=0}^{k-1} y(\upsilon T) \overset{\text{def}}{=} f[(k-1)T] \qquad (8.72)$$

Relaciju između uzastopnih vrijednosti sume moguće je dobiti korištenjem izraza (8.72):

$$f(kT) = f[(k-1)T] + y(kT) \qquad (8.73)$$

Z-transformacijom izraza (8.73) dobit će se:

$$F(z) = z^{-1}F(z) + Y(z)$$

$$F(z) = Z\left\{\sum_{\upsilon=0}^{k} y(\upsilon T)\right\} = \frac{z}{z-1}\,Y(z), \quad \text{za } |z|>1 \qquad (8.74)$$

5. Teorem o početnoj vrijednosti

Iz definicije Z-transformacije:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k} = y(0) + y(T)z^{-1} + y(2T)z^{-2} + \ldots$$

14 *

proizlazi da će:

$$y(0)=\lim_{z\to\infty} Y(z) \tag{8.75}$$

6. Teorem o konačnoj vrijednosti

$$y(\infty)=\lim_{z\to 1}[1-z^{-1}]\, Y(z) \tag{8.76}$$

Teorem o konačnoj vrijednosti ima smisla kada red konvergira, tj. kada je sistem stabilan.

Postupci određivanja Z-transformacije

Z-transformaciju funkcije moguće je odrediti na više načina:

a) Korištenjem izraza za Z-transformaciju

$$Y(z)=\sum_{k=0}^{\infty} y(kT)\, z^{-k} \tag{8.77}$$

Primjer 8.1.:

$$Z\{\cos\omega_0 t\}=?$$

Za $t=kT$ proizlazi:

$$y(kT)=\cos\omega_0 kT=\frac{e^{jk\omega_0 T}+e^{-jk\omega_0 T}}{2} \tag{8.78}$$

Uvrštenjem izraza (8.78) u (8.77) dobit će se:

$$Y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(e^{jk\omega_0 T}+e^{-jk\omega_0 T}\right) z^{-k}$$

odnosno:

$$Y(z)=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(e^{j\omega_0 T}\cdot z^{-1})^k+\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-j\omega_0 T}\cdot z^{-1})^k\right] \tag{8.79}$$

Izraz (8.79) može se napisati:

$$Y(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{j\omega_0 T}\cdot z^{-1}}+\frac{1}{1-e^{-j\omega_0 T}\cdot z^{-1}}\right) \tag{8.80}$$

te sređenjem izraza (8.80) proizlazi:

$$Y(z)=\frac{z\,(z-\cos\omega_0 T)}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}$$

b) Izrazom (8.95) koji pretpostavlja poznavanje rezidua funkcije

Izraz (8.95) može se dobiti korištenjem konvolucijskog svojstva na sljedeći način L[22]:

$$y^*(t) = y(t) \cdot \delta_T^*(t) \tag{8.81}$$

$$Y^*(s) = Y(s) * \Delta_T(s) \tag{8.82}$$

$Y^*(s)$ ... diskretna L-transformacija funkcije $y^*(t)$
$Y(s)$ ... L-transformacija kontinuirane funkcije
$\Delta_T(s)$ ... L-transformacija funkcije $\delta_T^*(t)$

$$\Delta_T(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} = 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \ldots \tag{8.83}$$

Red (8.83) konvergira kada je $|e^{-Ts}| < 1$. Njegova suma tada je jednaka:

$$\Delta_T(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \tag{8.84}$$

Uvrštenjem (8.84) u (8.82) proizlazi:

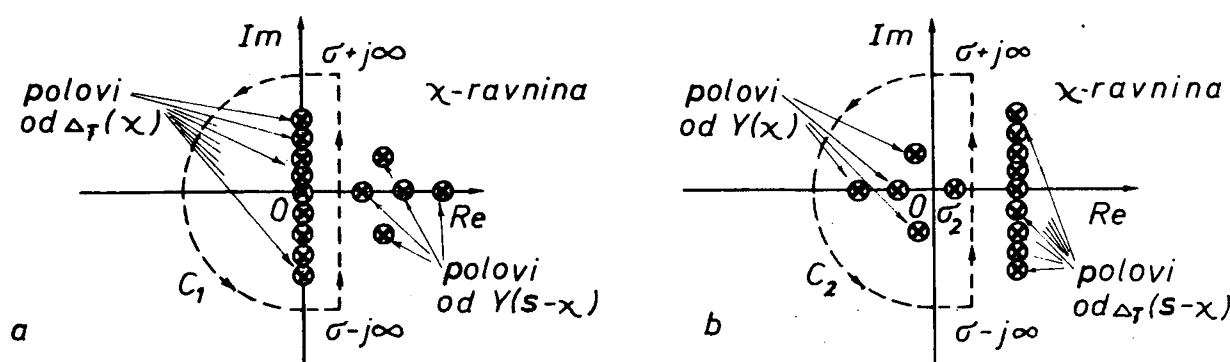
$$Y^*(s) = Y(s) * \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \tag{8.85}$$

Prema konvolucijskom teoremu proizlazi:

$$Y^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{c_1} Y(s - \chi) \frac{1}{1 - e^{-T_\chi}} d_\chi \tag{8.86}$$

gdje je c_1 granica integriranja koja obuhvaća sve polove od $\Delta_T(s)$, kao što je prikazano na sl. 8.36.a.

σ leži između $(\sigma_1 - \sigma_2)$ i 0, gdje je σ_1 realni dio kompleksne varijable $s = \sigma_1 + j\omega_1$, a σ_2 je najveći realni dio polova funkcije $Y(s)$.



Slika 8.36.

Polovi od $\Delta_T(s)$ jesu:

$$1 - e^{-Ts} = 0$$
$$s = \pm j\,\frac{2\pi k}{T} \tag{8.87}$$

budući da je $\omega_s=\frac{2\pi}{T}$ tada je

$$s=\pm jk\omega_s \tag{8.88}$$

Integral (8.86) može se izračunati primjenom teorema o reziduima. Dobit će se:

$$Y^*(s)=\sum_{v} Y(s-x)\cdot Res\,\Delta_T(x)_{x=s_v}$$

s_v je pol funkcije $\Delta_T(\chi)$, a sumacija se vrši po svim polovima od $\Delta_T(\chi)$ unutar granice C_1. Jednadžba (8.89) vrijedi ako funkcija $Y(s-\chi)$ nema polova na imaginarnoj osi x ravnine. Rezidui od $\Delta_T(\chi)$ u $s_v=-jv\omega_s$ jesu:

$$\lim_{\chi\to -jk\omega_s}\frac{\chi+jk\omega_s}{1-e^{-T\chi}}=\lim_{\chi\to -jk\omega_s}\frac{1}{Te^{-T\chi}}=\frac{1}{T} \tag{8.90}$$

Iz izraza (8.89) tada proizlazi:

$$Y^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(s+jk\omega_s) \tag{8.91}$$

što je već prethodno dobiven izraz (8.20).

Jednadžbe (8.92) i (8.77) vode na oblik Poissonova pravila sumacije:

$$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(s+jk\omega)=\sum_{k=0}^{\infty} y(kT)\,e^{-kTs} \tag{8.92}$$

Prema teoremu o konvoluciji jednadžba (8.85) može se također pisati:

$$Y^*(s)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c_2} Y(\chi)\cdot\frac{1}{1-e^{-T(s-\chi)}}\,d\chi \tag{8.93}$$

gdje je C_2 granica integriranja koja obuhvaća sve polove funkcije $Y(\chi)$, kao što je pokazano na sl. 8.36.b $\sigma_1>\sigma>\sigma_2$.

Ako $Y(\chi)$ ne sadrži višeznačne polove izraz (8.93) moguće je riješiti primjenom Cauchyjeve formule:

$$Y^*(s)=\sum_{v}\frac{1}{1-e^{-(s-\chi)T}}\cdot Res\;Y(\chi)\Big|_{\chi=s_v} \tag{8.94}$$

Supstitucijom $z=e^{Ts}$ u izraz (8.94) dobit će se:

$$Y(z)=\sum_{v}\frac{1}{1-z^{-1}\cdot e^{T\chi}}\cdot Res\;Y(\chi)\Big|_{\chi=s_v} \tag{8.95}$$

U slučajevima kada funkcija $y(t)$ u $t=0$ ima neku vrijednost $y(0)\neq 0$, tada se izrazi (8.91)–(8.95) proširuju s dodatnim članom $\frac{1}{2}y(0^+)$. Relacija (8.95) vrijedi kada je polinom u brojniku funkcije $Y(\chi)$ manjeg reda od polinoma u nazivniku.

Primjer 8.2.:

$$Z\left\{\frac{K}{s+a}\right\}=?$$

$$Y(s)=\frac{K}{s+a}, \quad \text{tj.} \quad Y(\chi)=\frac{K}{\chi+a}$$

$$\text{Za pol } s_1=-a \Rightarrow Res\, Y(\chi)=\frac{K}{\chi+a}(\chi+a)\bigg|_{\chi=-a}$$

$$Res\; Y(\chi)\bigg|_{\chi=-a}=K$$

na osnovi jednadžbe (8.95) proizlazi:

$$Y(z)=\frac{K}{1-z^{-1}e^{aT}}=\frac{Kz}{z-e^{aT}} \tag{8.96}$$

Takav način određivanja Z-transformacije u mnogim je slučajevima (jednostruki polovi) najjednostavniji i najprikladniji za dobivanje Z-transformacije u komprimiranom obliku.

c) Korištenjem gotovih tablica

Pomoću tablice (na primjer Tab. 1. prilog VIII) moguće je na vrlo jednostavan način odrediti Z-transformaciju neke funkcije. Funkcija se u slučaju kad je složenija rastavlja na jednostavnije komponente, za koje postoje u tablicama izrazi Z-transformacije.

Taj postupak se najčešće koristi kao najjednostavniji i najbrži postupak pri određivanju Z-transformacije neke funkcije.

Postupci određivanja inverzne Z-transformacije

Diskretnu funkciju $y^*(t)$ u $t=kT$ ili $y(kT)$ moguće je dobiti iz $Y(z)$ pomoću operacije koja se zove inverzna Z-transformacija:

$$y(kT)=Z^{-1}\{Y(z)\}$$

$Y(z)$... Z-transformacija kontinuirane funkcije.

Postoji nekoliko metoda kojima je moguće odrediti $y(kT)$ iz $Y(z)$:

a) Razvojem funkcije $Y(z)$ u red potencija od z (Laurentov red)

Kada je funkcija $Y(z)$ poznata i ako je ona analitička za $|z|>R\frac{1}{\rho}$ (ρ je radijus konvergencije reda), tada koeficijenti uz članove z^{-k} odgovaraju vrijednostima funkcije $y(t)$ u k – tim trenucima diskretiziranja.

Iz izraza (8.60) proizlazi:

$$Y(z)=y(0)+y(T)z^{-1}+y(2T)z^{-2}+y(3T)z^{-3}+\ldots \tag{8.97}$$

tj. izraz (8.97) jednak je Z-transformaciji izraza (8.59).

Iz (8.59) i (8.97) proizlazi da su iznosi diskretne funkcije $y(kT)$ u trenutku kT jednaki koeficijentima izraza (8.97) uz potencije od z^{-k}.

Metoda razvoja u red prikladna je kada se želi brzo odrediti prvih nekoliko vrijednosti signala (na primjer, izlaznog signala procesa).

Primjer 8.3.:

$$Y(z)=\frac{z^2+1}{z^3+z^2+5z+1}; \quad y(kT)=?\ \text{do}\ k=4$$

Članovi reda (8.97) mogu se odrediti dijeljenjem polinoma brojnika s polinomom nazivnika:

$$(z^2+1):(z^3+z^2+5z+1)=z^{-1}-z^{-2}-3z^{-3}+7z^{-4}+\dots$$

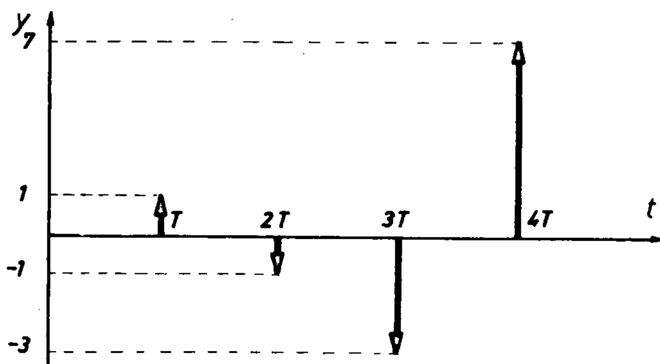
$$Y(z)=0+\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-3\frac{1}{z^3}+7\frac{1}{z^4}+\dots$$

$$y(0)=0; \quad y(2T)=-1 \quad y(4T)=7$$

$$y(T)=1 \quad y(3T)=-3$$

odnosno

$$y(kT)=\delta(t-T)-\delta(t-2T)-3\delta(t-3T)+7\delta(t-4T)+\dots \tag{8.98}$$



Slika 8.37.

Primjer 8.4.:

$$Y(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z^2-0{,}81)}; \quad y(kT)=?\ \text{do}\ k=4$$

$$Y(z)=\frac{z^2}{z^3-z^2-0{,}81z+0{,}81}$$

dijeljenjem polinoma proizlazi:

$$y(z)=0+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1{,}81}{z^3}+\frac{1{,}81}{z^4}+\dots$$

$$y(0)=0 \quad y(2T)=1 \quad y(4T)=1{,}81$$

$$y(T)=1 \quad y(3T)=1{,}81$$

U stacionarnom stanju:

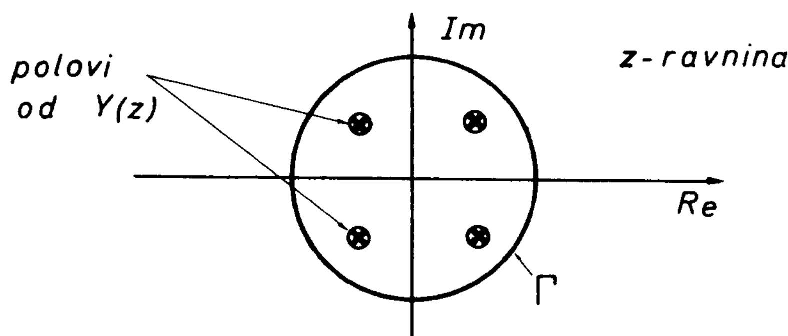
$$\lim_{k\to\infty} y(kT) = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1})\,Y(z)$$

$$= \frac{1}{1-0{,}81} = 5{,}263$$

$$y(kT) = 0 + \delta(t-T) + \delta(t-2T) + 1{,}81\delta(t-3T) + 1{,}81\delta(t-4T) + \ldots$$
$$\ldots + 5{,}263\delta(t-\infty).$$

b) Primjenom Cauchyjeva teorema o reziduima na kompleksnu integralnu formulu

Budući da je koeficijente funkcije $y(kT)$ moguće predstaviti kompleksnim integralom, a $Y(z)$ se može smatrati Laurentovim redom, moguće je $Y(z)$ u izrazu (8.97) pomnožiti sa z^{k-1}, te integrirati po kružnici Γ u kojoj je $|z| = R_0$ ($R_0 > R$), ili po bilo kojoj zatvorenoj konturi koja obuhvaća sve polove funkcije $Y(z)$ (sl. 8.38), L[22].



Slika 8.38.

Primjenom Cauchyjeva teorema proizlazi:

$$\oint_{\Gamma} Y(z)\, z^{k-1}\, dz = y(kT)\cdot 2\pi j \tag{8.99}$$

$$y(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} Y(z)\, z^{k-1}\, dz, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{8.100}$$

Izraz (8.100) moguće je riješiti korištenjem Cauchyjeve integralne formule, ako je $Y(z)\cdot z^{k-1}$ racionalna funkcija:

$$y(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} Y(z)\, z^{k-1}\, dz = \sum_{\upsilon} Res\; Y(z)\, z^{k-1} \Big|_{z=z_{\upsilon}} \tag{8.101}$$

Primjer 8.5.

$$Y(z) = \frac{z^2(z^2+z+1)}{(z-0{,}8)(z-1)(z^2-z+0{,}8)}; \quad y(kT) = ?$$

Res $Y(z)\,z^{k-1}$ na polovima su:

Tablica 8.2.

Pol	*Res* $Y(z)\,z^{k-1}$
$z=0{,}8$	$-19{,}1\cdot(0{,}8)^{k+1}$
$z=1$	$18{,}75$
$z=0{,}5+j0{,}74$	$(0{,}89\underline{/56{,}5^0})^{k+1}\cdot(1{,}75\underline{/85^0})$
$z=0{,}5-j0{,}74$	$(0{,}89\underline{/-56{,}5^0})^{k+1}\cdot(1{,}75\underline{/-85^0})$

Inverzna transformacija prema jednadžbi (8.101) glasi:

$$y\,(kT)=-19{,}1\cdot(0{,}8)^{k+1}+18{,}75+(0{,}89\,e^{j56{,}5})^{k+1}\cdot(1{,}75\,e^{j85})$$
$$+(0{,}89\,e^{-j56{,}5})^{k+1}\cdot(1{,}75\,e^{-j85})$$

Primjer 8.6.

$$Y(z)=\frac{z^2}{(z-1)^2\,(z^2-z+1)};\qquad y\,(kT)=?$$

Tablica 8.3.

Pol	*Res* $Y(z)\,z^{k-1}$
$z=1$	$\lim\limits_{z\to1}\frac{d}{dz}\,\{(z-1)^2\;Y(z)\cdot z^{k-1}\}=\lim\limits_{z\to1}\frac{d}{dz}\left\{\frac{z^{k+1}}{z^2-z+1}\right\}=k$
$z=\frac{1}{2}+j\,\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\lim\limits_{z\to\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\left(z-\frac{1}{2}-j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\;Y(z)\cdot z^{k-1}\right\}=\lim\limits_{z\to\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{z^{k+1}}{(z-1)^2\left(z-\frac{1}{2}-j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{j(k\pi/3-9\pi/6)}$
$z=\frac{1}{2}-j\,\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\lim\limits_{z\to\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[\frac{z^{k+1}}{(z-1)^2\left(z-\frac{1}{2}+j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right]=\frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{-j(k\pi/3-9\pi/6)}$

$$y\,(kT)=k+\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{k\pi}{3}-\frac{9\pi}{6}\right)$$

Ovaj postupak određivanja originalne funkcije prikladan je kada se želi dobiti original u komprimiranom obliku.

c) Primjenom tablica inverzne Z-transformacije

Ovim načinom funkcija $\frac{Y(z)}{z}$ rastavlja se na parcijalne razlomke, tako da svaki parcijalni razlomak, pomnožen sa z, bude prepoznatljiv u tabeli Z-transformacije. Funkciju $Y(z)$ potrebno je svesti na oblik:

$$Y(z) = A_1 \frac{z}{z - z_1} + A_2 \frac{z}{z - z_2} + \ldots + A_\upsilon \frac{z}{z - z_\upsilon} \tag{8.102}$$

Primjer 8.7.

$$Y(z) = \frac{z^2 (z^2 + z + 1)}{(z - 0{,}8)(z - 1)(z^2 - z + 0{,}8)}; \quad y(kT) = ?$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z(z^2 + z + 1)}{(z - 0{,}8)(z - 1)(z^2 - z + 0{,}8)} = \frac{18{,}75}{z - 1} - \frac{15{,}3}{z - 0{,}8} +$$

$$+ \frac{-1{,}2 + j}{z - (0{,}5 + j0{,}74)} + \frac{-1{,}2 - j}{z - (0{,}5 - j0{,}74)}$$

Budući da je:

$$0{,}5 \pm j0{,}74 = e^{-0{,}12 \pm j}$$

$$0{,}8 = e^{-0{,}22}$$

proizlazi.

$$Y(z) = 18{,}75 \frac{z}{z - 1} - 15{,}3 \frac{z}{z - e^{-0{,}22}} + (-1{,}2 + j) \frac{z}{z - e^{-0{,}12 + j}} +$$

$$+ (-1{,}2 - j) \frac{z}{z - e^{-0{,}12 - j}}.$$

Iz tablica Z-transformacija proizlazi:

$$y(kT) = 18{,}75\, S(t) - 15{,}3\, e^{-0{,}22 \frac{t}{T}} - e^{-0{,}12 \frac{t}{T}} \left(2{,}4 \cos \frac{t}{T} + 2 \sin \frac{t}{T} \right)$$

Ovaj postupak, pored toga što daje vrijednost originalne funkcije, u trenucima diskretiziranja omogućava i približnu procjenu funkcije $y(t)$, te se vrlo često koristi kao najprikladniji postupak za određivanje originala.

Primjer 8.8.

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z - 0{,}9)(z + 0{,}9)(z - 1)}; \quad y(kT) = ?$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z - 0{,}9)(z + 0{,}9)(z - 1)} = -5 \frac{1}{z - 0{,}9} - 0{,}263 \frac{1}{z + 0{,}9} + 5{,}263 \frac{1}{z - 1}$$

odnosno:

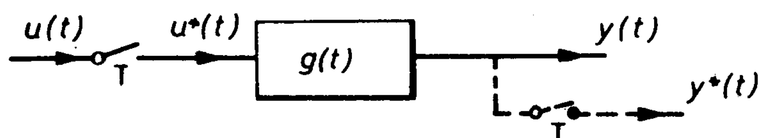
$$Y(z) = -5\frac{z}{z-0{,}9} - 0{,}263\frac{z}{z+0{,}9} + 5{,}263\frac{z}{z-1}$$

iz tablice Z-transformacija proizlazi:

$$y(kT) = -5\,(0{,}9)^k - 0{,}263\,(-0{,}9)^k + 5{,}263$$

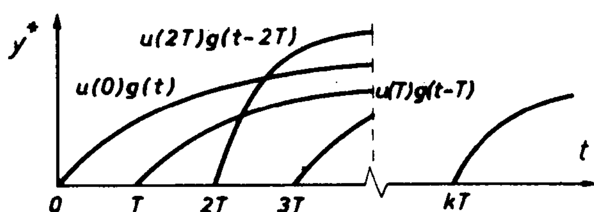
8.8. Prijenosna funkcija linearnog diskretnog sistema

Analogno definiciji prijenosne funkcije kontinuiranog sistema, definira se prijenosna funkcija diskretnog sistema. Pri tome se umjesto L-transformacije, koristi Z-transformacija.



Slika 8.39.

Signal $y(t)$ na izlazu linearnog diskretnog sistema sa sl. 8.39. kontinuirana je funkcija po vremenu. Da bi se dobio na izlazu sistema diskretni signal $y^*(t)$, potrebno je pretpostaviti da na izlazu sistema postoji impulsni element (fiktivni impulsni element) koji radi sinhrono s impulsnim elementom na ulazu. Fiktivni impulsni element (crtkano prikazan na sl. 8.39) uključuje se u razmatranje kako bi se odziv sistema dobio samo u trenucima diskretiziranja, te tako omogućio primjenu Z-transformacije. Odziv sistema u pojedinim trenucima diskretiziranja $t = kT$ prikazan je na sl. 8.40.



Slika 8.40.

Odziv linearnog diskretnog sistema moguće je odrediti superpozicijom odziva u trenucima diskretiziranja. Iz prikaza na sl. 8.40. može se pisati:

$$y(kT) = u(0)\,g(kT) + u(T)\,g[(k-1)\,T] + u(2T)\,g[(k-2)\,T] + \\ + \ldots + u(\nu T)\,g[(k-\nu)\,T] + \ldots + u(kT)\,g(0) \tag{8.103}$$

$$y(kT) = \sum_{\nu=0}^{k} u(\nu T)\,g[(k-\nu)\,T] \tag{8.104}$$

kako je:

$$g[(k-\nu)\,T] = 0 \qquad \text{za } \nu > k \tag{8.105}$$

proizlazi da je:

$$y^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} y(kT)\,\delta(t-kT) \tag{8.106}$$

$$y^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{\upsilon=0}^{\infty} u(\nu T)\,g[(k-\nu)\,T]\right\}\delta(t-kT) \tag{8.107}$$

zamjenom sumiranja dobit će se:

$$y^*(t)=\sum_{\upsilon=0}^{\infty} u(\nu T)\sum_{k=0}^{\infty} g[(k-\nu)\,T]\cdot\delta(t-kT) \tag{8.108}$$

Primjenom Laplaceove transformacije i uvrštenjem $l=k-\nu$ dobit će se:

$$\mathrm{L}\{y^*(t)\}=\sum_{\upsilon=0}^{\infty} u(\nu T)\sum_{l=-\upsilon}^{\infty} g(lT)\,e^{-\upsilon Ts}\cdot e^{-lTs} \tag{8.109}$$

budući da je:

$$g(lT)=0 \quad \text{za } l<0 \tag{8.110}$$

$$\mathrm{L}\{y^*(t)\}=\sum_{\upsilon=0}^{\infty} u(\nu T)\,e^{-\upsilon Ts}\cdot\sum_{l=0}^{\infty} g(lT)\,e^{-lTs} \tag{8.111}$$

$$Y^*(s)=U^*(s)\cdot G^*(s) \tag{8.112}$$

Zamjenom $e^{-\upsilon Ts}=z^{-\upsilon}$ i $e^{-lTs}=z^{-l}$ dobit će se:

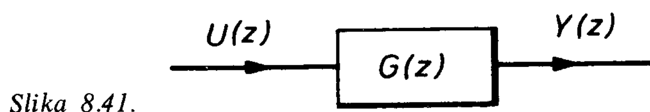
$$Y(z)=\sum_{l=0}^{\infty} g(lT)\,z^{-l}\cdot\sum_{\upsilon=0}^{\infty} u(\nu T)\,z^{-\upsilon} \tag{8.113}$$

$$Y(z)=G(z)\cdot U(z) \tag{8.114}$$

odnosno:

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)} \tag{8.115}$$

Funkcija $G(z)$, određena prema (8.115), ima naziv prijenosna funkcija (ili Z-prijenosna funkcija) diskretnog sistema.



Slika 8.41.

Laplaceova transformacija kontinuiranog signala na izlazu sistema (sl. 8.39) jednaka je:

$$Y(s)=G(s)\cdot U^*(s) \tag{8.116}$$

Laplaceova transformacija diskretiziranog signala izlaza sistema prikazana je relacijom (8.112). Prijelaz s izraza (8.116) na izraz (8.112) odnosno (8.114) moguće je promatrati kao primjenu Z-transformacije na oba člana izraza (8.116).

$$Z\{Y(s)\} = Y(z) \tag{8.117}$$

$$Z\{G(s)\cdot U^*(s)\} = Z\{G(s)\}\cdot U(z) \tag{8.118}$$

odnosno:

$$Z\{G(s)\cdot U^*(s)\} = G(z)\cdot U(z) \tag{8.119}$$

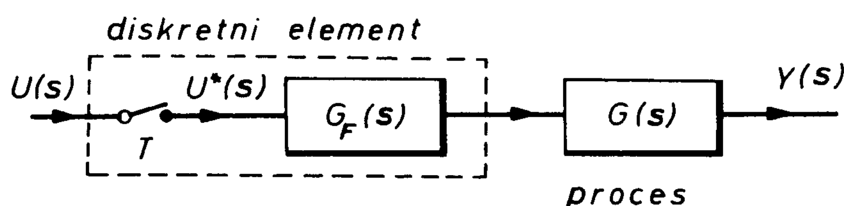
Iz (8.119) proizlazi da se funkcija $G(s)$ transformira u $G(z)$, a $U^*(s)$ zamjenjuje se s ekvivalentnom funkcijom $U(z)$. Jednadžba (8.119) opisuje osnovnu operaciju u teoriji Z-transformacije, tj. Z-transformacija produkta diskretne Laplaceove transformacije funkcije i obične Laplaceove transformacije funkcije, jednaka je produktu Z-transformacija tih funkcija.

Prijenosna funkcija diskretnog sistema dana je definicijom:

$$G(z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)\, z^{-k} \tag{8.120}$$

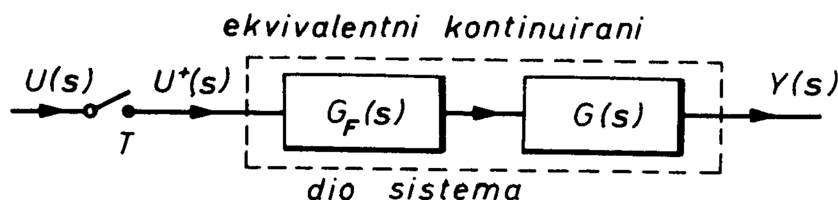
Na osnovi izraza (8.115) moguće je odrediti prijenosnu funkciju bilo otvorenog bilo zatvorenog diskretnog sistema. Pri tome treba naglasiti da za razliku od prijenosnih funkcija linearnih kontinuiranih sistema, koje je uvijek moguće odrediti, kod linearnih diskretnih sistema postojanje prijenosne funkcije uvjetovano je položajem impulsnog elementa u krugu.

Model linearnog diskretnog sistema prikazuje se serijskim spojem diskretnog elementa (impulsni element + element za formiranje) i kontinuiranog dijela procesa (sl. 8.42).



Slika 8.42.

U analizi i sintezi diskretnih sistema umjesto modela (sl. 8.42) koristi se ekvivalentni model (sl. 8.43), koji se sastoji iz impulsnog elementa i ekvivalentnog kontinuiranog dijela sistema (element za formiranje + proces).



Slika 8.43.

8.9. Prijenosne funkcije otvorenih i zatvorenih diskretnih sistema

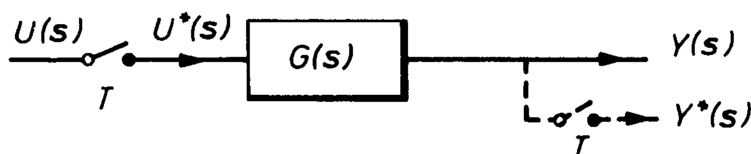
Strukturna shema nekog sistema u stvari je grafički prikaz diferencijalne odnosno jednadžbe diferencija sistema. Ona pokazuje protok signala u sistemu i međusobnu vezu pojedinih elemenata sistema. Ako se analiza diskretnog sistema vrši pomoću Z-transformacije, tada se sistem predstavlja blok-dijagramom iz kojeg se određuje prijenosna funkcija (ako postoji) ili izlazna veličina sistema y u z-području. Na osnovi prijenosne funkcije ili $Y(z)$ moguće je odrediti stabilnost sistema, te ostale pokazatelje kvalitete sistema.

Strukturne sheme razlikuju se po položaju impulsnog elementa u krugu.

Prijenosna funkcija otvorenog linearnog diskretnog sistema

Pri određivanju prijenosnih funkcija otvorenih diskretnih sistema susreću se četiri osnovna slučaja.

1. Sistem koji sadrži impulsni element na ulazu u kontinuirani dio sistema (sl. 8.44).



Slika 8.44.

Iz sheme (sl. 8.44) proizlazi:

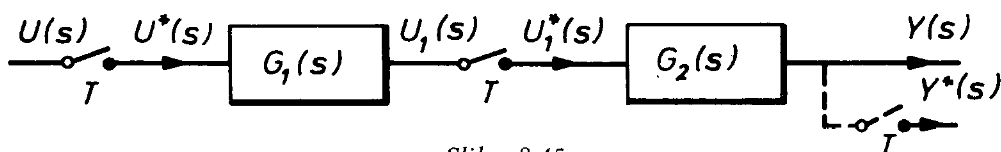
$$Y(s) = G(s) \cdot U^*(s) \tag{8.121}$$

$$Y^*(s) = G^*(s) \cdot U^*(s) \tag{8.122}$$

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z) \tag{8.123}$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \tag{8.124}$$

2. Serijska veza dvaju linearnih sistema s impulsnim elementom na ulazima u kontinuirani dio sistema (sl. 8.45).



Slika 8.45.

Za sistem na sl. 8.45. mogu se postaviti jednadžbe:

$$U_1(s)=G_1(s)\cdot U^*(s) \tag{8.125}$$

$$Y(s)=G_2(s)\cdot U_1^*(s) \tag{8.126}$$

Na isti način kao u prethodnom primjeru:

$$U_1^*(s)=G_1^*(s)\cdot U^*(s) \tag{8.127}$$

$$Y^*(s)=G_2^*(s)\cdot U_1^*(s) \tag{8.128}$$

$$U_1(z)=G_1(z)\cdot U(z) \tag{8.129}$$

$$Y(z)=G_2(z)\cdot U_1(z) \tag{8.130}$$

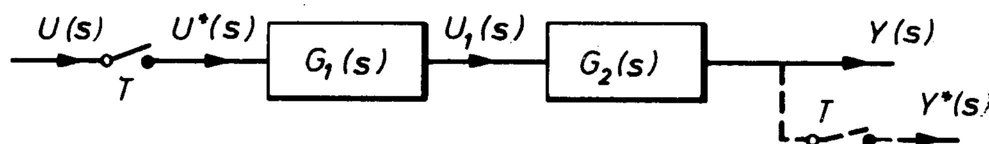
odavde proizlazi:

$$Y(z)=G_1(z)\cdot G_2(z)\cdot U(z) \tag{8.131}$$

$$G(z)=G_1(z)\cdot G_2(z)=\frac{Y(z)}{U(z)} \tag{8.132}$$

Prijenosnu funkciju moguće je u ovom slučaju odrediti kao produkt prijenosnih funkcija pojedinih elemenata sistema.

3. Dva serijski povezana kontinuirana sistema s diskretiziranjem ulaznog signala (sl. 8.46).



Slika 8.46.

Sa slike 8.46. proizlazi da je:

$$Y(s)=G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot U^*(s) \tag{8.133}$$

$$Y(s)=G_2(s)\cdot U_1(s) \tag{8.134}$$

$$U_1(s)=G_1(s)\cdot U^*(s) \tag{8.135}$$

Diskretnom Laplaceovom transformacijom izraza (8.133) proizlazi:

$$Y^*(s)=G_1\cdot G_2^*(s)\cdot U^*(s) \tag{8.136}$$

Z-transformacijom izraza (8.136) dobit će se:

$$Y(z)=G_1G_2(z)\cdot U(z) \tag{8.137}$$

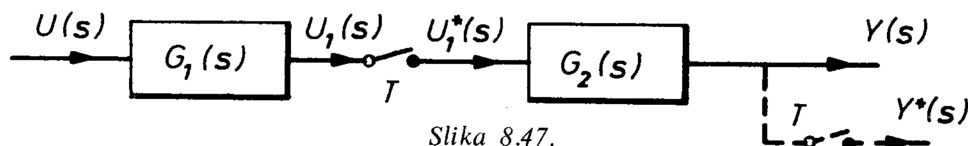
$$G(z)=G_1G_2(z)=Z\{G_1(s)\cdot G_2(s)\} \tag{8.138}$$

U ovom slučaju prijenosna funkcija sistema (8.138) razlikuje se od prijenosne funkcije u prethodnom slučaju (8.132). Ovdje treba naglasiti da:

$$G_1(z)\cdot G_2(z)\neq G_1G_2(z) \tag{8.139}$$

$G_1(z)\cdot G_2(z)$ dobiven je kao umnožak Z-transformacija funkcija: $G_1(z)\cdot G_2(z)=$ $=Z\{G_1(s)\}\cdot Z\{G_2(s)\}$, dok je $G_1G_2(z)$ dobiven kao Z-transformacija umnoška: $G_1G_2(z)=Z\{G_1(s)\cdot G_2(s)\}$.

4. Serijska veza dvaju linearnih kontinuiranih sistema s impulsnim elementom između njih (sl. 8.47).



Slika 8.47.

Za strukturu prema sl. 8.47. vrijedi:

$$U_1(s)=G_1(s)\cdot U(s) \tag{8.140}$$

$$Y(s)=G_2(s)\cdot U_1^*(s) \tag{8.141}$$

Diskretnom L-transformacijom izraza (8.140) proizlazi:

$$U_1^*(s)=G_1\cdot U^*(s) \tag{8.142}$$

dok za (8.141) proizlazi:

$$Y^*(s)=G_2^*(s)\cdot G_1U^*(s) \tag{8.143}$$

Z-transformacija izraza (8.143) daje:

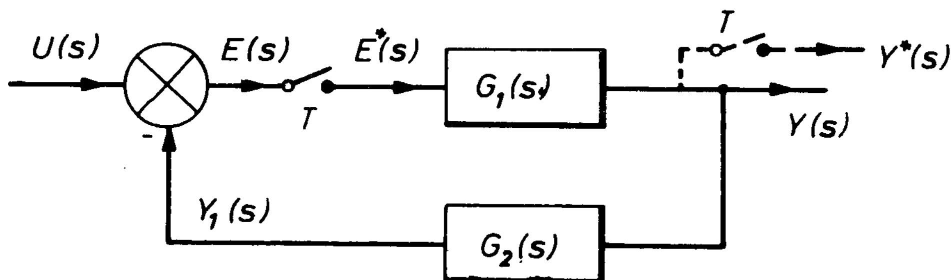
$$Y(z)=G_2(z)\cdot G_1U(z) \tag{8.144}$$

Takav spoj i mjesto impulsnog elementa daju izraz za izlazni signal (8.144), a prijenosnu je funkciju nemoguće odrediti budući da iz (8.144) nije moguće izdvojiti zasebno $U(z)$. Naime, u članu $G_1U(z)$ sadržan je signal ulaza kojeg nije moguće eksplicitno prikazati.

Prijenosna funkcija zatvorenog linearnog diskretnog sistema

Kao i kod otvorenih sistema, kod zatvorenih sistema susreće se nekoliko strukturnih shema koje se razlikuju po položaju impulsnog elementa u krugu.

1. Sistem s impulsnim elementom iza komparatora (sl. 8.48).



Slika 8.48.

Strukturna shema (sl. 8.48) često se susreće kod linearnih diskretnih sistema automatskog upravljanja. Jednadžbe sistema jesu:

$$Y(s)=G_1(s)\cdot E^*(s) \tag{8.145}$$

$$E(s)=U(s)-Y_1(s)$$
$$=U(s)-G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot E^*(s) \tag{8.146}$$

Diskretna L-transformacija daje:

$$E^*(s)=U^*(s)-G_1G_2^*(s)\cdot E^*(s) \tag{8.147}$$

odakle je:

$$E^*(s)=\frac{U^*(s)}{1+G_1G_2^*(s)} \tag{8.148}$$

$$Y^*(s)=G_1^*(s)\cdot E^*(s)=\frac{G_1^*(s)}{1+G_1G_2^*(s)}\cdot U^*(s) \tag{8.149}$$

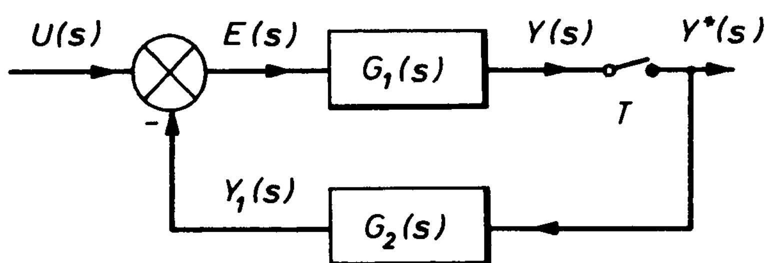
Z-transformacijom gornjeg izraza dobit će se:

$$Y(z)=\frac{G_1(z)}{1+G_1G_2(z)}\cdot U(z) \tag{8.150}$$

odnosno

$$G_z(z)=\frac{G_1(z)}{1+G_1G_2(z)} \tag{8.151}$$

2. Sistem s impulsnim elementom na izlazu direktne grane sistema (sl. 8.49)



Slika 8.49.

Iz strukturne sheme (sl. 8.49), proizlazi:

$$E(s)=U(s)-G_2(s)\cdot Y^*(s) \tag{8.152}$$

$$Y(s)=G_1(s)\cdot E(s) \tag{8.153}$$

Uvrštenjem (8.152) u (8.153) dobit će se:

$$Y(s)=G_1(s)\cdot U(s)-G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot Y^*(s) \tag{8.154}$$

Diskretnom Laplaceovom transformacijom izraza (8.154) proizlazi:

$$Y^*(s)=G_1U^*(s)-G_1G_2^*(s)\cdot Y^*(s) \qquad (8.155)$$

što daje:

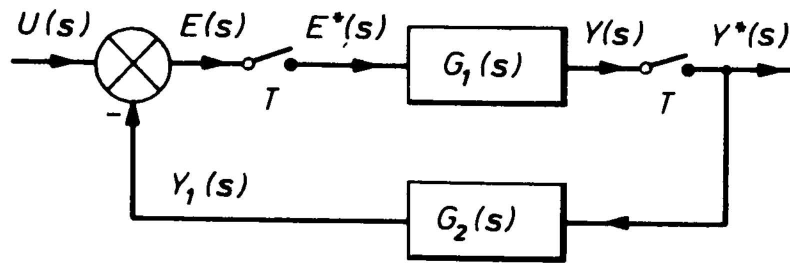
$$Y^*(s)=\frac{G_1U^*(s)}{1+G_1G_2^*(s)} \qquad (8.156)$$

Z-transformacijom izraza (8.156) dobit će se:

$$Y(z)=\frac{G_1U(z)}{1+G_1G_2(z)} \qquad (8.157)$$

Prijenosnu funkciju zatvorenog sistema u takvom slučaju nije moguće odrediti, pa se umjesto prijenosne funkcije za analizu sistema koristi izlazna veličina sistema $Y(z)$.

3. Sistem s impulsnim elementom iza komparatora i na izlazu sistema (sl. 8.50)



Slika 8.50.

Iz strukturne sheme (sl. 8.50) proizlazi:

$$E(s)=U(s)-G_2(s)\cdot Y^*(s) \qquad (8.158)$$

$$Y(s)=G_1(s)\cdot E^*(s) \qquad (8.159)$$

Diskretnom L-transformacijom gornjih izraza dobit će se:

$$E^*(s)=U^*(s)-G_2^*(s)\cdot Y^*(s) \qquad (8.160)$$

$$Y^*(s)=G_1^*(s)\cdot E^*(s) \qquad (8.161)$$

odnosno

$$Y^*(s)=G_1^*(s)\cdot U^*(s)-G_1^*(s)\cdot G_2^*(s)\cdot Y^*(s) \qquad (8.162)$$

$$Y^*(s)=\frac{G_1^*(s)}{1+G_1^*(s)\cdot G_2^*(s)}\cdot U^*(s) \qquad (8.163)$$

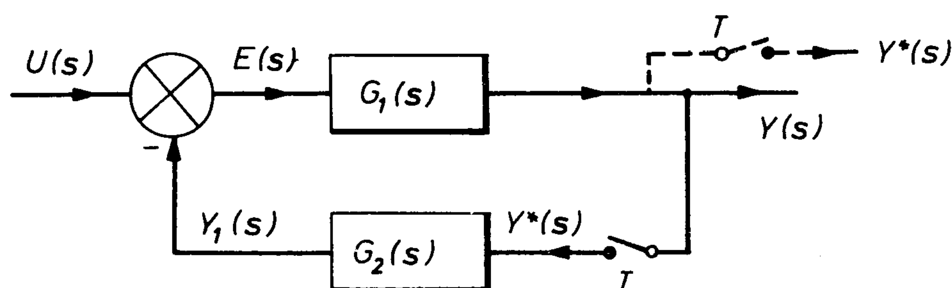
Z-transformacija izraza (8.163) je:

$$Y(z)=\frac{G_1(z)}{1+G_1(z)\,G_2(z)}\cdot U(z) \qquad (8.164)$$

odnosno:

$$G_z(z)=\frac{G_1(z)}{1+G_1(z)\,G_2(z)} \tag{8.165}$$

4. Sistem s impulsnim elementom u povratnoj vezi (sl. 8.51)



Slika 8.51.

U ovom slučaju je:

$$E(s)=U(s)-G_2(s)\cdot Y^*(s) \tag{8.166}$$

$$Y(s)=G_1U(s)-G_1G_2(s)\cdot Y^*(s) \tag{8.167}$$

$$Y^*(s)=G_1U^*(s)-G_1G_2^*(s)\cdot Y^*(s) \tag{8.168}$$

odnosno:

$$Y^*(s)=\frac{G_1U^*(s)}{1+G_1G_2^*(s)} \tag{8.169}$$

Z-transformacijom izraza (8.169) proizlazi:

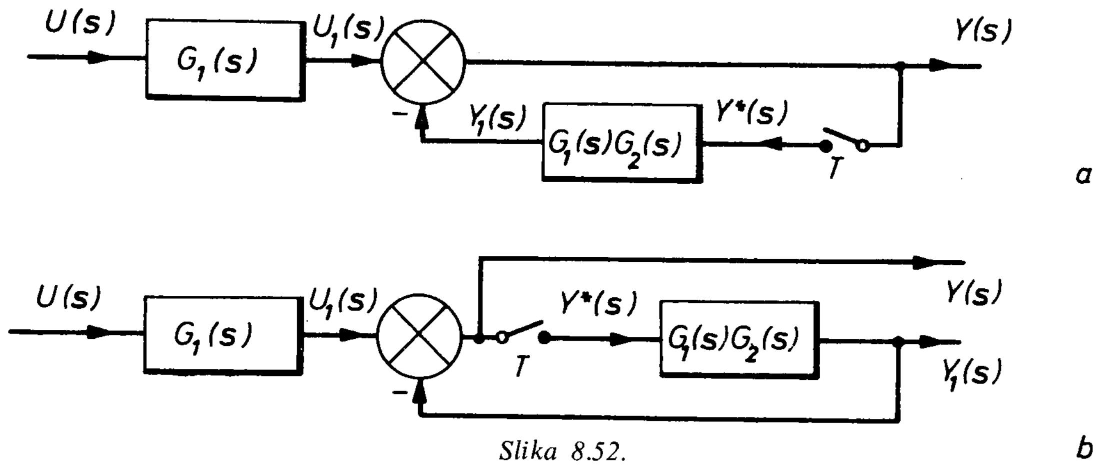
$$Y(z)=\frac{G_1U(z)}{1+G_1G_2(z)} \tag{8.170}$$

Iz prethodnih primjera vidljivo je da položaj impulsnog elementa u krugu ima vrlo važnu ulogu. Za diskretne sisteme općenito vrijedi jedno važno pravilo: *zakon komutativnosti nije primjenjiv kad se radi o impulsnom elementu i kontinuiranom dijelu sistema.* To drugim riječima znači da nije dozvoljena zamjena mjesta impulsnog elementa s kontinuiranim dijelom sistema, jer se mijenjaju karakteristike čitavog sistema.

Diskretni sistemi mogli bi se podijeliti na sisteme kod kojih je impulsni element odmah iza komparatora i sisteme kod kojih se impulsni element nalazi na nekom drugom mjestu u krugu. Kod prvih moguće je odrediti prijenosnu funkciju sistema (sl. 8.48. i 8.50) a kod drugih to nije moguće (sl. 8.49. i 8.51). Ove druge moguće je svesti na sisteme s impulsnim elementom iza komparatora, kako bi se olakšala daljnja analiza takvih sistema.

Primjer 8.9.

Sistem sa slike 8.51. potrebno je svesti na sistem s impulsnim elementom iza komparatora.



Slika 8.52.

Prema sl. 8.52.b može se odrediti:

$$Y_1(s) = \frac{G_1G_2(s)}{1 + G_1G_2^*(s)} \cdot U_1^*(s) \tag{8.171}$$

$$Y(s) = G_1U(s) - \frac{G_1G_2(s)}{1 + G_1G_2^*(s)} \cdot G_1U^*(s) \tag{8.172}$$

Iz izraza (8.171) i (8.172) proizlazi:

$$Y(z) = \frac{G_1U(z)}{1 + G_1G_2(z)} \tag{8.173}$$

$$Y_1(z) = \frac{G_1G_2(z)}{1 + G_1G_2(z)} \cdot U_1(z) \tag{8.174}$$

Uglavnom uvijek se teži da impulsni element bude iza komparatora, kako bi analiza i sinteza takvih sistema bila olakšana. U većini realnih diskretnih sistema to je i ostvareno.

U tablici 2. u prilogu VIII prikazani su različiti slučajevi položaja impulsnog elementa u blok-shemi diskretnog sistema, kao i pripadne transformacije izlaznog signala sistema.

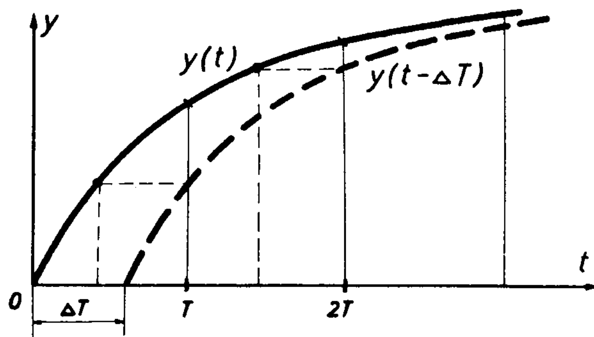
8.10. Modificirana Z-transformacija

Z-transformacija ima važnu ulogu pri analizi i sintezi sistema automatskog upravljanja. Ovom metodom moguće je, međutim, odrediti ponašanje sistema samo u trenucima diskretiziranja. Naime, inverznom Z-transformacijom dobit će se rezultat samo u $t = kT$ trenucima; to ograničava upotrebu Z-transformacije, naročito ako u sistemu postoji kašnjenje koje nije jednako cjelobrojnom periodu diskretiziranja, ili ako je u sistem uključeno digitalno računalo. U takvim situacijama od

bitnog je značaja poznavanje npr. izlaznog signala ne samo u trenucima diskretiziranja, već i unutar perioda diskretiziranja, tj. između dva uzorka.

U analizi hibridnih sistema (kombinirani digitalni i analogni sistemi), izlaz je kontinuirana funkcija, te prema tome Z-transformacija nije najprikladnija za točnije određivanje ponašanja sistema. Z-transformacija može se, međutim, modificirati, kako bi omogućila davanje informacije o signalima sistema u svim trenucima. Takva transformacija može se tada koristiti u analizi sistema s periodičkim ulazima, u diskretnim sistemima s čistim kašnjenjima, u aproksimativnoj analizi kontinuiranih sistema i u mnogim drugim primjenama.

Osnovna ideja modifikacije nalazi se u kašnjenju ili prethođenju signala. Da bi se dobila vrijednost signala $y(t)$ u trenucima različitim od $t=kT$ $(k=0,1,2,\ldots)$, moguće je signal npr. zakasniti za iznos ΔT (sl. 8.53).



Slika 8.53.

Ovim načinom moguće je mijenjanjem $0 \leq \Delta \leq 1$ odrediti sve vrijednosti funkcije unutar intervala diskretiziranja $kT \leq t \leq (k+1)T$. Da bi se izbjegao problem konvergencije reda u integralnoj jednadžbi (8.191), za određivanje modificirane Z-transformacije iz funkcije $Y(s)$, a također da bi se mogle koristiti postojeće tabele, potrebno je izvršiti zamjenu varijable L [67]:

$$\Delta = 1 - m \qquad 0 \leq m \leq 1 \tag{8.175}$$

takvom zamjenom dobit će se:

$$t = (k-1+m)\,T, \qquad k=0,1,2,\ldots; \qquad 0 \leq m \leq 1$$

Modificirana transformacija se analogno definiciji (8.60) može definirati:

$$Z_m\{y(t)\} = Y(z,m) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{\infty} y[(k-1+m)\,T]z^{-k}; \qquad 0 \leq m \leq 1 \tag{8.176}$$

Izraz (8.176) može se skraćeno pisati:

$$Y(z,m) \overset{def}{=} z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} y[(k+m)\,T]\,z^{-k} \tag{8.177}$$

U slučaju kada se umjesto kašnjenja funkcije pretpostavi prethođenje za iznos μT, dobit će se:

$$t = (k+\mu)\,T \qquad k=0,1,2,\ldots; \qquad 0 \leq \mu \leq 1$$

U ovom slučaju izbjegnut je problem konvergencije reda u jednadžbi (8.191) L [22].

Za slučaj prethođenja funkcije, definicija modificirane transformacije glasi:

$$Z_\mu\{y(t)\} = Y(z,\mu) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{\infty} y[(k+\mu)T]\, z^{-k} \tag{8.178}$$

Usporedbom izraza (8.177) i (8.178) uočava se razlika među njima u članu z^{-1}, tj. proizlazi:

$$Y(z,\mu) = z \cdot Y(z,m) \tag{8.179}$$

Z_m-transformacija može se promatrati kao da se funkcija zakasnila za T, a zatim se prethodi za iznos mT. Kod Z_μ-transformacije postoji samo prethođenje za μT, te je prikladnija za matematičko tretiranje sistema.

Može se postaviti da vrijedi:

Za Z_m – transformaciju:

$$\begin{aligned} Y(z,m) &= Y(z) \qquad \text{za } m=1 \\ Y(z,m) &= z^{-1}\, Y(z) \qquad \text{za } m=0 \end{aligned} \tag{8.180}$$

Za Z_μ – transformaciju:

$$\begin{aligned} Y(z,\mu) &= Y(z) \qquad \text{za } \mu=0 \\ Y(z,\mu) &= zY(z) \qquad \text{za } \mu=1 \end{aligned} \tag{8.181}$$

Izrazi (8.180) i (8.181) pokazuju da je Z-transformacija samo specijalan slučaj modificirane Z-transformacije.

Svojstva modificirane Z-transformacije

Svojstva modificirane Z-transformacije proizlaze iz osnovnih teorema koji vrijede za modificiranu Z-transformaciju. Oni su u osnovi analogni teoremima Z-transformacije i ovdje se navode bez dokaza za Z_m i Z_μ transformacije. Pretpostavlja se da je funkcija $y(t)$ Z-transformabilna.

1. Linearnost

$$\begin{aligned} Z_m\left\{\sum_{\upsilon=0}^{n} a_\upsilon y_\upsilon(t)\right\} &= \sum_{\upsilon=1}^{n} a_\upsilon\, Y(z,m) \\ Z_\mu\left\{\sum_{\upsilon=0}^{n} a_\upsilon y_\upsilon(t)\right\} &= \sum_{\upsilon=1}^{n} a_\upsilon\, Y(z,\mu) \end{aligned} \tag{8.182}$$

gdje su a_υ konstante.

2. Realni pomak

$$\begin{aligned} Z_m\{y(t-kT)\} &= z^{-k}\, Y(z,m) \\ Z_\mu\{y(t-kT)\} &= z^{-k}\, Y(z,\mu) \end{aligned} \tag{8.183}$$

3. Promjena mjerila u z-domeni

$$\begin{aligned} Z_m\{e^{\pm bt}\,y(t)\} &= e^{\pm bT(m-1)}\,Y(ze^{\pm bT}, m) \\ Z_\mu\{e^{bt}\,y(t)\} &= e^{b\mu T}\,Y(ze^{-bT}) \end{aligned} \tag{8.184}$$

4. Teorem o početnoj vrijednosti

$$\begin{aligned} y(0, m) &= \lim_{\substack{k\to 0\\ m\to 0}} y(k, m) = \lim_{\substack{z\to\infty\\ m\to 0}} zY(z, m) \\ y(0, \mu) &= \lim_{k\to 0} y(k, \mu) = \lim_{z\to\infty} (1-z^{-1})\,Y(z, \mu) \end{aligned} \tag{8.185}$$

5. Teorem o konačnoj vrijednosti

$$\begin{aligned} y(\infty, m) &= \lim_{k\to\infty} y(k, m) = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1})\,Y(z, m) \\ y(\infty, \mu) &= \lim_{k\to\infty} y(k, \mu) = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1})\,Y(z, \mu) \end{aligned} \tag{8.186}$$

Navedeni teoremi daju svojstva modificirane Z-transformacije, koji se najčešće primjenjuju u analizi diskretnih sistema.

Veza Laplaceove i modificirane Z-transformacije

Kako je pokazano kod obične Z-transformacije, moguće je iz L-transformacije odrediti Z-transformaciju neke funkcije, primjenom Cauchyjeve integralne formule i Jordanove leme, na izraz (8.86).

Na sličan se način i modificirana Z-transformacija može odrediti iz Laplaceove transformacije funkcije.

Iz jednadžbi (8.57) i (8.176) proizlazi:

$$Z_m\{y(t)\} = Y(z, m) \tag{8.187}$$

$$Y(z, m)\Big|_{z=e^{sT}} \overset{def}{=} Y^*(s, m) \tag{8.188}$$

$$Y(z, m)\Big|_{z=e^{sT}} = \mathrm{L}\{y(t-T+mT)\,\delta_T^*(t)\}; \qquad 0 \le m < 1 \tag{8.189}$$

Jednadžba (8.189) može se također pisati u obliku:

$$Y(z, m)\Big|_{z=e^{sT}} = e^{-Ts}\,\mathrm{L}\{y(t+mT)\,\delta_T^*(t)\}; \qquad 0 \le m < 1 \tag{8.190}$$

Prema konvolucijskom teoremu primijenjenom na izraz (8.190) proizlazi:

$$y(z, m)\Big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{2\pi j}\cdot z^{-1} \int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(\chi)\,e^{m\chi T}\cdot\frac{1}{1-e^{-T(s-\chi)}}\,d\chi; \quad 0 \le m < 1 \tag{8.191}$$

U izrazu (8.191) izvršena je zamjena varijable $\Delta=1-m$, čime se postiglo da član $e^{m\chi T}$ konvergira u lijevoj poluravnini, što omogućava računanje integrala. Jednadžba (8.191) daje vezu između $Y(z,m)$ i $Y(s)$, pa se može riješiti izrazom:

$$Y(z,m)=z^{-1}\sum_{\substack{\text{polovi } s_v\\ \text{od } Y_{(\chi)}}} Res\frac{Y(\chi)\,e^{m\chi T}}{1-e^{\chi T}\cdot z^{-1}};\qquad 0\leq m<1 \tag{8.192}$$

Izraz (8.192) vrijedi i za $m=1$, samo ako je polinom u nazivniku funkcije $Y(s)$ za dva reda veći od polinoma u brojniku te funkcije. U slučaju kad je red polinoma u nazivniku samo za jedan red veći od polinoma u brojniku funkcije $Y(s)$, tada će izraz (8.192) u slučaju da postoji diskontinuitet funkcije $y(t)$ u $t=0$, davati pri Z_m^{-1}-transformaciji vrijednost funkcije $t=0^-$.

Iz jednadžbe (8.191) moguće je dobiti izraz:

$$Y(z,m)=Y^*(s,m)=\frac{1}{T}\sum_{\upsilon=-\infty}^{\infty} Y\left(s+j\nu\frac{2\pi}{T}\right)\cdot e^{\left(s+j\upsilon\frac{2\pi}{T}\right)(1-m)T};\quad 0\leq m<1 \tag{8.193}$$

Kada je polinom u nazivniku funkcije $Y(s)$ za red veći od polinoma u brojniku, jednadžba (8.193) vrijedi i za $m=1$.

U slučaju da funkcija $y(t)\neq 0$ u $t=0$ i $m=1$, tada se izraz (8.193) proširuje s članom $\frac{1}{2}y(0^+)$, te proizlazi: L [67]:

$$Y(z,m)=\frac{1}{2}y(0^+)+\frac{1}{T}\sum_{\upsilon=-\infty}^{\infty} Y\left(s+j\nu\frac{2\pi}{T}\right);\qquad m=1 \tag{8.194}$$

Za Z_μ-transformaciju izraz (8.193) glasi:

$$Y(z,\mu)=\frac{1}{T}\sum_{\upsilon=-\infty}^{\infty} Y\left(s+j\nu\frac{2\pi}{T}\right)e^{(sT+j2\pi\upsilon)\mu};\qquad 1\leq\mu<0 \tag{8.195}$$

dok je izraz (8.194) jednak u oba slučaja.

Na osnovi do sada izloženog može se reći da je modificiranu Z-transformaciju moguće dobiti također na tri načina: Izrazom (8.177) ili (8.178), izrazom (8.193) ili (8.195) odnosno (8.192), te pomoću tablica.

Postupci za određivanje inverzne modificirane Z-transformacije

Inverzna modificirana Z-transformacija određuje se analogno Z^{-1} transformaciji:

a) razvojem funkcije $Y(z,m)$ ili $Y(z,\mu)$ u red

$$Y(z,m)=y(0,m)+y(1,m)z^{-1}+y(2,m)z^{-2}+\ldots \tag{8.196}$$

b) *primjenom Cauchyjeva teorema o reziduima na integral*

$$y(k,m)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} Y(z,m)\,z^{k-1}\,dz \tag{8.197}$$

$$y(k,m)=\sum_{\upsilon} Res\; Y(z,m)\,z^{k-1}\Big|_{z=z_\upsilon} \tag{8.198}$$

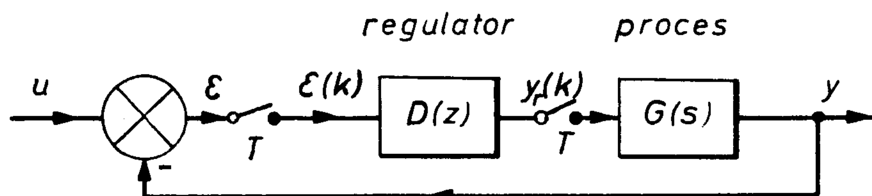
c) *rastavljanjem složene funkcije na parcijalne razlomke*

Bitno je napomenuti: koristi li se modificirana transformacija, tada se fiksira m ili μ i računa s odabranim vrijednostima kašnjenja odnosno prethođenja. U drugom koraku fiksira se novi m ili μ, te računaju vrijednosti s tim kašnjenjem ili prethođenjem itd.

Primjer 8.10.

Potrebno je odrediti prijelaznu funkciju sistema zadanog strukturnom shemom na sl. 8.54., ako je $T=0{,}5[\mathrm{s}]$.

$$D(z)=\frac{z}{z-1}; \qquad G(p)=\frac{0{,}25}{1+0{,}25s}$$



Slika 8.54.

Na sl. 8.54. nisu prikazani potrebni pretvarači za diskretni i kontinuirani dio sistema, iako se razumijeva da oni postoje. Naime, izlazni signal impulsnog elementa potrebno je kodirati, kako bi dobio oblik prikladan za obradu u digitalnom regulatoru; izlazni signal regulatora treba dekodirati prije priključivanja na kontinuirani dio sistema.

Iz tablice Z-transformacije proizlazi:

$$Z\{G(p)\}=\frac{z}{z-e^{-2}}$$

Prijenosna funkcija zatvorenog sistema glasi:

$$G_z(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{D(z)\,G(z)}{1+D(z)\,G(z)}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{\dfrac{z}{z-1}\cdot\dfrac{z}{z-e^{-2}}}{1+\dfrac{z^2}{(z-1)(z-e^{-2})}}=\frac{z^2}{(z-1)(z-e^{-2})+z^2}$$

sređenjem gornjeg izraza proizlazi:

$$Y(z)=\frac{z^2}{2\,(z-0{,}3972)\,(z-0{,}1704)}\,U\,(z)$$

kako je $U\,(z)=\frac{z}{z-1}$, to proizlazi:

$$Y(z)=\frac{z^3}{2\,(z-1)\,(z-0{,}3972)\,(z-0{,}1704)}$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{z^2}{2\,(z-1)\,(z-0{,}3972)\,(z-0{,}1704)}$$

$$=\frac{1}{z-1}-\frac{0{,}577}{z-0{,}3972}+\frac{0{,}077}{z-0{,}1704}$$

što daje:

$$Y(z)=\frac{z}{z-1}-0{,}577\frac{z}{z-e^{-0{,}923}}+0{,}077\frac{z}{z-e^{-1{,}77}}$$

kako je:

$$0{,}923=aT\Rightarrow a=1{,}846$$

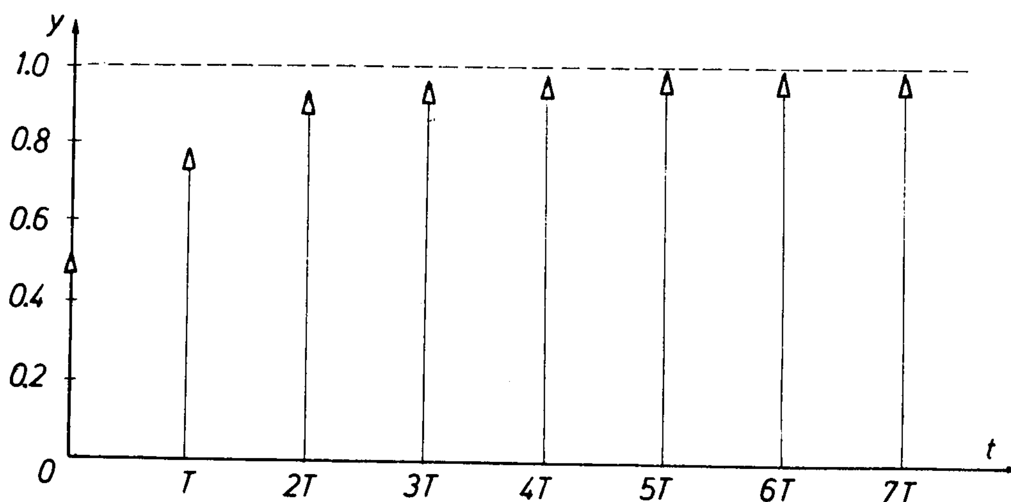
$$1{,}77=bT\Rightarrow b=3{,}54$$

$$y\,(kT)=1-0{,}577\,e^{-1{,}846kT}+0{,}077\,e^{-3{,}54kT}$$

odnosno:

$$y\,(kT)=1-0{,}577\,e^{-0{,}923k}+0{,}077\,e^{-1{,}77k} \qquad (8.199)$$

Z-transformacija daje vrijednost signala izlaza u trenucima $t=0,\ T,\ 2T,\dots$ (sl. 8.55).



Slika 8.55.

Da bi se odredio odziv sistema unutar intervala diskretiziranja potrebno je koristiti modificiranu Z-transformaciju:

$$Z_\mu\{G(s)\} = G(z,\mu) = \frac{ze^{-2\mu}}{z-e^{-2}}$$

$$Z_\mu\left\{\frac{1}{s}\right\} = U(z) = \frac{z}{z-1}$$

također vrijedi:

$$Y(z,\mu) = \frac{D(z)\cdot G(z,\mu)}{1+D(z)\cdot G(z,0)}\cdot U(z)$$

$$G(z,0) = G(z) = \lim_{\mu\to 0} G(z,\mu) = \frac{z}{z-e^{-2}}$$

$$Y(z,\mu) = \frac{z^3 e^{-2\mu}}{(z-1)^2(z-e^{-2}) + z^2(z-1)}$$

$$= \frac{z^3 e^{-2\mu}}{2(z-1)(z-0{,}3972)(z-0{,}1704)}$$

$$\frac{Y(z,\mu)}{z} = \frac{z^2 e^{-2\mu}}{2(z-1)(z-0{,}3972)(z-0{,}1704)}$$

$$= \frac{e^{-2\mu}}{z-1} - \frac{0{,}577_e^{-2\mu}}{z-0{,}3972} + \frac{0{,}077e^{-2\mu}}{z-0{,}1704}$$

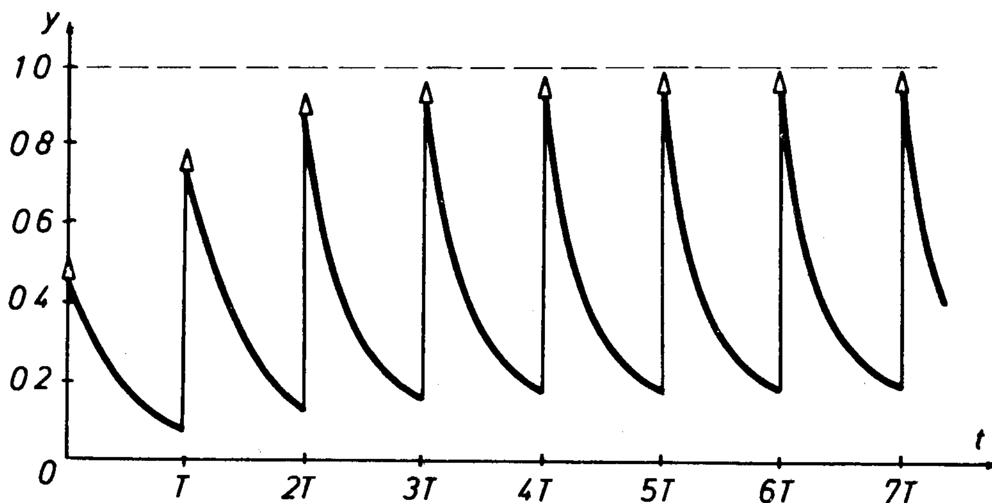
$$Y(z,\mu) = e^{-2\mu}\left(\frac{z}{z-1} - 0{,}577\frac{z}{z-0{,}3972} + 0{,}077\frac{z}{z-0{,}1704}\right)$$

odnosno:

$$y[(k+\mu)T] = e^{-2\mu}(1 - 0{,}577\,e^{-0{,}923k} + 0{,}077\,e^{-1{,}77k}) \tag{8.200}$$

Jednadžbe (8.199) i (8.200) identične su za $\mu = 0$. Isto tako, za konkretan primjer vrijedi da je:

$$y[(k+\mu)T] = y(kT)\cdot e^{-2\mu}, \qquad 0 < \mu < 1 \tag{8.201}$$

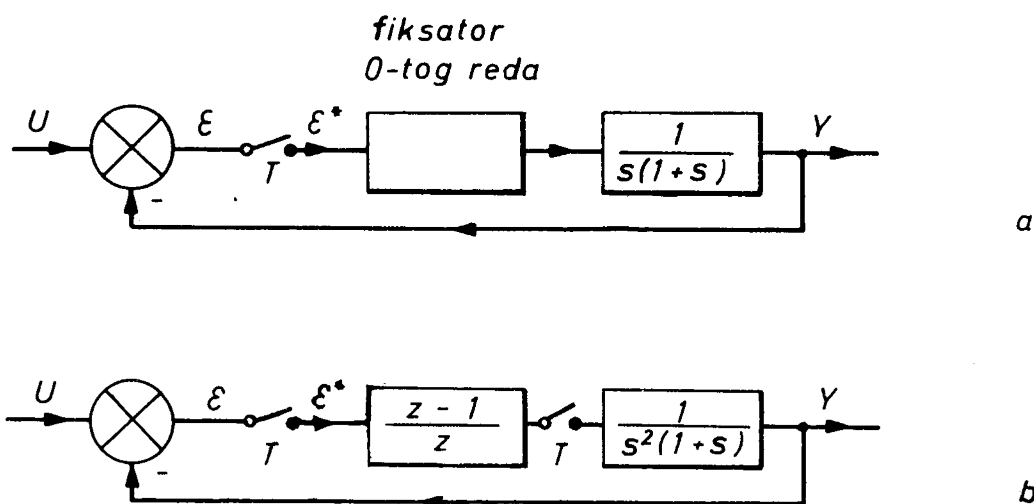


Slika 8.56.

Jednadžba (8.201) pokazuje da je prijelazna karakteristika sistema dana između perioda diskretiziranja eksponencijalnom funkcijom $e^{-2\mu}$, koja počinje u $t=kT$ s vrijednošću $y(kT)$ kao što je prikazano na sl. 8.56. Funkcija od vrijednosti $y(kT)$ opada eksponencijalno do $t=(k+1)T$. Postupak se ponavlja u intervalu $(k+1)T<t<(k+2)T$ itd. Vremenska konstanta eksponencijalne funkcije iznosi 0,25, budući da se μ mijenja od 0 do 1 za vrijeme trajanja periode $t=T=0{,}5[s]$.

Primjer 8.11.

Potrebno je odrediti prijelaznu karakteristiku sistema danog strukturnom shemom na sl. 8.57. za slučaj:
a) sistem bez impulsnog elementa i fiksatora nultog reda,
b) sistem s impulsnim elementom bez fiksatora nultog reda,
c) sistem s impulsnim elementom i fiksatorom nultog reda.
Period diskretiziranja $T=1\,[s]$.



Slika 8.57.

a) Bez impulsnog elementa i fiksatora nultog reda sistem je kontinuiran i ima prijenosnu funkciju zatvorenog kruga:

$$G_z(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^2+s+1}$$

Prijelazna karakteristika glasi:

$$y(t)=\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+s+1)}\right\}$$

$$y(t)=\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{0{,}58e^{j150^\circ}}{s-0{,}5-j0{,}866}-\frac{0{,}58e^{-j150^\circ}}{s-0{,}5+j0{,}866}\right\}$$

$$y(t)=1-1{,}16\,e^{t/2}\cos(0{,}866t+150^\circ)$$

Prijelazna karakteristika kontinuiranog sistema prikazana je na sl. 8.58. krivuljom (a).

b) Za sistem s impulsnim elementom, ali bez fiksatora, proizlazi:

$$G(s)=\frac{1}{s(1+s)}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{1}{1+s}$$

odnosno za $T=1$:

$$G(z,\mu)=\frac{z}{z-1}-\frac{ze^{-\mu}}{z-0{,}368}$$

$$=\frac{z[z(1-e^{-\mu})+(e^{-\mu}-0{,}368)]}{(z-1)(z-0{,}368)}$$

također je:

$$G(z)=\lim_{\mu\to 0} G(z,\mu)=\frac{0{,}632\,z}{(z-1)(z-0{,}368)}$$

$$E(z)=\frac{1}{1+G(z)}\cdot U(z)$$

$$=\frac{(z-1)(z-0{,}368)}{z^2-0{,}7363\,z+0{,}368}\cdot\frac{z}{z-1}$$

$$E(z)=\frac{z(z-0{,}368)}{z^2-0{,}7363\,z+0{,}368}$$

$$Y(z,\mu)=G(z,\mu)\cdot E(z)$$

$$Y(z,\mu)=\frac{z^2[z(1-e^{-\mu})+(e^{-\mu}-0{,}368)]}{(z-1)(z^2-0{,}7363\,z+0{,}368)}$$

$$=\frac{z}{z-1}-\frac{z(e^{-\mu}\cdot z-0{,}368)}{z^2-0{,}7363\,z+0{,}368}$$

$$=\frac{z}{z-1}-\frac{e^{-\mu}(z-0{,}368)\,z}{z^2-0{,}7363\,z+0{,}368}+0{,}765\,(1-e^{-\mu})\frac{0{,}482\,z}{z^2-0{,}736\,z+0{,}368}$$

Prijelazna karakteristika za ovaj slučaj prikazana je krivuljom (b) (sl. 8.58) i glasi:

$$y[(k+\mu)T]=1+e^{-\frac{k}{2}}[0{,}765\,(1-e^{-\mu})\sin 0{,}93k-e^{-\mu}\cos 0{,}93k] \qquad (8.202)$$

c) Kada je u sistem uključen impulsni element i fiksator nultog reda (sl. 8.57.b) dobit će se:

$$G_1(s)=\frac{1}{s^2(1+s)}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{1+s}$$

odnosno:

$$G_1(z,\mu)=\frac{z[\mu(z-1)+1]}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}+\frac{ze^{-\mu}}{z-0{,}368}$$

$$G_1(z,\mu)=\frac{z[(\mu+e^{-\mu}-1)\,z^2+2{,}368-1{,}368\mu-2e^{-\mu}]\,z+(0{,}368\mu+e^{-\mu}-0{,}736)}{(z-1)^2\,(z-0{,}368)}$$

također je:

$$G_1(z)=\lim_{\mu\to 0}G_1(z,\mu)=\frac{z\,(0{,}368\,z+0{,}264)}{(z-1)^2\,(z-0{,}368)}$$

odziv glasi:

$$Y(z,\mu)=\frac{G_1(z,\mu)\cdot\dfrac{z-1}{z}}{1+\dfrac{z-1}{z}\cdot G_1(z)}\cdot U(z)$$

$$\frac{Y(z,\mu)}{z}=\frac{(\mu-e^{-\mu}-1)\,z^2+(2{,}368-1{,}368\mu-2e^{-\mu})\,z+(0{,}368\mu+e^{-\mu}-0{,}736)}{(z-1)\,(z^2-z+0{,}632)}$$

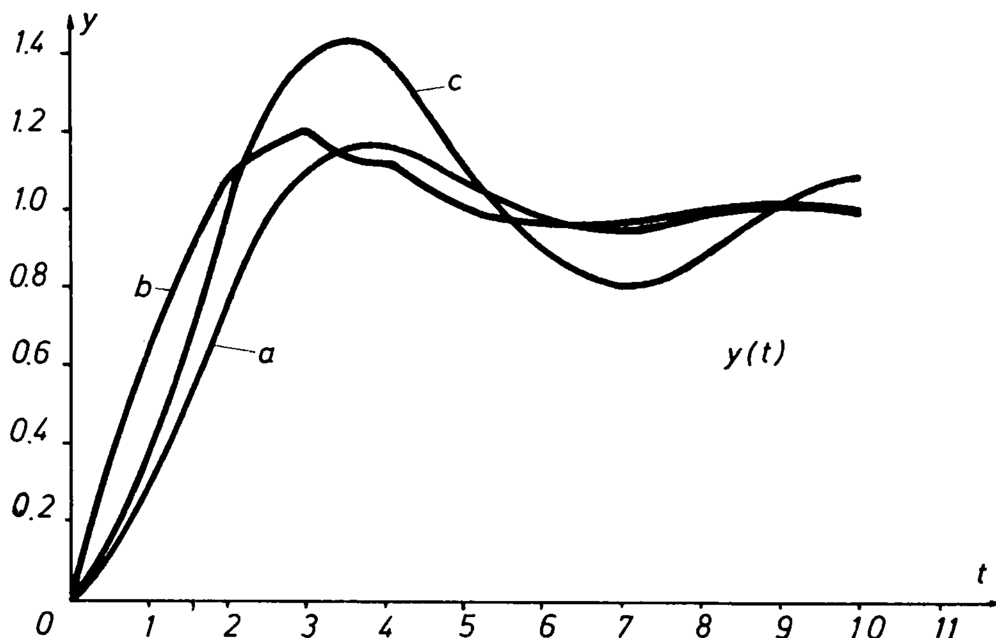
$$=\frac{1}{z-1}-\frac{(2-\mu-e^{-\mu})\,z-(1{,}368-0{,}368\mu-e^{-\mu})}{z^2-z+0{,}632}$$

$$Y(z,\mu)=\frac{z}{z-1}-(2-\mu-e^{-\mu})\frac{z\,(z-0{,}5)}{z^2-z+0{,}632}+$$

$$+(0{,}595+0{,}214\mu-0{,}81\,e^{-\mu})\frac{0{,}617z}{z^2-z+0{,}632}$$

Iz gornje jednadžbe proizlazi izraz za prijelaznu karakteristiku sistema – krivulja (c) na sl. 8.58.

$$y[(k+\mu)\,T]=1-e^{-0{,}23k}[(2-\mu-e^{-\mu})\cos 0{,}89k-(0{,}595+0{,}214\mu-0{,}81e^{-\mu})\sin 0{,}89k] \tag{8.203}$$



Slika 8.58.

Na slici 8.58. vidljivo je da kontinuirani sistem ima najmanje nadvišenje i vrijeme smirivanja.

Diskretni sistem (krivulje (b) i (c)) ima veća nadvišenja i vrijeme smirivanja od kontinuiranog sistema. Sistem s fiksatorom nultog reda ima veće nadvišenje od sistema bez fiksatora. To se može objasniti time što fiksator nultog reda pridodaje pol procesu u ishodištu $\left(\frac{1}{s}\right)$, što je ekvivalentno dodavanju člana s usporenjem koji općenito može narušiti stabilnost sistema.

Za razliku od odziva sistema u primjeru 8.10, diskretni sistem iz primjera 8.11. izglađuje odziv, što je posljedica integralnog djelovanja kontinuiranog dijela sistema s prijenosnom funkcijom $\frac{1}{s(1+s)}$. Izlaz takvog sistema nema diskontinuitete u trenutku uključivanja pobude na sistem. Proces s prijenosnom funkcijom $\frac{0{,}25}{1+0{,}25\,s}$ nema integralno svojstvo, pa može izgladiti step pobude, ali ne i impulsne pobude. U slučaju kad se u takav sistem uključi fiksator nultog reda (ekvivalentni kontinuirani dio sistema poprima integralno svojstvo) signal na ulazu procesa bit će niz superponiranih step pobuda, te će izlazni signal procesa tada biti „izglađen“.

Ako se koristi fiksator i ako je polinom u nazivniku prijenosne funkcije $G(s)$ za red veći od reda polinoma u brojniku, tada će izlazni signal iz procesa biti glatka krivulja bez diskontinuiteta. Ako se fiksator ne koristi, tada red polinoma u nazivniku prijenosne funkcije $G(s)$ mora biti najmanje za dva reda veći od reda polinoma u brojniku želi li se izgladiti izlazni signal procesa. Taj rezultat proizlazi iz teorema o početnoj vrijednosti, koji daje za impulsnu pobudu $\lim_{s\to\infty} s\,Y(s)=0$ samo u slučaju kada je red polinoma u nazivniku najmanje za dva reda veći od reda polinoma u brojniku. Uz taj uvjet početne vrijednosti $y(t)$ nema diskontinuiteta.

Često je za analizu diskretnih sistema dovoljno poznavanje ponašanja sistema u trenucima diskretiziranja $\mu=0$. Međutim, poznavanje procesa samo u trenucima diskretiziranja može dati također krivu sliku o ponašanju sistema (primjer 8.7). Na izlazu sistema mogu se pojaviti oscilacije koje je nemoguće zamijetiti promatranjem signala u $t=kT$. Takve oscilacije često se nazivaju i skrivene oscilacije, jer najčešće nisu primjetljive u $t=kT$. Za potpuniju analizu sistema, potrebno je zbog toga korištenje modificirane Z-transformacije pomoću koje je moguće dobiti kompletnu sliku ponašanja sistema.

8.11. Analiza stabilnosti linearnih diskretnih sistema

Analiza diskretnih sistema kao i kod kontinuiranih sistema zahtijeva da se prouči:

- stabilnost sistema
- ponašanje sistema u prijelaznom režimu rada
- ponašanje sistema u stacionarnom režimu rada.

Metode za analizu stabilnosti diskretnih linearnih sistema mogu se podijeliti na:

- algebarske odnosno analitičke
- grafičke odnosno grafoanalitičke.

Za linearne kontinuirane sisteme problem stabilnosti svodi se na neophodne i dovoljne uvjete da korijeni karakteristične jednadžbe sistema leže u lijevoj polurav-

nini s-ravnine kompleksnih frekvencija. Da bi se odredila stabilnost diskretnog sistema potrebno je, prema tome, odrediti kako se lijeva poluravnina s-ravnine kompleksnih frekvencija preslikava u kompleksnu z-ravninu. Na osnovi dobivenog rezultata moguće je, analogno kontinuiranim sistemima, odrediti stabilnost sistema u z-ravnini ili $G(z)$ ravnini.

Stabilnost diskretnog sistema moguće je odrediti i bez preslikavanja u z-ravninu odnosno $G(z)$ ravninu. U tom slučaju stabilnost se određuje u ravnini $G^*(j\omega)$, frekvencijskim postupcima Mihajlova odnosno Nyquista. Poteškoća koja se tu javlja jest u tome što se za crtanje frekvencijske karakteristike diskretnog sistema mora crtati više frekvencijskih karakteristika koje se međusobno zbrajaju, što proizlazi iz izraza (8.21):

$$G^*(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} G[j(\omega+k\omega_s)] \qquad (8.204)$$

U slučaju kad $G(s)$ ima svojstva niskofrekventnog filtera, potrebno je crtati nekoliko karakteristika, na primjer $\frac{1}{T}G(j\omega)$, $\frac{1}{T}G(j\omega-j\omega_s)$, $\frac{1}{T}G(j\omega-j2\omega_s)$ i međusobno ih zbrojiti. Što je $G(j\omega)$ lošiji niskofrekventni filter, to je veći broj komponenata koje treba međusobno zbrajati. Rezultantna karakteristika $G^*(j\omega)$ zove se amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika diskretnog sistema. Kada je $G(j\omega)$ kvalitetan niskofrekventni filter, dovoljno je crtati samo karakteristiku $\frac{1}{T}G(j\omega)$, koja ima naziv *ekvivalentna amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika*.

Stabilnost diskretnog sistema određuje se prema tome, da li frekvencijska karakteristika porastom frekvencija od 0 do ∞ obuhvaća ili ne kritičnu točku $(-1, j0)$. Određivanje stabilnosti diskretnog sistema ne razlikuje se od određivanja stabilnosti kontinuiranog sistema.

Budući da je analiza stabilnosti diskretnog sistema u ravnini $G(j\omega)$ složena, zbog poteškoća u crtanju frekvencijske karakteristike $G^*(j\omega)$, razrađeni su prikladniji postupci koji koriste svojstva Z-transformacije i bilinearne transformacije.

Primjer 8.12.

Za diskretni sistem s prijenosnom funkcijom ekvivalentnog otvorenog kruga:

$$G(s)=\frac{20(1+0{,}2s)}{s(1+0{,}5s)(1+0{,}01s)}$$

potrebno je izvršiti analizu stabilnosti ako je period diskretiziranja $T=628[ms]$.

Na osnovi jednadžbe (8.204) proizlazi:

$$G^*(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{20[1+0{,}2j(\omega+k\omega_s)]}{j(\omega+k\omega_s)[1+0{,}5j(\omega+k\omega_s)][1+0{,}01j(\omega+k\omega_s)]}$$

Kako je $T=628[ms]\rightarrow\omega_s=\frac{2\pi}{T}\doteq 10[s^{-1}]$

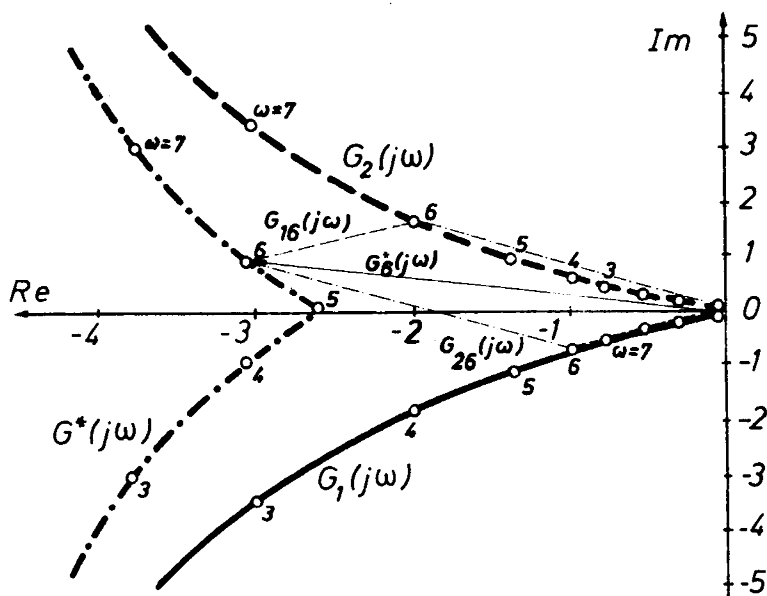
Za $k=0$ prvi član sume glasi:

$$G_1(j\omega)=\frac{10}{2\pi}\cdot\frac{20(1+j0{,}2\omega)}{j\omega(1+0{,}5j\omega)(1+0{,}01j\omega)}$$

dok je za $k=-1$ drugi član:

$$G_2(j\omega)=\frac{10}{2\pi}\cdot\frac{20[1+j0{,}2(\omega-10)]}{j(w-10)[1+j0{,}5(\omega-10)][1+j0{,}01(\omega-10)]}$$

Na slici 8.59. nacrtane su ove dvije komponente sume, kao i njihov zbroj – frekvencijska karakteristika sistema $G^*(j\omega)$. Na slici je vidljivo da za $k=0$ frekvencijska krivulja $G_1(j\omega)$ ne obuhvaća kritičnu točku $(-1, j0)$. Prema tome diskretni sistem bit će na osnovi te ekvivalentne amplitudno-fazne frekvencijske karakteristike stabilan. Međutim, komponenta $G_2(j\omega)$ pomiče ulijevo frekvencijsku karakteristiku $G_1(j\omega)$, te frekvencijska karakteristika $G^*(j\omega)$ pokazuje da je *sistem nestabilan*. Primjer pokazuje da je neophodno uzeti u obzir nekoliko članova reda (8.204) kako bi dobili pravu sliku dinamike sistema. S dodatnim komponentama za $k=-2$, $k=-3$, itd. frekvencijska karakteristika bi se pomicala još više ulijevo.



Slika 8.59

Preslikavanje s-ravnine kompleksnih frekvencija na kompleksnu ravninu z

Iz definicija diskretne L-transformacije (8.59) i Z-transformacije (8.60) proizlazi:

$$z=e^{Ts} \tag{8.205}$$

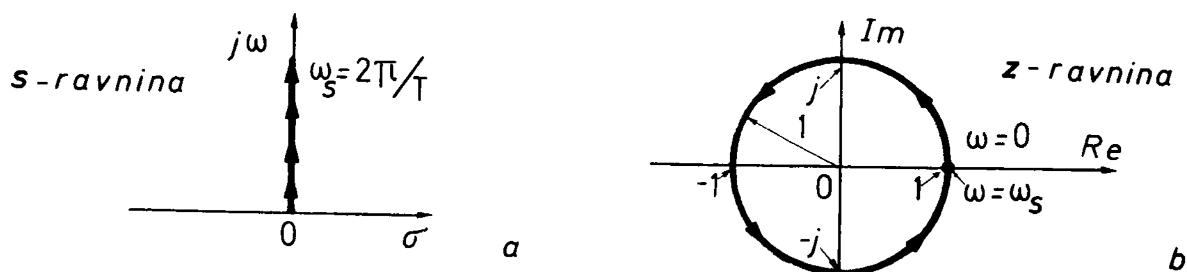
Izraz (8.205) prema tome daje zakonitost preslikavanja kompleksne varijable $s=\sigma+j\omega$ iz s-ravnine u kompleksnu varijablu z u z-ravnini. Da bi se izvršilo preslikavanje ravnine potrebno je prethodno preslikati određene konture iz s-ravnine:

1. Preslikavanje imaginarne osi

Ako je $s=j\omega$, tada se imaginarna os preslikava u:

$$z=e^{j\omega T}=\cos\omega T+j\sin\omega T \tag{8.206}$$

Izraz (8.206) predstavlja jediničnu kružnicu u z-ravnini. Promjenom $0<\omega<\frac{2\pi}{T}$, z se kreće po jediničnoj kružnici u smjeru obrnutom od smjera kazaljke na satu (sl. 8.60). Kad se ω mijenja od $\frac{2\pi}{T}$ do $\frac{4\pi}{T}$, z opisuje ponovno isti put.

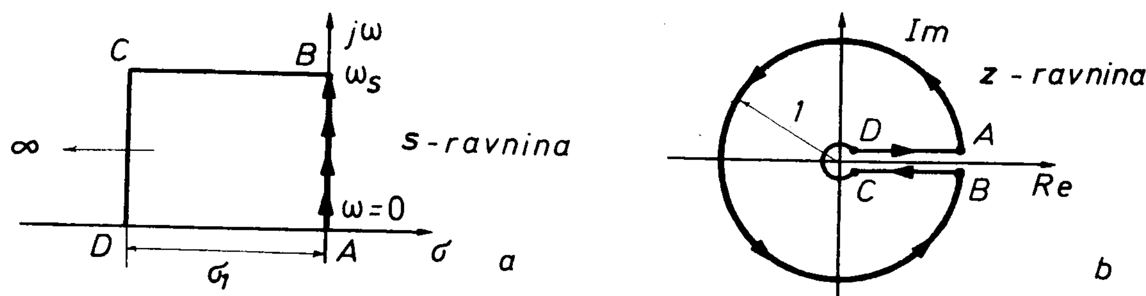


Slika 8.60.

Za analizu nekog sistema dovoljno je prema tome promatrati odsječak na imaginarnoj osi $0<\omega<\omega_s$.

2. Preslikavanje lijeve poluravnine

Na osnovi preslikavanja pravokutnog područja (A, B, C, D) sa sl. 8.61.a, može se zaključiti kako se preslikava lijeva poluravnina s-ravnine.



Slika 8.61.

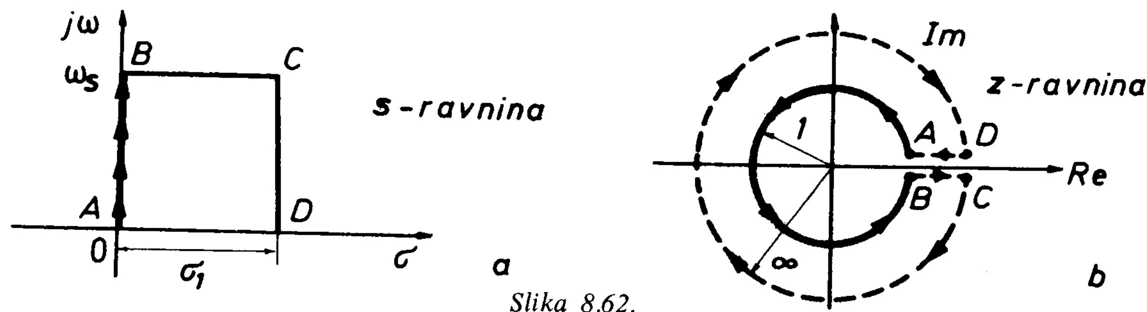
U točki C: $s=-\sigma_1+j\omega_s$

$$z=e^{Ts}=e^{-T\sigma_1}\cdot e^{j2\pi}$$

kada $\sigma_1\to\infty$ tada $z\to 0$, kao što je prikazano na sl. 8.61.b.

3. Preslikavanje desne poluravnine

Na sličan način kao u prethodnom slučaju dovoljno je promatrati pravokutnik (A, B, C, D) (sl. 8.62.a).



Slika 8.62.

4. Preslikavanje linije konstantnog prigušenja

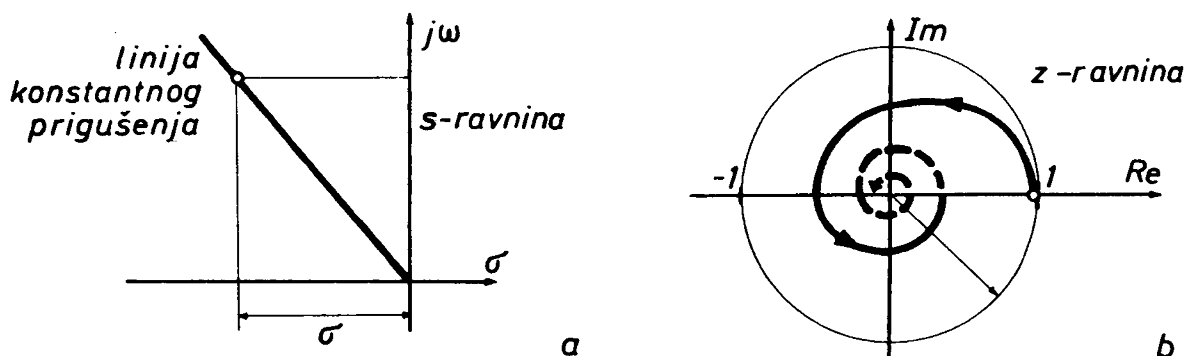
Na sl. 8.63.a prikazana je u s-ravnini linija konstantnog prigušenja (ξ). U svakoj točki vrijedi:

$$s = -\sigma + j\omega$$

ovaj pravac preslikava se u:

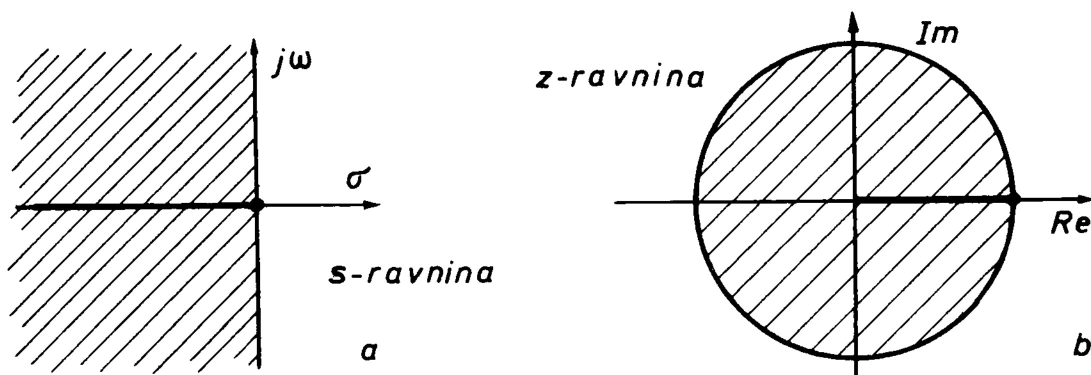
$$z = e^{-T\sigma} \cdot e^{jT\omega}$$

što predstavlja krivulju logaritamske spirale prikazane na sl. 8.63.b.



Slika 8.63.

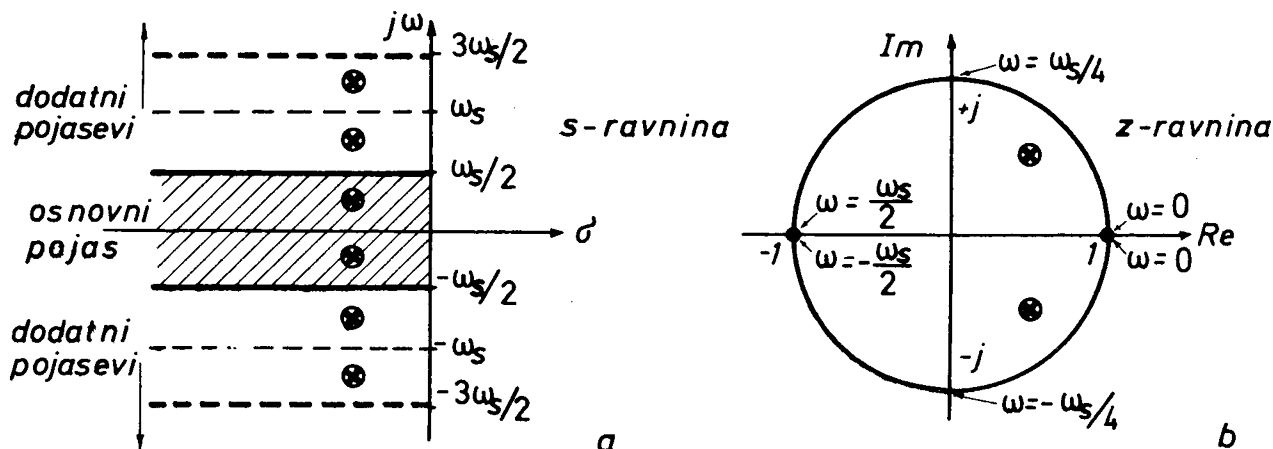
Na osnovi izloženog vidljivo je da se lijeva poluravnina s-ravnine preslikava u unutrašnjost jedinične kružnice z-ravnine, imaginarna os, na jediničnu kružnicu, a desna poluravnina u područje izvan jedinične kružnice (sl. 8.64).



Slika 8.64.

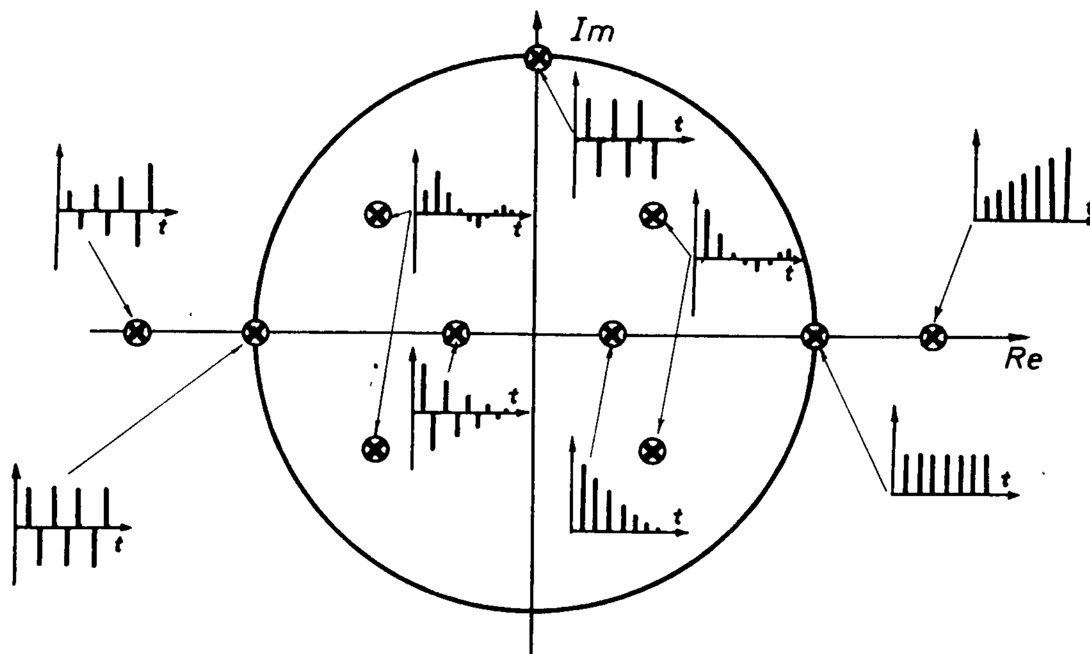
Za analizu sistema dovoljno je promatrati sistem unutar frekvencijskog odsječka $-\frac{\omega_s}{2} < \omega < \frac{\omega_s}{2}$, jer on u potpunosti definira ponašanje sistema. Naime, promjenom ω od $-\omega_{s/2}$ do 0, z se mijenja po jediničnoj kružnici od -1 preko $-j$ do $+1$, dok se s promjenom ω od $0-\omega_{s/2}$, z kreće od $+1$ preko $+j$ do -1, također po jediničnoj kružnici (sl. 8.65). Na taj način opisana je jedinična kružnica u z-ravnini. Područje između $-\omega_{s/2}$ i $\omega_{s/2}$ naziva se osnovni pojas, a ostala područja nazivaju se komplementarnim pojasevima s-ravnine. Dok je preslikavanje iz s-ravnine u z-ravninu jednoznačno, preslikavanje iz z-ravnine u s-ravninu nije jednoznačno, jer se polovi dobivaju kako u osnovnom tako i u komplementarnim pojasevima s-ravnine.

Dinamiku diskretnog sistema dovoljno je ispitati u osnovnom pojasu, budući da su ostali, zrcalne slike osnovnog, pomaknuti za $\pm k\omega_s$.



Slika 8.65.

Za bilo koji pol na imaginarnoj osi s-ravnine, pripadni pol u z-ravnini nalazi se na jediničnoj kružnici. Pol u lijevoj poluravnini s-ravnine preslikava se u pol unutar jedinične kružnice z-ravnine. Pol na negativnoj realnoj osi preslikava se na dio realne osi z-ravnine između 0 i 1. Na slici 8.66. prikazan je odziv sistema za različite položaje polova u z-ravnini.



Slika 8.66

Na slici 8.66. vidljivo je da će se aperiodski odziv sistema dobiti ako su polovi na realnoj osi $0 \leq z < 1$. Oscilatoran odziv sistema dobit će se kada su polovi na jediničnoj kružnici, osim u $z = 1$, kada se javlja „konstantna sekvenca". Polovi izvan jedinične kružnice pokazuju da se radi o nestabilnom sistemu, dok polovi unutar jedinične kružnice, izvan realnog dijela $0 \leq z < 1$, daju oscilatorni odziv.

Definicija stabilnosti

Za linearni diskretni sistem kaže se da je stabilan ako za sve ulazne funkcije u sistem, koje su ograničene, postoji uvijek izlazni signal koji je također ograničen.

Uvjet stabilnosti može se dobiti ako se odziv rastavi na dva dijela: *Prijelazni i prinudni odziv.*

Primjenom inverzne Z-transformacije na izraz:

$$Y(z) = G_z(z) \cdot U(z) \tag{8.207}$$

proizlazi

$$y(kT) = \sum_{\upsilon} Res\, G_z(z) \cdot U(z)\, z^{k-1} \Big|_{z=z_\upsilon} \tag{8.208}$$

Budući da se izlazni signal sistema sastoji od:

$$y(kT) = y_1(kT) + y_2(kT) \tag{8.209}$$

gdje je: $y_1(kT)$ prijelazni dio odziva
$y_2(kT)$ prinudni dio odziva

Iz (8.208) i (8.209) proizlazi:

$$y_1(kT) = \sum_{n} Res\; G_z(z) \cdot U(z)\, z^{k-1} \Big|_{z=z_n} \tag{8.210}$$

$$y_2(kT) = \sum_{l} Res\; G_z(z) \cdot U(z)\, z^{k-1} \Big|_{z=z_l} \tag{8.211}$$

z_n ... singularne točke prijenosne funkcije $G_z(z)$
z_l ... singularne točke funkcije $U(z)$.

Jednadžba (8.210) pokazuje da je prijelazni dio odziva sistema dobiven iz sume $Res\ Y(z)\, z^{k-1}$ u polovima prijenosne funkcije $G_z(z)$, dok jednadžba (8.211) daje prinudni dio odziva sistema kao sumu $Res\ Y(z)\, z^{k-1}$ u polovima funkcije pobude $U(z)$.

Da bi sistem bio stabilan mora $|z_n| \leq 1$ i $|z_l| \leq 1$, tj. svi polovi funkcije $Y(z)$ moraju ležati unutar jedinične kružnice ili na njoj.

Kada je jedan pol na jediničnoj kružnici, na primjer $|z_n| = 1$, tada s tehničkog stajališta takav sistem možemo smatrati nestabilnim, budući da mala promjena u konstantama može dovesti kritični pol izvan jedinične kružnice uzrokujući nestabilnost. Prema tome može se postaviti teorem:

Ako su sve singularne točke prijenosne funkcije linearnog diskretnog sistema $G_z(z)$ unutar jedinične kružnice, sistem je stabilan. Ako singularne točke leže izvan ili na jediničnoj kružnici, sistem je nestabilan.

Analiza stabilnosti diskretnog sistema u z i $G(z)$ ravnini

Kriterij Schur-Cohna

Ovaj algebarski kriterij analogan je Routhovu ili Hurwitzovu kriteriju. Kriterij je postavljen 1922. godine. Po tom kriteriju stabilnost linearnog diskretnog sistema određuje se iz koeficijenata karakteristične jednadžbe sistema. Kriterij daje uvjete

koji moraju zadovoljavati koeficijenti karakteristične jednadžbe zatvorenog sistema, da bi se korijeni karakteristične jednadžbe nalazili unutar jedinične kružnice L [7, 55, 56].

Za karakterističnu jednadžbu zatvorenog kruga s kompleksnim koeficijentima a_i:

$$1+G_0(z)=C(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n=0 \tag{8.212}$$

tvori se matrica koeficijenata:

$$\underline{\Delta}k=\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0\ldots\ldots\ldots0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2}\ldots a_{n-k+1} \\ a_1 & a_0 & 0\ldots\ldots\ldots0 & 0 & a_n & a_{n-1}\ldots a_{n-k+2} \\ a_2 & a & a_0\ldots\ldots\ldots0 & 0 & 0 & a_n\ldots\ldots a_{n-k+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots\quad\ddots\quad\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\quad\ddots\quad\vdots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3}\ldots\ldots a_0 & 0 & 0 & 0\ldots\ldots a_n \\ \bar{a}_n & 0 & 0\ldots\ldots\ldots0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2\ldots\ldots\bar{a}_{k-1} \\ \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n & 0\ldots\ldots\ldots0 & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1\ldots\ldots\bar{a}_{k-2} \\ \bar{a}_{n-2} & \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n\ldots\ldots\ldots0 & 0 & 0 & \bar{a}_0\ldots\ldots\bar{a}_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots\quad\ddots\quad\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\quad\ddots\quad\vdots \\ a_{n-k+1} & a_{n-k+2} & a_{n-k+3}\ldots\bar{a}_n & 0 & 0 & 0\ldots\ldots\bar{a}_0 \end{bmatrix} \tag{8.213}$$

Korijeni karakteristične jednadžbe leže unutar jedinične kružnice (sistem stabilan), ako su zadovoljeni uvjeti:

$$|\Delta_k|<0 \quad \text{za } k \text{ neparno} \tag{8.214}$$

$$|\Delta_k|>0 \quad \text{za } k \text{ parno} \tag{8.215}$$

gdje je: $k=1, 2, \ldots, n$

$\bar{a}_k$ ... konjugirano-kompleksna vrijednost koeficijenta a_k

za $k=1$ proizlazi:

$$a_{k-1}=a_0 \quad \text{i} \quad a_{n-k+1}=a_n$$

$$|\Delta_1|=\begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ \bar{a}_n & \bar{a}_0 \end{vmatrix}=a_0\bar{a}_0-a_n\bar{a}_n \tag{8.216}$$

za $k=2$:

$$a_{k-1}=a_1, \quad a_{k-2}=a_0, \quad a_{n-k+1}=a_{n-1}, \quad a_{n-k+2}=a_n$$

$$|\Delta_2|=\begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & 0 & a_n \\ \bar{a}_n & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 \\ \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n & 0 & \bar{a}_0 \end{vmatrix} \tag{8.217}$$

za $k=3$:

$$|\Delta_3|=\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & a_n \\ \bar{a}_n & 0 & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 \\ \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n & 0 & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 \\ \bar{a}_{n-2} & \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n & 0 & 0 & \bar{a}_0 \end{vmatrix} \tag{8.218}$$

Po ovom kriteriju potrebno je ispitati onoliko determinanti, koliki je red karakteristične jednadžbe (n). Svaka determinanta ima $2k$ redaka i $2k$ stupaca. Kada je red sistema n viši, analiza stabilnosti po ovom kriteriju je složena. Kriterij stabilnosti Schur-Cohna koristi se zbog toga za analizu stabilnosti jednostavnijih sistema. U novije vrijeme ovaj kriterij je pojednostavnjen, te su dobiveni novi kriteriji stabilnosti.

Pojednostavnjen kriterij za sisteme nižeg reda

Kada su koeficijenti u karakterističnoj jednadžbi sistema realni, što je kod fizikalnih sistema uvijek zadovoljeno, može se kriterij Schur-Cohna pojednostavniti i dobiti determinantna metoda koja je slična Hurwitzovu kriteriju stabilnosti za kontinuirane sisteme. Za niže redove karakteristične jednadžbe sistema mogu se uvjeti stabilnosti izraziti preko koeficijenata polinoma.

$n=2$:

$$\mathrm{a}(z)=1+G_0(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2, \qquad a_2>0$$

Uvjeti stabilnosti:

$$\left.\begin{array}{r} a(1)>0 \\ a(-1)>0 \\ a_0-a_2<0 \end{array}\right\} \qquad (8.219)$$

kada je $a_2=1$ uvjeti glase:

$$\left.\begin{array}{r} |a(0)<1 \\ a(1)>0 \\ a(-1)>0 \end{array}\right\} \qquad (8.220)$$

$n=3$:

$$a(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2+a_3 z^3, \qquad a_3>0$$

Sistem je stabilan ako su zadovoljeni uvjeti:

$$\left.\begin{array}{r} a(1)>0 \\ a(-1)<0 \\ |a_0|<a_3 \\ a_0^2-a_3^2<a_0 a_2-a_1 a_3 \end{array}\right\} \qquad (8.221)$$

$n=4$:

$$a(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2+a_3 z^3+a_4 z^4, \qquad a_4>0$$

Uvjeti stabilnosti glase:

$$\left.\begin{array}{r} a(1)>0 \\ a(-1)>0 \\ a_1-a_3<2(a_4-a_0) \\ a_1-a_3>2(a_0-a_4) \\ a_0^3+2a_0 a_2 a_4+a_1 a_3 a_4-a_0 a_4^2-a_2 a_4^2- \\ -a_0 a_3^2-a_0^2 a_4-a_0^2 a_2-a_1^2 a_4+a_4^3+a_0 a_1 a_3>0 \end{array}\right\} \qquad (8.222)$$

Primjer 8.13.

Za sistem s prijenosnom funkcijom:

$$G_z(z)=\frac{0{,}11z}{z^2-1{,}67z+0{,}78}$$

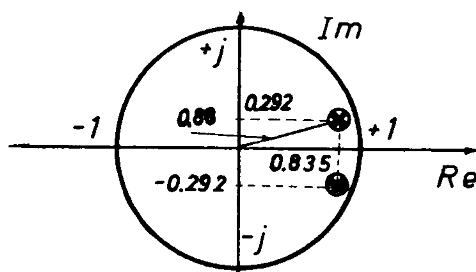
potrebno je odrediti stabilnost sistema.

Karakteristična jednadžba sistema glasi:

$$a(z)=z^2-1{,}67z+0{,}78=0$$

$$z_{1,2}=0{,}835\pm\sqrt{0{,}835^2-0{,}78}=0{,}835\pm j0{,}292$$

$$|z_{1,2}|=\sqrt{0{,}835^2+0{,}292^2}=0{,}88<1$$



Slika 8.67.

Budući da se polovi sistema nalaze unutar jedinične kružnice, sistem je stabilan.

Po metodi Schur-Cohna potrebno je od koeficijenata karakteristične jednadžbe napraviti matricu $\underline{\Delta}k$ i ispitivati determinante za $k=1$ i $k=2$, budući da se radi o sistemu drugog reda $n=2$.

$$a(z)=z^2-1{,}67+0{,}78$$

koeficijenti su realni i iznose: $a_0=0{,}78$, $a_1=-1{,}67$, $a_2=1$

$$|\Delta_1|=\begin{vmatrix}0{,}78 & 1\\ 1 & 0{,}78\end{vmatrix}=-0{,}39<0 \quad \text{za } k \text{ neparno}$$

$$|\Delta_2|=\begin{vmatrix}0{,}78 & 0 & 1 & -1{,}67\\ -1{,}67 & 0{,}78 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0{,}78 & -1{,}67\\ -1{,}67 & 1 & 0 & 0{,}78\end{vmatrix}=0{,}0183>0 \quad \text{za } k \text{ parno}$$

Sistem je stabilan.

Zadatak se mogao riješiti i pojednostavnjenim kriterijem – uvjeti (8.219):

$$a(1)=1-1{,}67+0{,}78=0{,}11>0$$

$$a(-1)=1+1{,}67+0{,}78=3{,}45>0$$

$$0{,}78-1<0$$

Kako je $a_2=1$ mogu se koristiti uvjeti (8.220)

$$|a(0)|<1\Rightarrow 0{,}78<1$$

$$a(1)>0\Rightarrow 0{,}11>0$$

$$a(-1)>0\Rightarrow 3{,}45>0$$

Nyquistov kriterij stabilnosti

Ovaj grafoanalitički kriterij zahtijeva ispitivanje stabilnosti diskretnog sistema u ravnini $G(z)$. Osniva se na grafičkom prikazu prijenosne funkcije otvorenog sistema $G_0(z)$, u ravnini $G(z)$.

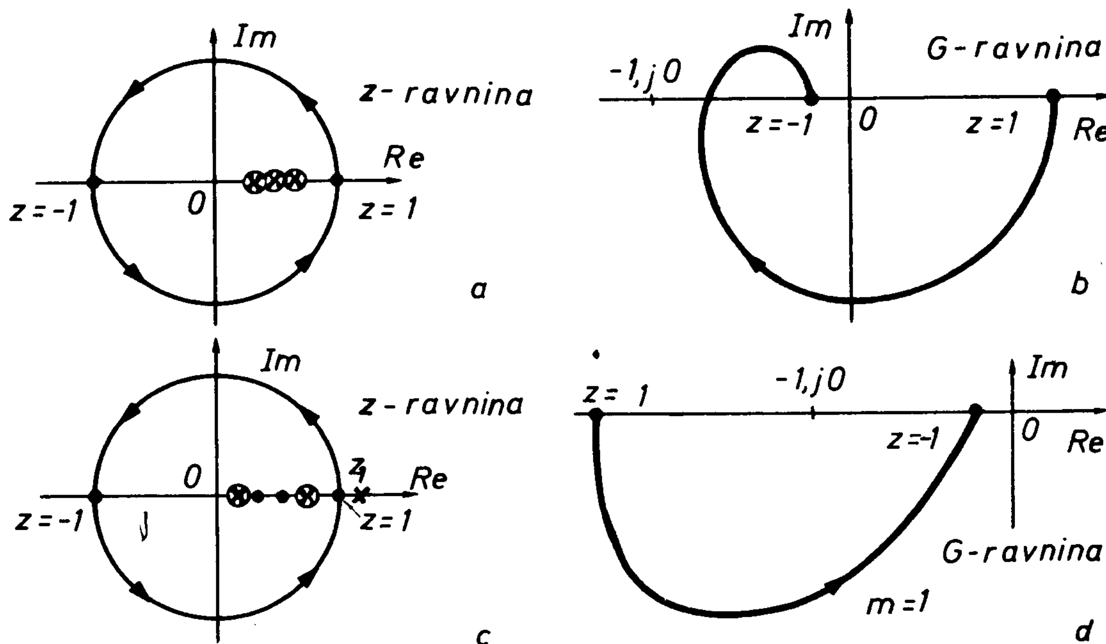
Ako je poznata prijenosna funkcija otvorenog sistema:

$$G_0(z)=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots+b_1 z+b_0}{c_n z^n+c_{n-1}z^{n-1}+\ldots+c_1 z+c_0}, \quad n>m \tag{8.223}$$

tada se stabilnost diskretnog sistema može odrediti iz uvjeta Nyquist-Mihajlova:

1. Zatvoreni diskretni sistem bit će stabilan ako krivulja $G_0(z)$ otvorenog sistema, koja nema polove izvan jedinične kružnice, dobivena promjenom z od $+1$ do -1 po jediničnoj kružnici ne obuhvaća točku $(-1, j0)$.
2. U slučaju kad $G_0(z)$ ima m polova izvan jedinične kružnice, tada će zatvoreni sistem biti stabilan, kada krivulja $G_0(z)$ dobivena promjenom z od $+1$ do -1 po jediničnoj kružnici obuhvati točku $(-1, j0)$, $\frac{m}{2}$ puta.

Na slici 8.68. prikazana su dva karakteristična slučaja. Na slici 8.68.d prikazan je slučaj kada otvoreni krug ima jedan pol izvan jedinične kružnice. $G_0(z)$ obuhvaća točku $(-1, j0)$ pola puta, prema tome zatvoreni sistem bit će stabilan.



Slika 8.68.

Kada $G_0(z)$ ima pol na $z=1$, tada se može pisati:

$$G_0(z)=\frac{G_1(z)}{z-1} \tag{8.224}$$

odnosno u slučaju dvostrukog pola na $z=1$, proizlazi:

$$G_0(z)=\frac{G_1(z)}{(z-1)^2} \tag{8.225}$$

Ako se u izraz (8.224) ili (8.225) umjesto $z-1$ uvrsti:

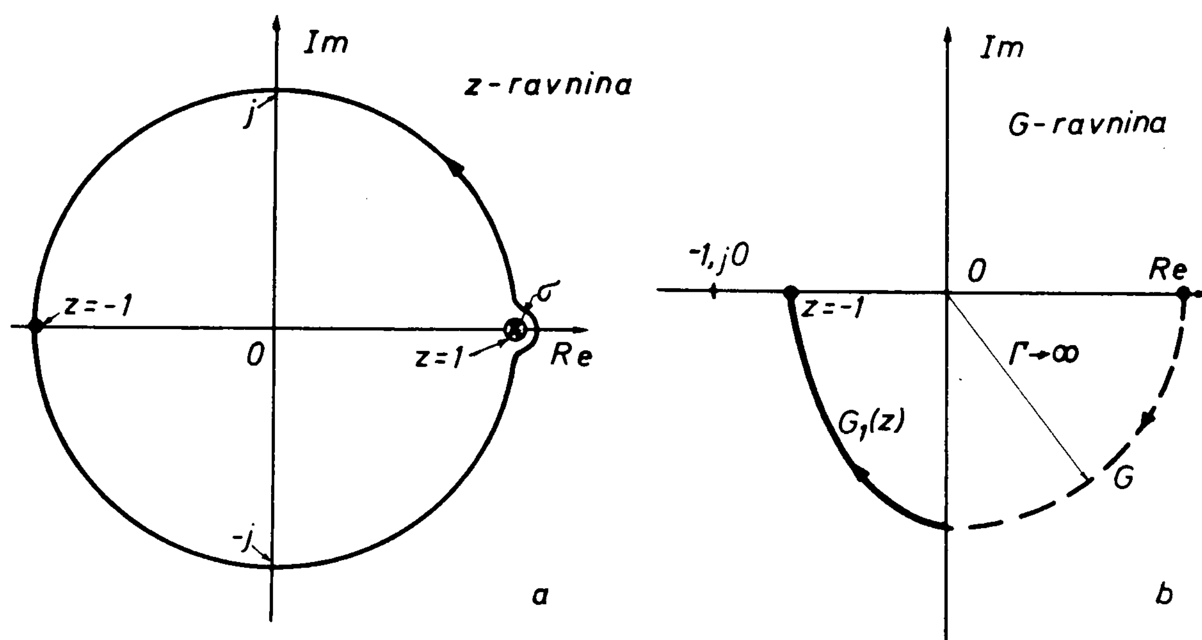
$$z-1=\rho e^{j\chi}, \qquad \rho\to 0$$

što znači da se pol $z=1$, zamijenio kružnicom σ, kojoj radijus teži 0 (sl. 8.69.a).

Izraz (8.224) sada glasi:

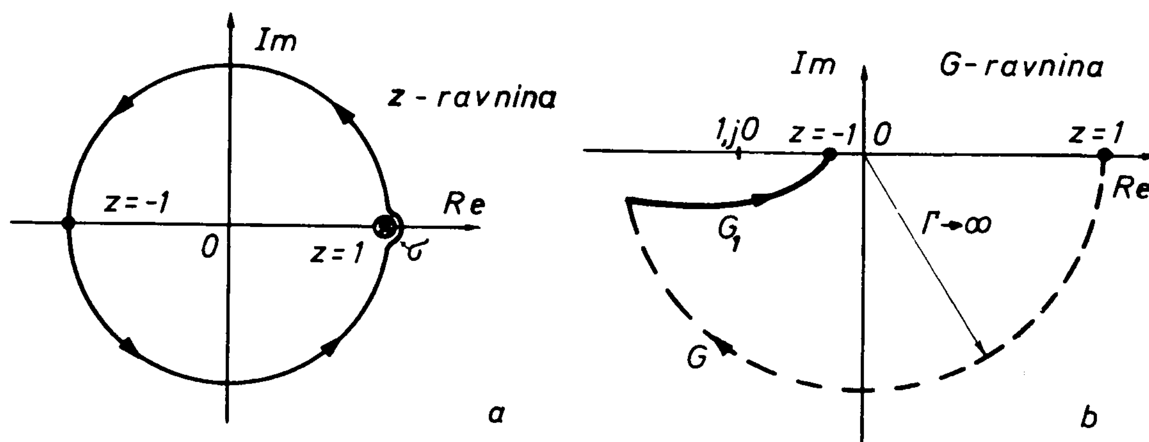
$$G_0(z)=\frac{G_1(z)}{\rho}e^{-j\chi} \tag{8.226}$$

Preslikavanjem dijela kružnice σ beskonačno malog radijusa (ρ), dobit će se dio kružnice beskonačno velikog radijusa Γ, od 0 do $-\pi/2$ (sl. 8.69.b). Ako $G_1(z)$ nema polova izvan jedinične kružnice, zatvoreni sistem bit će stabilan jer $G_0(z)$ ne obuhvaća točku $(-1, j0)$.



Slika 8.69.

Za slučaj dvostrukog pola na $z=1$, grafički prikaz izraza (8.225) prikazan je na slici 8.70. Sistem je također stabilan, ako $G_1(z)$ nema polova izvan jedinične kružnice.



Slika 8.70.

Primjer 8.14.

Potrebno je izvršiti analizu stabilnosti sistema s prijenosnom funkcijom otvorenog kruga:

$$G_0(z)=\frac{z}{(1+2{,}45z)\,(2{,}45z-1)}$$

Krivulju $G_0(z)$ moguće je nacrtati u ravnini $G(z)$, mijenjajući z od $+1$ preko $+j$ do -1 po jediničnoj kružnici, što je ekvivalentno promjeni ω od 0 do π/T, odnosno $\bar{\omega}$ od 0 do π, ako se računa preko bezdimenzione frekvencije $\bar{\omega}=\omega T$. Ako je $\bar{\omega}$ varijabla, tada je potrebno umjesto z, u prijenosnu funkciju $G_0(z)$, uvrstiti $z=e^{j\omega}$:

$$G_0(e^{j\bar{\omega}})=\frac{e^{j\bar{\omega}}}{6e^{j2\bar{\omega}}-1}$$

$$=\frac{1}{6e^{j\bar{\omega}}-e^{-j\bar{\omega}}}$$

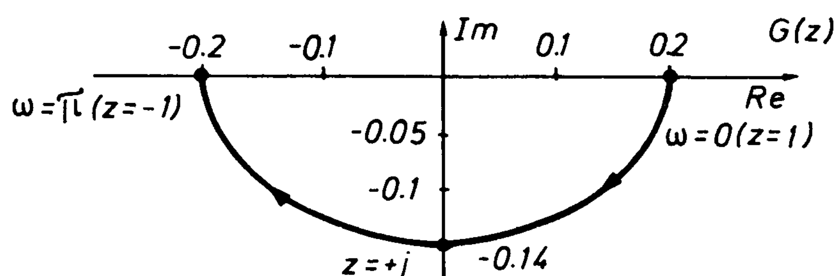
$$=\frac{5\cos\bar{\omega}}{25\cos^2\bar{\omega}+48\sin^2\bar{\omega}}-j\,\frac{7\sin\bar{\omega}}{25\cos^2\bar{\omega}+49\sin^2\bar{\omega}}$$

U tablici 8.4. dane su vrijednosti za crtanje karakteristike $G_0(z)$ u $G(z)$ ravnini.

Tablica 8.4.

z	$\bar{\omega}$	$Re\{G_0(z)\}$	$Im\{G_0(z)\}$
1	0	0,20	0
$0{,}707+j0{,}707$	$\frac{\pi}{4}$	0,10	$-0{,}13$
$+j$	$\frac{\pi}{2}$	0	$-0{,}14$
$-0{,}707+j0{,}707$	$\frac{3\pi}{4}$	$-0{,}10$	$-0{,}13$
-1	π	$-0{,}20$	0

Na osnovi karakteristike $G_0(z)$ može se po Nyquistovu kriteriju zaključiti da je sistem stabilan.



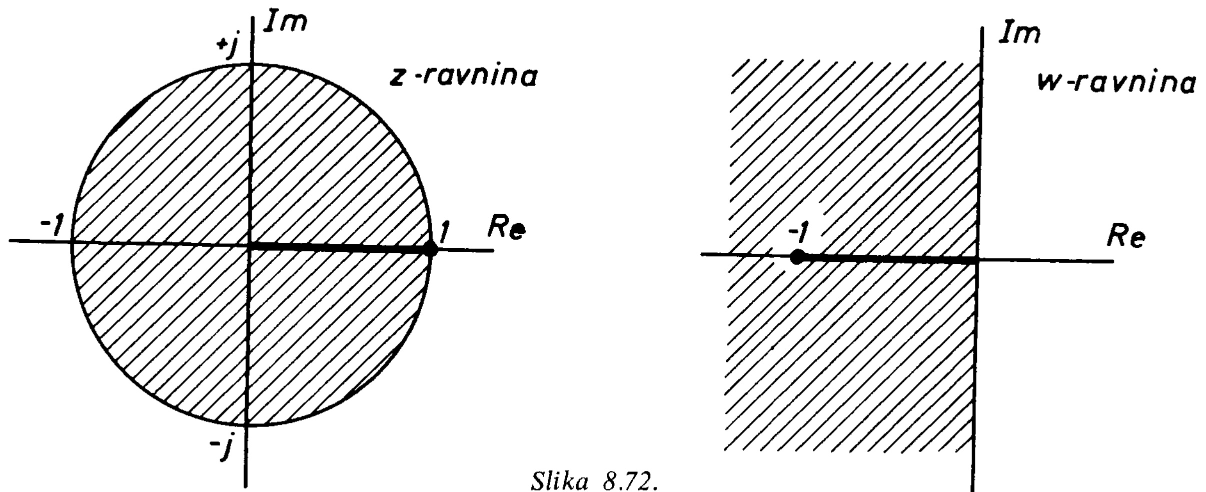
Slika 8.71.

Kriteriji stabilnosti bazirani na bilinearnoj transfromaciji

U slučajevima kada je prijenosna funkcija otvorenog sistema $G_0(z)$ složenijeg oblika, crtanje krivulje $G_0(z)$ je otežano. Metode koje su kod kontinuiranih sistema bile prikladne za analizu stabilnosti, kod diskretnih sistema nisu primjenjive, jer se Z-transformacijom lijeva poluravnina preslikala u jedinični krug, dok Z^{-1}-transformacija daje u lijevoj poluravnini pojaseve u kojima se zrcalno preslikavaju polovi iz jediničnog kruga (sl. 8.65). Karakteristična jednadžba zatvorenog kruga sistema $1+G^*(s)=0$ nije više polinom od s, već je transcendentna funkcija od s, te se npr. kriterij Routha ili Hurwitza ne može primijeniti.

Primjenom bilinearne transformacije jedinični krug preslikava se u lijevu poluravninu, a jedinična kružnica u ordinatnu os nove kompleksne ravnine w. Zakon po kojem se vrši preslikavanje jediničnog kruga u lijevu poluravninu dat je izrazom:

$$z=\frac{1+w}{1-w} \tag{8.227}$$



Slika 8.72.

Bilinearnom transformacijom polinom od z preslikao se u omjer polinoma od w istog reda. Osnovni pojas iz s-ravnine preslikao se u čitavu lijevu poluravninu kompleksne w-ravnine.

Kada je izvršena takva transformacija, sve metode za analizu kontinuiranih sistema, koje su bile primjenjive u s odnosno $G(s)$ ravnini, sada su primjenjive u w odnosno $G(w)$ ravnini. Na taj način algebarska metoda na primjer Hurwitza, umjesto karakteristične jednadžbe zatvorenog kruga $a(s)=0$, sada ispituje koeficijente karakteristične jednadžbe zatvorenog kruga $a(w)=0$.

Bilinearnom transformacijom naročito dolazi do izražaja mogućnost crtanja logaritamske amplitudno-fazne karakteristike otvorenog kruga i primjenjivost svih metoda analize sistema razvijenih za kontinuirane sisteme u Bodeovu prikazu. Ovdje namjerno nije korištena riječ frekvencijska karakteristika, budući da varijablu w možemo smatrati kompleksnom pseudofrekvencijom $w=Re+jv$, gdje je v relativna pseudofrekvencija. Logaritamsko-amplitudne i fazne karakteristike sistema crtaju se u ovisnosti o relativnoj pseudofrekvenciji v koja je bezdimenziona veličina. Ako se varijabla w izrazi preko z, iz izraza (8.227) dobit će se:

$$w=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \tag{8.228}$$

Uz $z^{-1}=e^{-j\omega T}$ proizlazi:

$$w=\frac{1-e^{-j\omega T}}{1+e^{-j\omega T}}=j\,\mathrm{tg}\frac{\omega T}{2} \tag{8.229}$$

Izraz (8.229) potvrđuje činjenicu da se imaginarna os ravnine s $(s=j\omega)$ preslikala u imaginarnu os ravnine w $\left(w=j\,\mathrm{tg}\frac{\omega T}{2}\right)$, ali s izmijenjenim mjerilom na imaginarnoj osi. Veza relativne pseudofrekvencije v i frekvencije ω dana je izrazom:

$$v=\mathrm{tg}\frac{\omega T}{2} \tag{8.230}$$

Promjenom realne frekvencije $0\le\omega\le\frac{\pi}{T}$, relativna pseudofrekvencija se mijenja u intervalu $0\le v\le\infty$.

U teoriji diskretnih sistema, često se umjesto bezdimenzione frekvencije v, koristi dimenziona apsolutna pseudofrekvencija ω^*.

$$\omega^*=\frac{2}{T}v=\frac{2}{T}\frac{w}{j}=\frac{2}{T}\,\mathrm{tg}\frac{\omega T}{2} \tag{8.231}$$

Postupak crtanja *amplitudno-fazne pseudofrekvencijske karakteristike* jest da se u izraz $G_0(z)$, umjesto z uvrsti $\frac{1+w}{1-w}$, te izraz sredi tako da su u njemu članovi $(1\pm T_i w)$ u brojniku i nazivniku. Zamjenom $w=jv$ moguće je analogno logaritamsko amplitudno-faznoj frekvencijskoj karakteristici kod kontinuiranih sistema crtati tu karakteristiku u ovisnosti o v ili ω^* u logaritamskom mjerilu. Podatke o dimenzijskim pseudofrekvencijama, moguće je dobiti iz izraza (8.231). Amplitudno i fazno osiguranje određuje se kao i kod kontinuiranih sistema. Ono što karakterizira diskretne sisteme jest da prijenosna funkcija otvorenog kruga $G_0(w)$ ima katkada neminimalno-fazni karakter, o čemu treba voditi računa pri crtanju logaritamske amplitudno-fazne karakteristike sistema.

Primjer 8.15.

Za sistem s prijenosnom funkcijom otvorenog kruga:

$$G_0(z)=\frac{0{,}39z\,(z-0{,}840)\,(z-0{,}486)}{(z-1)\,(z-0{,}905)\,(z-0{,}135)}$$

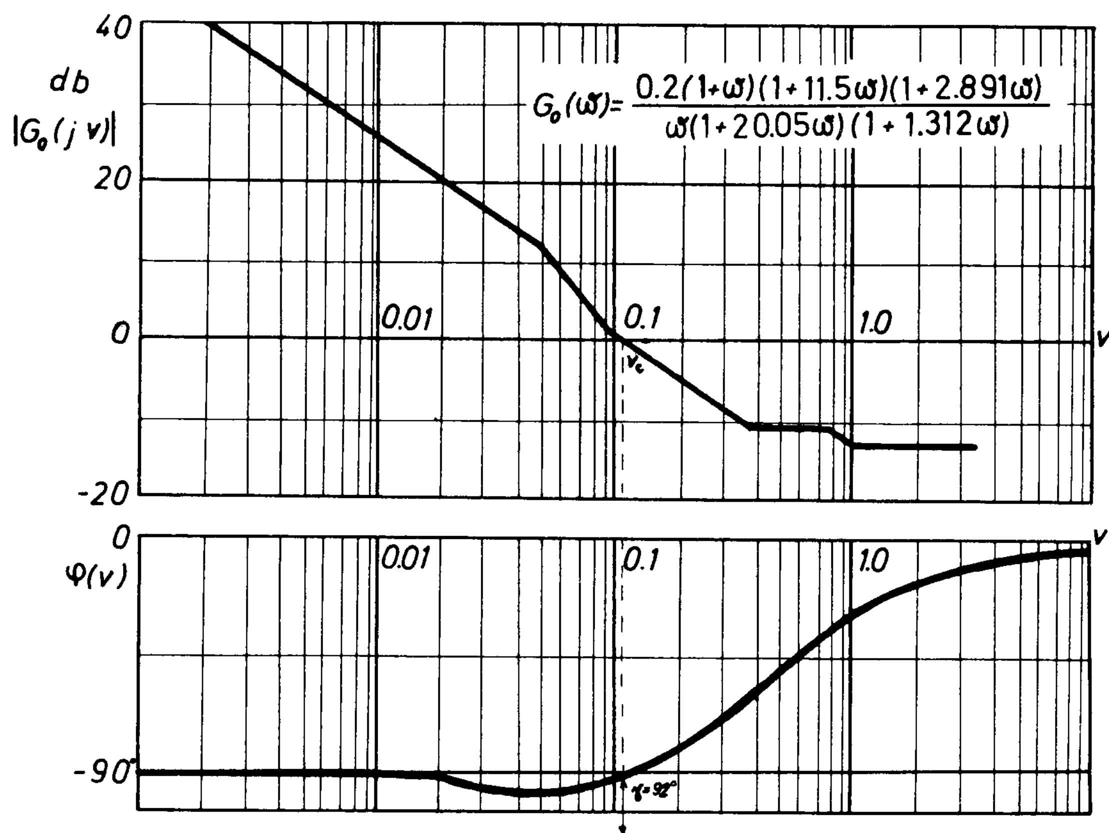
i periodom diskretiziranja $T=0{,}05$[s], potrebno je odrediti logaritamsko-amplitudnu i faznu karakteristiku.

Uvrštenjem $z=\frac{1+w}{1-w}$ u izraz $G_0(z)$ proizlazi:

$$G_0(w)=\frac{0{,}39\,\frac{1+w}{1-w}\left(\frac{1+w}{1-w}-0{,}840\right)\left(\frac{1+w}{1-w}-0{,}486\right)}{\left(\frac{1+w}{1-w}-1\right)\left(\frac{1+w}{1-w}-0{,}905\right)\left(\frac{1+w}{1-w}-0{,}135\right)}$$

$$G_0(w)=\frac{0{,}2\,(1+w)\,(1+11{,}5w)\,(1+2{,}891w)}{w\,(1+20{,}05w)\,(1+1{,}312w)}$$

Grafički prikazi karakteristika prikazani su na sl. 8.73.



Slika 8.73.

Amplitudno osiguranje sistema A.0. $=\infty$, dok je fazno osiguranje $\gamma \doteq 92°$, pa je sistem stabilan.

Prikladnost korištenja apsolutne pseudofrekvencije (ω^*) je u tome, što ona ima dimenziju $[s^{-1}]$, kao i realna frekvencija ω, i što se u određenom dijapazonu promjene frekvencije $\omega \left(\frac{\omega T}{2} \ll 1\right)$ praktički poklapa s njom. Za vrijednosti $\frac{\omega T}{2}$, za koje je:

$$\operatorname{tg}\frac{\omega T}{2} \approx \frac{\omega T}{2} \Rightarrow \omega^* \approx \omega \tag{8.232}$$

Pri promjeni realne frekvencije $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$, apsolutna pseudofrekvencija ω^* mijenja se u granicama $0 \leq \omega^* \leq \infty$.

Umjesto (8.227) i (8.229) prikladno je primjenjivati supstituciju:

$$z = \frac{1 + j\omega^* \frac{T}{2}}{1 - j\omega^* \frac{T}{2}} \tag{8.233}$$

Veza između prave kružne frekvencije ω i relativne pseudofrekvencije v proizlazi iz izraza (8.230) i glasi:

$$\omega = \frac{2}{T} \operatorname{arctg} v \tag{8.234}$$

Veza između prave frekvencije i apsolutne pseudofrekvencije dobivena je iz izraza (8.231) i glasi:

$$\omega = \frac{2}{T} \operatorname{arctg} \frac{\omega^* T}{2} \tag{8.235}$$

Primjer 8.16.

Potrebno je odrediti logaritamsku amplitudno-faznu pseudofrekvencijsku karakteristiku diskretnog sistema s fiksatorom nultog reda i prijenosnom funkcijom kontinuiranog dijela:

$$G(s) = \frac{K}{s(1+T_1 s)} \qquad K = 180[s^{-1}] \quad T_1 = 0{,}7[s]$$

Period diskretiziranja $T = 0{,}05[s]$.

Prijenosna funkcija otvorenog kruga glasi:

$$G_0(z) = \frac{z-1}{z} \quad Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

$$G_0(z) = \frac{b_1 z + b_2}{(z-1)(z-d)} \tag{8.236}$$

gdje su:

$$b_1 = KT\left(1 - \frac{T_1}{T} + \frac{T_1}{T} d\right)$$

$$b = KT\left(\frac{T_1}{T} - \frac{T_1}{T} d - d\right)$$

$$d = e^{-\frac{T}{T_1}}$$

Uvrštenjem izraza (8.233) u izraz (8.236) i sređenjem dobit će se:

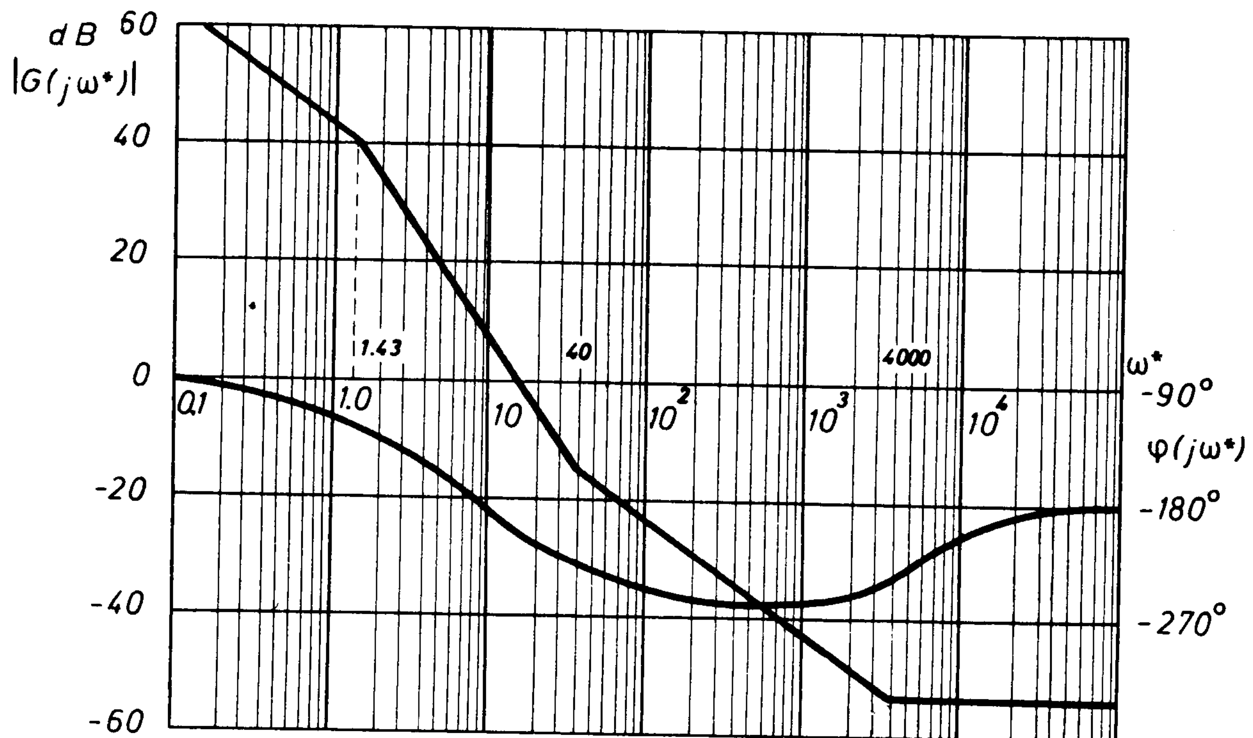
$$G_0(j\omega^*) = K \frac{\left(1 - j\omega^* \frac{T}{2}\right)\left[1 + j\omega^* \left(\frac{T}{2} T^* - T_1\right)\right]}{j\omega^* \left(1 + j\omega^* \frac{T}{2} T^*\right)} \tag{8.237}$$

gdje je:

$$T^* = \frac{1+d}{1-d} = \operatorname{cth} \frac{T}{2T_1} > 1 \tag{8.238}$$

$$G_0(j\omega^*) = 180 \cdot \frac{(1 - j\omega^* 0{,}025)(1 + j\omega^* \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-4})}{j\omega^* (1 + j\omega^* \cdot 0{,}7)} \tag{8.239}$$

Na sl. 8.74. prikazana je logaritamska amplitudno-fazna karakteristika slijednog sistema (8.239).



Slika 8.74.

Kao što se vidi iz primjera, karakteristično svojstvo logaritamske amplitudno-fazne karakteristike diskretnog sistema jest pojava člana s neminimalno-faznom karakteristikom $\left(1-j\omega^*\frac{T}{2}\right)$, a također i ponašanje amplitudne karakteristike na visokim frekvencijama (nagib 0 dB/dek). Konstantan nagib (0 dB/dek) amplitudne karakteristike na visokim frekvencijama može se objasniti time što u većini slučajeva, kad $\omega^* \rightarrow \infty$ $\left(\text{tj. } \omega \rightarrow \frac{\pi}{T}\right)$, frekvencijska karakteristika ne teži nuli (kao kod kontinuiranih sistema), već nekoj određenoj vrijednosti.

Navedene metode za analizu stabilnosti diskretnog sistema najčešće se koriste u inženjerskoj praksi. Svaka od tih metoda ima svoje prednosti i mane.

Metoda Schur-Cohna daje odgovor na pitanje da li se polovi prijenosne funkcije zatvorenog kruga (ili korijeni karakteristične jednadžbe zatvorenog kruga) nalaze izvan ili na jediničnoj kružnici. Ta metoda međutim ne daje odgovor koliko blizu je sistem nestabilnosti, tj. kolika je relativna stabilnost sistema, što je od bitnog značaja pri projektiranju diskretnih sistema. Ovom metodom moguće je odrediti vrijednosti koje mogu imati parametri sistema da bi sistem bio stabilan. Ona se, međutim, za analizu stabilnosti složenijih sistema ne koristi, zbog velikog broja testova koje treba izvršiti na determinantama $|\Delta_k|$.

Nyquistov kriterij prikladan je za analizu stabilnosti kada je poznata prijenosna funkcija otvorenog diskretnog sistema. S promjenom parametra ili perioda diskretiziranja sistema potrebno je crtati novu krivulju. Taj kriterij daje odgovor o relativnoj stabilnosti sistema. U slučajevima složenijih sistema znatno se otežava crtanje krivulje $G_0(z)$. Pri projektiranju i analizi diskretnih sistema, primjena ovog kriterija dolazi u obzir ako se radi u z-području.

Bilinearna transformacija omogućuje da se analiza diskretnih sistema pojednostavni. Ona omogućava da se primijene kriteriji Routha i Hurwitza, a također da se primijeni Bodeov prikaz karakteristika sistema. Na taj način omogućena je primjena velikog broja metoda za projektiranje kontinuiranih linearnih sistema i na diskretne linearne sisteme. Određivanje logaritamske amplitudne i fazne karakteristike $G_0(jv)$ ili $G_0(j\omega^*)$ iz prijenosne funkcije $G_0(z)$ za sisteme nižeg reda (do trećeg) nije povezano s poteškoćama kao u slučajevima složenijih procesa, kada se znatno otežava primjena ovog postupka za analizu sistema. Zato su razvijene približne metode za crtanje logaritamske amplitudne i fazne karakteristike L [2].

Približna metoda crtanja logaritamske amplitudne i fazne pseudofrekvencijske karakteristike

Za približno crtanje (LAFPK) – logaritamske amplitudne i fazne pseudofrekvencijske karakteristike razvijene su metode L [2,46] koje olakšavaju crtanje LAFP karakteristika za sisteme višeg reda ($n \geq 3$). Jedna od metoda, L [2], dozvoljava crtanje približne karakteristike ako su zadovoljena sljedeća tri uvjeta:

1. $$\omega_c < \frac{2}{T} \tag{8.240}$$

$\omega_c [s^{-1}]$ ... frekvencija presjeka kontinuiranog dijela sistema
$T[s]$ ... period diskretiziranja.

Nejednadžba (8.240) osniva se na impulsnom teoremu i za većinu sistema je ispunjena.

2. prijenosna funkcija kontinuiranog dijela sistema treba imati oblik:

$$G(s) = \frac{K(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)\dots(1+\tau_m s)}{s^r (1+T_1 s)(1+T_2 s)\dots(1+T_q s)} \tag{8.241}$$

gdje su: $\tau_v > \frac{1}{\omega_c}$, $v = 1, 2, \dots, m$

$$T_1 > T_2 > \dots > T_p > \frac{1}{\omega_c} > \frac{T}{2} > T_{p+1} > \dots > T_q$$

r ... astatizam kontinuiranog dijela sistema ($r = 0, 1, 2$).

Navedeni uvjeti postavljaju da vremenske konstante $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ iz brojnika $G(s)$ moraju biti veće od $\frac{1}{\omega_c}$, dok se „p" vremenskih konstanti iz nazivnika $G(s)$ treba nalaziti nalijevo od frekvencije presjeka ω_c, a $q-p$ vremenskih konstanti nadesno od ω_c i $\frac{2}{T}$.

3. Presjek LAK kroz os 0[dB] mora biti pod nagibom -20 dB/dek ili -40 dB/dek.

Ako su zadovoljena navedena tri uvjeta tada se logaritamska amplitudna fazna karakteristika može crtati na sljedeći način:

Frekvencijsko područje dijeli se na niskofrekventni dio ($\omega < \omega_c$) i visokofrekventni dio ($\omega > \omega_c$).

Za područje niskih frekvencija prijenosna funkcija kontinuiranog dijela $G(s)$ glasi (uzet je sistem s astatizmom drugog reda, jer se veći red astatizma rjeđe susreće):

$$G(s) \approx G'(s) = \frac{K(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)\dots(1+\tau_m s)}{s^2(1+T_1 s)(1+T_2 s)\dots(1+T_p s)} =$$

$$= \frac{K}{s^2} + \frac{KT_0}{s} + K\sum_{i=1}^{s} \frac{N_i}{1+T_i s} \tag{8.242}$$

gdje je:

$$T_0 = \sum_{\upsilon=1}^{m} \tau_\upsilon - \sum_{i=1}^{p} T_i$$

$$G'(z) = \frac{z-1}{z} \dot{Z}\left\{\frac{G'(s)}{s}\right\} = \frac{KT^2}{2} \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2} + \frac{KTT_0}{z-1} +$$

$$+K\sum_{i=1}^{p} N_i \frac{1-d_i}{z-d_i} \tag{8.243}$$

gdje je: $d_i = e^{-T/T_i}$.

Uvrštenjem (8.233) u (8.243) proizlazi za niskofrekventni dio:

$$G'(j\omega^*) = \left(1 - j\omega^* \frac{T}{2}\right)\left[\frac{K}{(j\omega^*)^2} + \frac{KT_0}{j\omega^*} + K\sum_{i=1}^{p} \frac{N_i}{1 + j\omega^* \frac{T}{2} \operatorname{cth} \frac{T}{2T_i}}\right] \tag{8.244}$$

Budući da su za niskofrekventni dio sve konstante $T_i > \frac{1}{\omega_c}$ i prema tome $T_i > \frac{T}{2}$, to se s dovoljnom točnošću može reći da je

$$\operatorname{cth} \frac{T}{2T_i} \approx 2\frac{T_i}{T}$$

pa je:

$$G'(j\omega^*) \doteq \left(1 - j\omega^* \frac{T}{2}\right)\left[\frac{K}{(j\omega^*)^2} + \frac{KT_0}{j\omega^*} + K\sum_{i=1}^{p} \frac{N_i}{1 + j\omega^* T_i}\right] \tag{8.245}$$

Usporedbom izraza (8.242) i (8.245) vidi se da je u niskofrekventnom dijelu karakteristiku $G(j\omega^*)$ moguće dobiti iz prijenosne funkcije $G(s)$ zamjenom $s = j\omega^*$ i množenjem dobivenog izraza s $\left(1 - j\omega^* \frac{T}{2}\right)$. Apsolutna pseudofrekvencija ω^* praktički se poklapa s pravom frekvencijom ω, a član $\left(1 - j\omega^* \frac{T}{2}\right)$ može se i zanemariti budući da je $\frac{2}{T} > \omega_c$. Na taj način, u oblasti niskih frekvencija, karakteristika $G(j\omega^*)$ poklapa se s $G(j\omega)$ kontinuiranog sistema.

17 *

Za područje visokih frekvencija prijenosna funkcija kontinuiranog dijela glasi:

a) ako LAK kontinuiranog dijela sistema $G(s)$ siječe 0 dB os pod nagibom -20 dB/dek:

$$G''(s)=\frac{\omega_c}{s(1+T_{p+1}s)\dots(1+T_q s)}=$$

$$=\frac{\omega_c}{s}+\omega_c\sum_{i=p+1}^{q}\frac{N_i}{1+T_i s} \tag{8.246}$$

b) ako LAK kontinuiranog dijela sistema $G(s)$ siječe 0 dB os pod nagibom -40 dB/dek:

$$G''(s)=\frac{\omega_c^2}{s^2(1+T_{p+1}s)\dots(1+T_q s)}=$$

$$=\frac{\omega_c^2}{s^2}-\omega_c^2\sum_{i=p+1}^{q}T_i\cdot\frac{1}{s}+\omega_c^2\sum_{i=p+1}^{q}\frac{N_i}{1+T_i s} \tag{8.247}$$

Pripadne karakteristike će glasiti:

Ad a):

$$G''(j\omega^*)=\left(1-j\omega^*\frac{T}{2}\right)\left[\frac{\omega_c}{j\omega^*}+\omega_c\sum_{i=p+1}^{q}\frac{N_i}{1+j\omega^*\frac{T}{2}\operatorname{cth}\frac{T}{2T_i}}\right] \tag{8.248}$$

odnosno

Ad b):

$$G''(j\omega^*)=\left(1-j\omega^*\frac{T}{2}\right)\left[\frac{\omega_c^2}{(j\omega^*)^2}-\frac{\omega_c^2\cdot\sum_{i=p+1}^{q}T_i}{j\omega^*}+\right.$$

$$\left.+\omega_c^2\sum_{i=p+1}^{q}\frac{N_i}{1+j\omega^*\frac{T}{2}\operatorname{cth}\frac{T}{2T_i}}\right] \tag{8.249}$$

Kako je na visokofrekvencijskom području $T_i<\frac{T}{2}$, tada proizlazi:

$$\operatorname{cth}\frac{T}{2T_i}\approx 1 \tag{8.250}$$

Izraz (8.248) tada ima oblik:

$$G''(j\omega^*)=\left(1-j\omega^*\frac{T}{2}\right)\left[\frac{\omega_c}{j\omega^*}+\omega_c\sum_{i=p+1}^{q}N_i\cdot\frac{1}{1+j\omega^*\frac{T}{2}}\right]=\frac{\omega_c\left(1-j\omega^*\frac{T}{2}\right)\left[1+j\omega^*\left(\frac{T}{2}-T_{e_1}\right)\right]}{j\omega^*\left(1+j\omega^*\frac{T}{2}\right)} \tag{8.251}$$

gdje je: $T_{e_1}=\sum_{i=p+1}^{q}T_i$ ... ekvivalentna vremenska konstanta.

Za izraz (8.249) proizlazi:

$$G''(j\omega^*)=\frac{\omega_c^2\left(1-j\omega^*\frac{T}{2}\right)\left[1+j\omega^*\left(\frac{T}{2}-T_{e_1}\right)-(j\omega^*)^2\left(\frac{T}{2}\cdot T_{e_1}-T_{e_2}^2\right)\right]}{(j\omega^*)^2\left(1+j\omega^*\frac{T}{2}\right)} \tag{8.252}$$

gdje su: $T_{e_1}=\sum_{i=p+1}^{q} T_i$

$$T_{e_2}^2=T_{p+1}^2+T_{p+2}^2+\ldots+T_q^2+T_{p+1}\cdot T_{p+2}+\ldots+T_{p+1}\cdot T_q+$$
$$+T_{p+2}\cdot T_{p+3}+\ldots+T_{q-1}\cdot T_q$$

Budući da se početak LAFP karakteristike na visokofrekventnom dijelu mora poklapati s krajem LAFPK na niskofrekventnom dijelu, u općoj točci $\omega^*\approx\omega_c$, tada se konačni izrazi za približnu LAFPK otvorenog sistema mogu dobiti kao:

Za prolaz LAK kontinuiranog dijela sistema, kroz os 0 dB s nagibom od −20 dB/dekadi:

$$G(j\omega^*)=\frac{K(1+j\omega^*\tau_1)(1+j\omega^*\tau_2)\ldots(1+j\omega^*\tau_m)\left(1-j\omega^*\frac{T}{2}\right)\left[1+j\omega^*\left(\frac{T}{2}-T_{e_1}\right)\right]}{(j\omega^*)^2(1+j\omega^*T_1)\ldots(1+j\omega^*T_p)\left(1+j\omega^*\frac{T}{2}\right)} \tag{8.253}$$

Za nagib od −40 dB/dekadi kroz 0 dB os, proizlazi:

$$G(j\omega^*)=\frac{K(1+j\omega^*\tau_1)\ldots(1+j\omega^*\tau_m)\left(1-j\omega^*\frac{T}{2}\right)\left[1+j\omega^*\left(\frac{T}{2}-T_{e_1}\right)-(j\omega^*)^2\left(\frac{T}{2}T_{e_1}-T_{e_2}^2\right)\right]}{(j\omega^*)^2(1+j\omega^*T_1)\ldots(1+j\omega^*T_p)\left(1+j\omega^*\frac{T}{2}\right)} \tag{8.254}$$

Pomoću izraza (8.253) odnosno (8.254) moguće je približno crtati LAFPK diskretnog sistema, ako je poznata prijenosna funkcija $G(s)$ kontinuiranog dijela sistema i uz pretpostavku da u sistemu postoji element za formiranje – fiksator nultog reda.

Primjer 8.17.

Potrebno je odrediti LAFP karakteristiku diskretnog slijednog sistema, koji ima prijenosnu funkciju kontinuiranog dijela:

$$G(s)=\frac{K}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

$K=10$

$T_1=2[\mathrm{s}]$

$T_2=0{,}2[\mathrm{s}]$

Period diskretiziranja $T=0{,}5[\mathrm{s}]$.

Frekvencija presjeka kontinuiranog dijela sistema može se odrediti prema izrazu L [46].

$$\omega_c = \sqrt{\frac{K}{T_1}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = 2{,}24[s^{-1}]$$

Uvjet $\omega_c < \frac{2}{T}$ je ispunjen, jer je $2{,}24 < \frac{2}{T} = 4$.

Osim toga, budući da LAK kontinuiranog dijela sistema siječe os 0 dB s nagibom −40 dB/dek, tada se LAFPK $G(j\omega^*)$ može odrediti pomoću izraza (8.254).

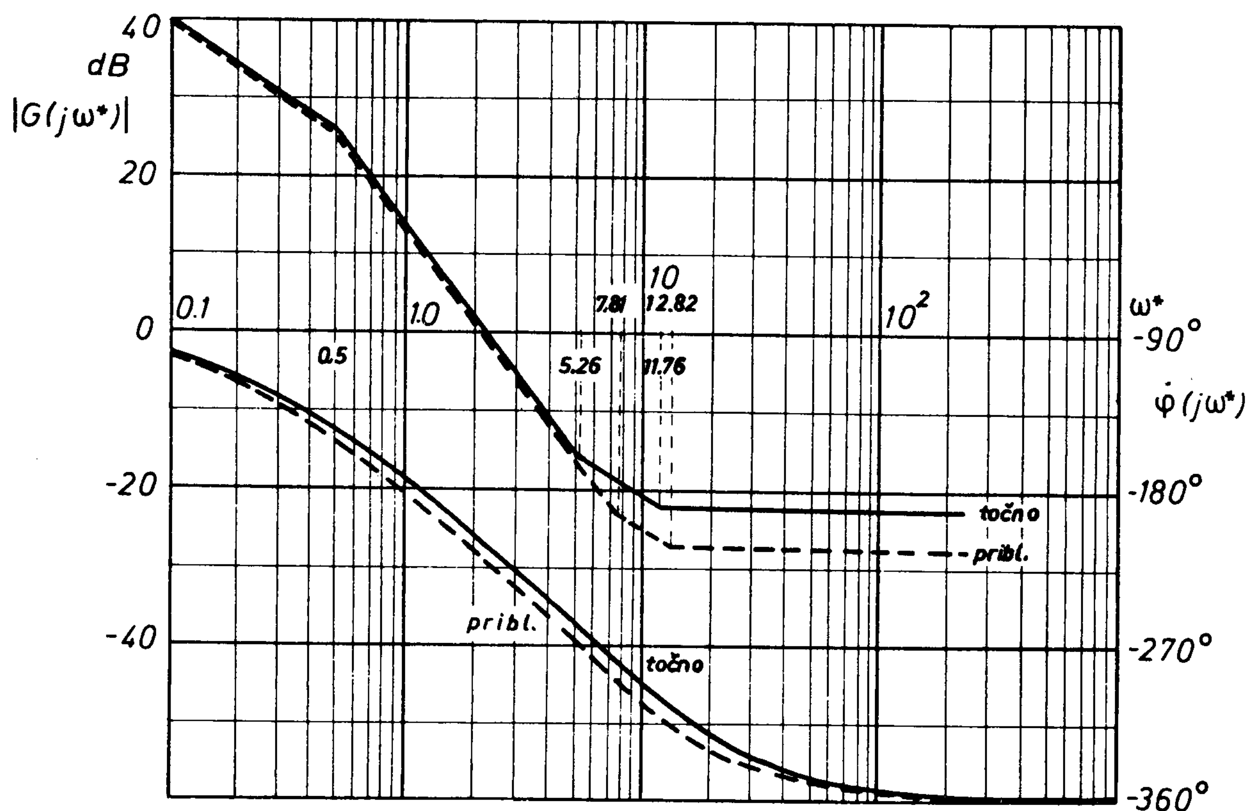
$$G(j\omega^*) = \frac{K\left(1 - j\omega^* \frac{T}{2}\right)\left[1 + j\omega^*\left(\frac{T}{2} - T_{e_1}\right) - (j\omega^*)^2\left(\frac{T}{2}T_{e_1} - T_{e_2}^2\right)\right]}{(j\omega^*)(1 + j\omega^* T_1)\left(1 + j\omega^* \frac{T}{2}\right)} \qquad (8.255)$$

$$T_{e_1} = T_2 = 0{,}2[s]; \qquad T_{e_2}^2 = T_2^2 = 0{,}04[s^2]$$

$$\frac{T}{2} - T_{e_1} = 0{,}05[s]; \qquad \frac{T}{2} \cdot T_{e_1} - T_{e_2}^2 = 0{,}01[s^2]$$

Iz izraza (8.255) proizlazi:

$$G(j\omega^*) = \frac{10(1 - j\omega^* 0{,}25)(1 + j\omega^* 0{,}128)(1 - j\omega^* 0{,}078)}{j\omega^*(1 + j\omega^* \cdot 2)(1 + j\omega^* \cdot 0{,}25)} \qquad (8.256)$$



Slika 8.75.

Karakteristika $G(j\omega^*)$ dobivena točnim postupkom, tj. pomoću prijenosne funkcije $G(z, \mu)$ i zamjenom $z = \dfrac{1 + j\omega^* \frac{T}{2}}{1 - j\omega^* \frac{T}{2}}$ ima oblik:

$$G(j\omega^*) = \frac{10\,(1 - j\omega^* \cdot 0{,}25)\,(1 + j\omega^* \cdot 0{,}19)\,(1 - j\omega^* \cdot 0{,}085)}{j\omega^*\,(1 + j\omega^* \cdot 2)\,(1 + j\omega^* \cdot 0{,}25)} \tag{8.257}$$

Kao što se vidi iz LAFPK dobivenih točnim i približnim postupkom (sl. 8.75), približan postupak daje zadovoljavajuću točnost, dovoljnu za rješavanje praktičkih problema.

Primjer 8.18.

Za primjer 8.16. potrebno je približno odrediti LAFP karakteristiku:

$$G(s) = \frac{K}{s\,(1 + T_1 s)} \qquad K = 180[s^{-1}] \quad T_1 = 0{,}7[s]$$

Period diskretiziranja $T = 0{,}05[s]$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{K}{T_1}} = \sqrt{\frac{180}{0{,}7}} = 16{,}04[s^{-1}]$$

Uvjet $\omega_c < \frac{2}{T}$ je zadovoljen. LAK nekorigiranog dijela sistema prolazi kroz os 0 dB s nagibom -40 dB/dekadi, pa je:

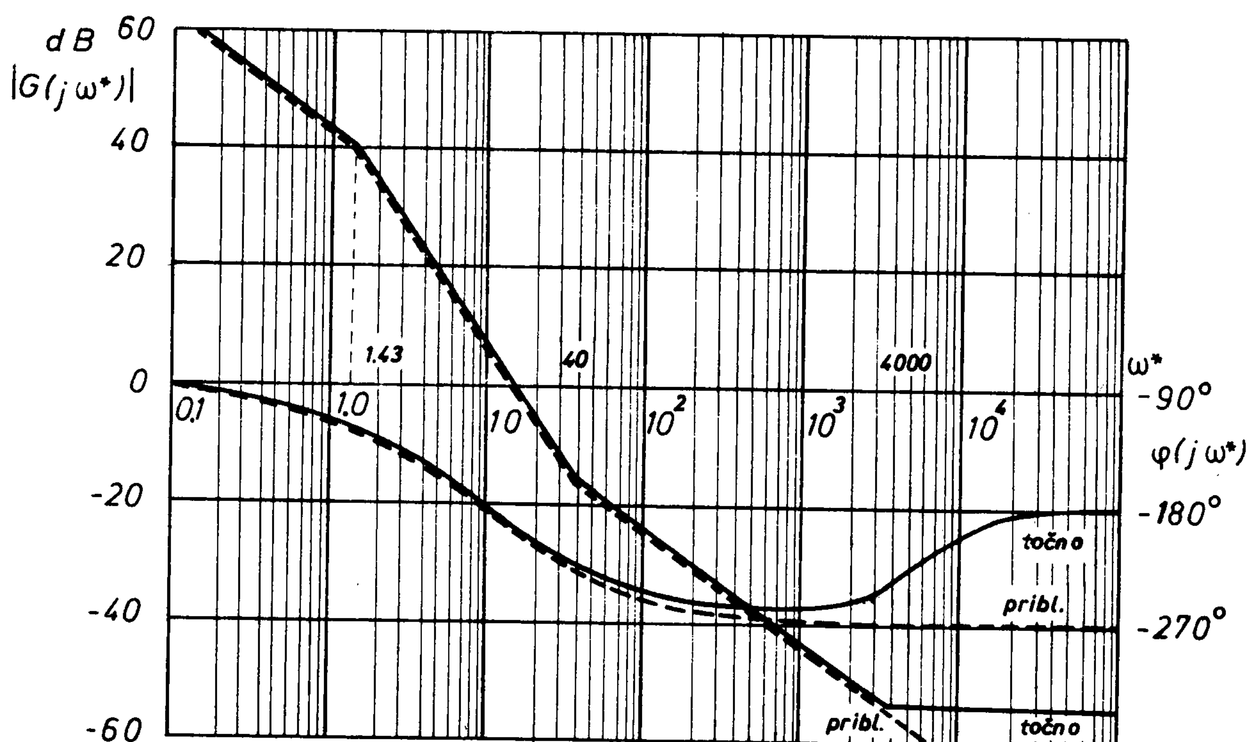
$$G(j\omega^*) = \frac{K\left(1 - j\omega^* \frac{T}{2}\right)\left[1 + j\omega^*\left(\frac{T}{2} - T_{e_1}\right) - (j\omega^*)^2\left(\frac{T}{2} T_{e_1} - T_{e_2}^2\right)\right]}{(j\omega^*)\,(1 + j\omega^* T_1)\left(1 + j\omega^* \frac{T}{2}\right)} \tag{8.258}$$

kako je $T_{e_1} = 0$ i $T_{e_2}^2 = 0$

to proizlazi da je izraz (8.258) dan:

$$G(j\omega^*) = \frac{180\,(1 - j\omega^* 0{,}025)}{j\omega^*\,(1 + j\omega^* \cdot 0{,}7)} \tag{8.259}$$

Ako se usporedi izraz (8.259) za približno crtanje LAFP karakteristike s izrazom (8.239) za točno crtanje LAFP karakteristike, uočava se sličnost, osim na visokim frekvencijama. Na sl. 8.76. prikazana je približna i točna LAFPK.



Slika 8.76.

8.12. Analiza kvalitete linearnih diskretnih sistema

Metode za analizu stabilnosti linearnih diskretnih sistema automatskog upravljanja izložene su u prethodnom poglavlju. Za kompletnu analizu diskretnih sistema, osim analize stabilnosti, potrebno je izvršiti analizu kvalitete te analizu točnosti linearnih diskretnih sistema. Analiza kvalitete u osnovi je praćenje ponašanja sistema u prijelaznom režimu i određivanje pokazatelja kvalitete na osnovi prijelazne karakteristike. Pokazatelji kvalitete diskretnih sistema analogni su pokazateljima kvalitete kontinuiranih sistema. Za njihovo određivanje potrebno je poznavati prijelaznu karakteristiku diskretnog sistema. Prijenosna funkcija zatvorenog kruga opisuje ponašanje linearnog diskretnog sistema i na osnovi nje moguće je odrediti prijelaznu karakteristiku sistema.

$$G_z(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \tag{8.260}$$

$$Y(z) = G_z(z) \cdot U(z) \tag{8.261}$$

Za strukturnu shemu prema sl. 8.50. izlazni signal glasi:

$$Y(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)\,G_2(z)} \cdot U(z) \tag{8.262}$$

$$Y(z, m) = \frac{G_1(z, m)}{1 + G_1(z)\,G_2(z)} \cdot U(z) \tag{8.263}$$

dok za sl. 8.48. proizlazi:

$$Y(z)=\frac{G_1(z)}{1+G_1G_2(z)}\cdot U(z) \qquad (8.264)$$

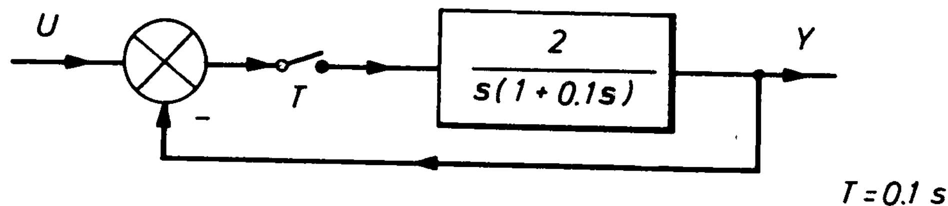
$$Y(z,m)=\frac{G_1(z,m)}{1+G_1G_2(z)}\cdot U(z) \qquad (8.265)$$

Prijelaznu karakteristiku sistema moguće je dobiti inverznom Z-transformacijom funkcije $Y(z)$ poznatim postupcima – jednadžbe (8.101) i (8.97), rastavljanjem funkcije $\frac{Y(z)}{z}$ na parcijalne razlomke i korištenjem gotovih tabela ili rekurzivnim postupkom, koji je najprikladniji ako se prijelazna karakteristika računa pomoću digitalnog računala.

Upotrebom modificirane Z-transformacije dobit će se ponašanje odziva između periode diskretiziranja, što je za određivanje pokazatelja kvalitete od bitnog značenja.

Primjer 8.19.

Za sistem zadan strukturnom shemom na sl. 8.77. potrebno je odrediti pokazatelje kvalitete prijelaznog procesa; $T=0{,}1[s]$.



Slika 8.77.

$$G(s)=\frac{2}{s(1+0{,}1s)} \qquad (8.266)$$

$$Z\{G(s)\}=G(z)=\frac{1{,}264z}{z^2-1{,}368z+0{,}368} \qquad (8.267)$$

$$G_z(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{1{,}264z}{z^2-0{,}104z+0{,}368} \qquad (8.268)$$

$$(z^2-0{,}104\,z+0{,}368)\;Y(z)=1{,}264\,z\cdot U(z)/:z^2$$

$$(1-0{,}104\,z^{-1}+0{,}368\,z^{-2})\;Y(z)=1{,}264\,z^{-1}\cdot U(z) \qquad (8.269)$$

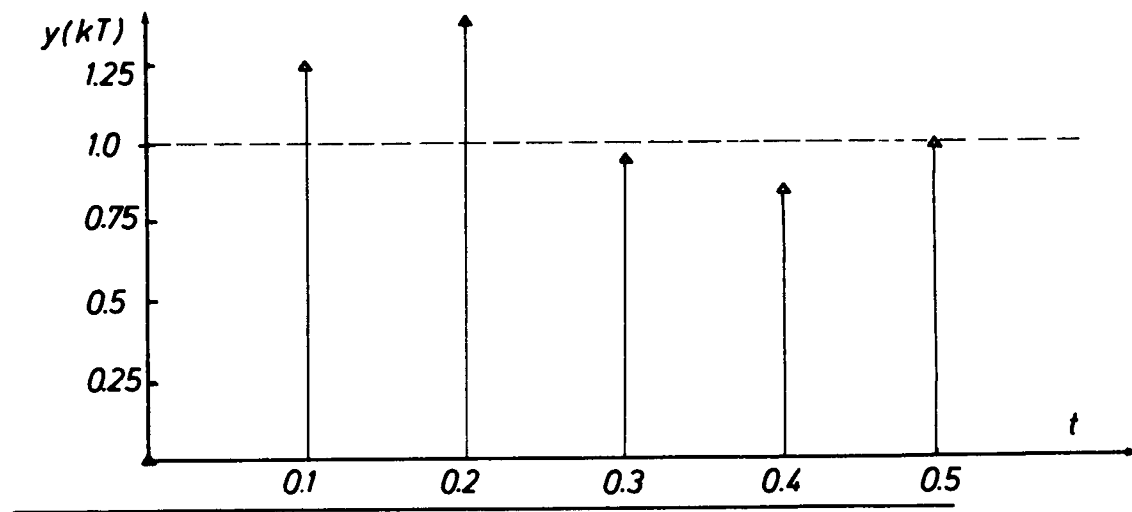
$$y(kT)=1{,}264\,u[(k-1)\,T]+0{,}104\,y[(k-1)\,T]-0{,}368\,y[(k-2)\,T] \qquad (8.270)$$

Navedena jednadžba predstavlja rekurzivnu jednadžbu za računanje izlaznog signala sistema uz pretpostavku da su početni uvjeti nule. Ako je $u(t)=S(t)$, dobit će se prijelazna karakteristika sistema (tablica 8.5. i sl. 8.78).

Tablica 8.

k	0	1	2	3	4	5	6
$1{,}264 \cdot u(k-1)$	$1{,}264 \cdot 0$	$1{,}264 \cdot 1$	$1{,}264 \cdot 1$	$1{,}264 \cdot 1$	$1{,}264 \cdot 1$	$1{,}264 \cdot 1$	$1{,}264 \cdot 1$
$0{,}104 \cdot y(k-1)$	$0{,}104 \cdot 0$	$0{,}104 \cdot 0$	$0{,}104 \cdot 1{,}264$	$0{,}104 \cdot 1{,}395$	$0{,}104 \cdot 0{,}944$	$0{,}104 \cdot 0{,}849$	$0{,}104 \cdot 1{,}002$
$-0{,}368 \cdot y(k-2)$	$-0{,}368 \cdot 0$	$-0{,}368 \cdot 0$	$-0{,}368 \cdot 0$	$-0{,}368 \cdot 1{,}264$	$-0{,}368 \cdot 1{,}395$	$-0{,}368 \cdot 0{,}944$	$-0{,}368 \cdot 0{,}849$
$y(k)$	0	1,264	1,395	0,944	0,849	1,005	1,065

k	7	8	9	10
$1{,}264 \cdot u(k-1)$	$1{,}264 \cdot 1$	$1{,}264 \cdot 1$	$1{,}264 \cdot 1$	$1{,}264 \cdot 1$
$0{,}104 \cdot y(k-1)$	$0{,}104 \cdot 1{,}056$	$0{,}104 \cdot 1{,}004$	$0{,}104 \cdot 0{,}980$	$0{,}104 \cdot 0{,}996$
$-0{,}368 \cdot y(k-2)$	$-0{,}368 \cdot 1{,}005$	$-0{,}368 \cdot 1{,}056$	$-0{,}368 \cdot 1{,}004$	$-0{,}368 \cdot 0.98$
$y(k)$	1,004	0,980	0,996	1,007



Slika 8.78.

Korištenjem modificirane Z-transformacije moguće je dobiti točnije pokazatelje kvalitete. Za sistem na sl. 8.77. proizlazi:

$$G(z, m) = \frac{2(1-e^{-m})z + (2e^{-m} - 0{,}736)}{z^2 - 1{,}368z + 0{,}368} \tag{8.271}$$

odnosno:

$$Y(z, m) = \frac{G(z, m)}{1 + G(z)} \cdot U(z) \tag{8.272}$$

$$Y(z, m) = \frac{2(1-e^{-m})z + (2e^{-m} - 0{,}736)}{z^2 - 0{,}104z + 0{,}368} \cdot U(z) \tag{8.273}$$

$$(z^2 - 0{,}104z + 0{,}368) \cdot Y(z, m) = 2(1-e^{-m})z \cdot U(z) + (2e^{-m} - 0{,}736)\,U(z) \Big| :z^2$$

$$(1 - 0{,}104z^{-1} + 0{,}368) \cdot Y(z, m) = 2(1-e^{-m}) \cdot z^{-1}\,U(z) + (2e^{-m} - 0{,}736)\,z^{-2} \cdot U(z)$$

$$y(k, m) = 2(1-e^{-m}) \cdot u(k-1) + (2e^{-m} - 0{,}736) \cdot u(k-2) + 0{,}104\,y(k-1, m) - 0{,}368 \cdot y(k-1, m) \tag{8.274}$$

Za $m=1$ rekurzivna jednadžba (8.274) jednaka je jednadžbi (8.270). Za taj slučaj vrijedi tablica 8.5. Daljnji postupak odvija se na taj način da se za svaki fiksirani m izračuna po jednadžbi (8.274) odziv sistema na jediničnu skokovitu pobudu.

Tako, na primjer, za $m=0{,}75$ vrijedi tablica 8.6, za $m=0{,}5$ tablica 8.7, za $m=0{,}25$ tablica 8.8. itd.

$m=0{,}75$
Tablica 8.6.

k	0	1	2	3	4	5	6
$y(k, 0{,}75)$	0	1,056	1,372	1,019	0,867	0,983	1,04

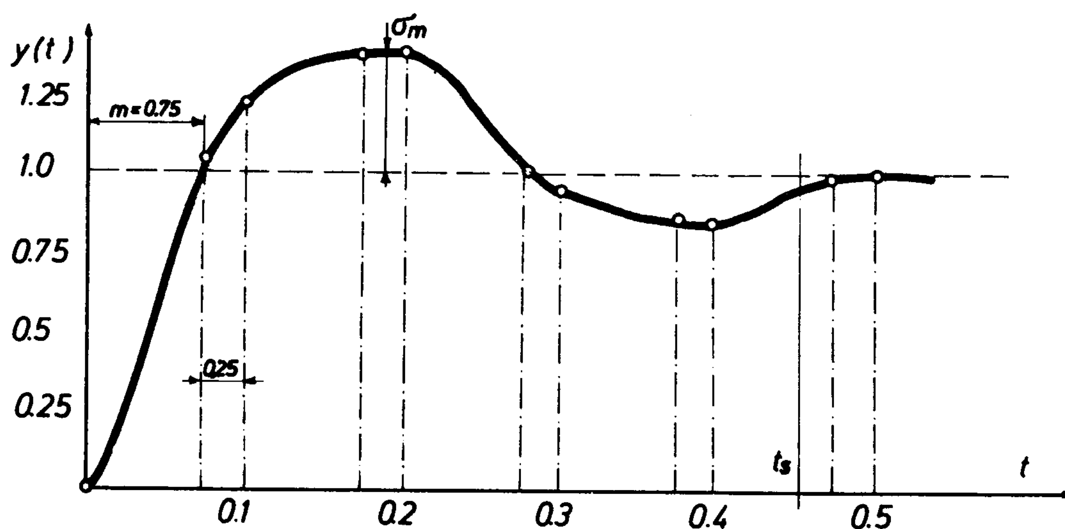
$m=0{,}5$
Tablica 8.7.

k	0	1	2	3	4	5	6
$y(k, 0{,}5)$	0	0,786	1,346	1,115	0,887	0,949	1,034

$m=0{,}25$
Tablica 8.8.

k	0	1	2	3	4	5	6
$y(k, 0{,}25)$	0	0,442	1,310	1,238	0,913	0,907	1,022

Na sl. 8.79. prikazana je prijelazna karakteristika za sistem prema sl. 8.77.



Slika 8.79.

Kao što se vidi na sl. 8.79. prijelazna karakteristika dobivena na ovaj način daje po volji točne rezultate.

8.13. Analiza točnosti linearnih diskretnih sistema

Točnost je jedan od glavnih pokazatelja za ocjenu kvalitete sistema. Ona je mjera kojom se određuje sposobnost sistema da obradi informaciju, odstrani nepoželjne smetnje koje se pojavljuju u sistemu bilo zbog vanjskih ili unutrašnjih uzroka, te da što bolje prati vodeću veličinu i da ima što manje regulacijsko odstupanje. Kao i kod kontinuiranih sistema, kada se točnost određivala pomoću parametara sistema, odnosno koeficijenata regulacijskog odstupanja, tako se i kod diskretnih sistema analiza točnosti temelji na određivanju koeficijenata regulacijskog odstupanja uz regularne ulazne signale $u(t)$. Pri tome se dinamička točnost sistema može određivati na dva načina.

Prvi način jest da se po analogiji s kontinuiranim sistemima regulacijsko odstupanje, kao funkcija vremena, prikaže beskonačnim redom *po derivacijama* ulaznog signala uzetim u trenucima diskretiziranja $t=kT$.

$$\varepsilon_0(kT)=C_0 u(kT)+C_1\cdot u'(kT)+\frac{C_2}{2!}u''(kT)+\frac{C_3}{3!}u'''(kT)+\ldots \qquad (8.275)$$

Regulacijsko odstupanje traži se u stacionarnom stanju (indeks 0), što također znači da su signal $u(kT)$, te derivacije ulaznog signala $u'(kT)$, $u''(kT)$,... također izrazi u stacionarnom stanju. Indeks 0 u daljnjem se tekstu zbog kratkoće ispušta. Primjenom Laplaceove transformacije na izraz (8.275) dobit će se:

$$E^*(s)=\left[C_0+C_1 s+\frac{C_2}{2!}s^2+\frac{C_3}{3!}s^3+\ldots\right]\cdot U^*(s) \qquad (8.276)$$

Izraz u uglatoj zagradi predstavlja razvoj prijenosne funkcije s obzirom na regulacijsko *odstupanje* $G_e^*(s)$, u Taylorov red po rastućim potencijama varijable s. Koeficijenti regulacijskog odstupanja mogu se dobiti kao:

$$C_i=\left.\frac{d^{(i)}G_e^*(s)}{ds^i}\right|_{s=0}=G_e^{(i)*}(0), \qquad i=1,2,3,\ldots \qquad (8.277)$$

Koeficijenti se prema tome određuju iz razvoja $G_e^*(s)$ u Taylorov red u okolišu ishodišta:

$$G_e^*(s)=G_e^*(0)+G_e^{*\prime}(0)\,s+\frac{G_e^{*\prime\prime}(0)}{2!}s^2+\frac{G_e^{*\prime\prime\prime}(0)}{3!}s^3+\ldots \qquad (8.278)$$

U analizi diskretnih sistema češće se koristi Z-transformacija. Tada se umjesto $G_e^*(s)$ upotrebljava $G_e(z)$. U tom slučaju koeficijenti regulacijskog odstupanja mogu se dobiti iz izraza:

$$\left.\begin{aligned}
C_0&=G_e(1)\\
C_1&=TG_e'(1)\\
C_2&=T^2[G_e''(1)+G_e'(1)]\\
C_3&=T^3[G_e'''(1)+3G_e''(1)+G_e'(1)]
\end{aligned}\right\} \qquad (8.279)$$

gdje je:

$$G_e^{(i)}(1)=\left.\frac{d^i G_e(z)}{dz^i}\right|_{z=1} \qquad (8.280)$$

Takav način određivanja koeficijenata regulacijskog odstupanja primjenjiv je za analizu točnosti onda kada je poznat ulazni signal $u(t)$ i njegove derivacije. U slučajevima kada ulazni signal $u(t)$ i njegove derivacije nisu poznati, a to se javlja onda kada npr. na ulazu djeluje diskretni signal $u^*(t)$ kod kojega je anvelopa nepoznata, pa prema tome također i derivacije tog signala, tada se gornji način po analogiji s kontinuiranim sistemima ne primjenjuje. U tom slučaju primjenjuje se drugi način određivanja koeficijenata regulacijskog odstupanja.

Drugi način određivanja dinamičke točnosti sistema jest da se regulacijsko odstupanje sistema razvije u red *po diferencijama* ulaznog signala. Tada umjesto prve derivacije postoji diferencija prvog reda ulaznog signala $\Delta u(kT)$ itd.

$$\varepsilon(kT)=\overline{C}_0\cdot u(kT)+\overline{C}_1\Delta u(kT)+\frac{\overline{C}_2}{2!}\Delta^2 u(kT)+\frac{\overline{C}_3}{3!}\Delta^3 u(kT)+\dots \quad (8.281)$$

Z-transformacijom izraza (8.281) dobit će se:

$$E(z)=\left[\overline{C}_0+\overline{C}_1(z-1)+\frac{\overline{C}_2}{2!}(z-1)^2+\dots\right]\cdot U(z) \quad (8.282)$$

Izraz u zagradi predstavlja razvoj prijenosne funkcije $G_e(z)$ u red po rastućim potencijama od $(z-1)$. Koeficijenti reda određuju se izrazom:

$$\overline{C}_i=\left.\frac{d^i G_e(z)}{dz^i}\right|_{z=1}=G_e^{(i)}(1), \qquad i=1,2,3,\dots \quad (8.283)$$

Ako je $T\ll$ *tada je* $z=e^{sT}\doteq 1+sT$, te proizlazi:

$$s\approx\frac{z-1}{T} \quad (8.284)$$

Uvrštenjem (8.284) u izraz (8.276), dobit će se:

$$E(z)=\left[C_0+\frac{C_1}{T}(z-1)+\frac{C2}{2!}\cdot\frac{1}{T^2}(z-1)^2+\dots\right]\cdot U(z) \quad (8.285)$$

Usporedbom izraza (8.285) i (8.282) proizlazi:

$$C_i=\overline{C}_i\cdot T^i=G_e^{(i)}(1)\cdot T^i, \qquad i=1,2,3,\dots \quad (8.286)$$

Ako je $T\ll$ proizlazi da je:

$$w=\frac{e^{Ts}-1}{e^{Ts}+1}\simeq\frac{sT}{2} \quad (8.287)$$

Uz gornji uvjet (8.287) proizlazi da se korištenjem bilinearne transformacije regulacijsko odstupanje može izraziti:

$$E(w)=\left[\tilde{C}_0+\tilde{C}_1 w+\frac{\tilde{C}_2}{2!}w^2+\dots\right]\cdot U(w) \quad (8.288)$$

Izraz u uglatoj zagradi je razvoj prijenosne funkcije u Taylorov red u okolišu ishodišta.

$$\tilde{C}_i=\left.\frac{d^i G_e(w)}{dw^i}\right|_{w=0}=G_e^{(i)}(0); \qquad i=1,2,3,\dots \quad (8.289)$$

Veza između koeficijenata C_i, $\overline{C}_i$ te $\tilde{C}_i$ dana je izrazima:

$$C_i = \overline{C}_i T^i = \tilde{C}_i \left(\frac{T}{2}\right)^i \tag{8.290}$$

$$\tilde{C}_i = \overline{C}_i \cdot 2^i \tag{8.291}$$

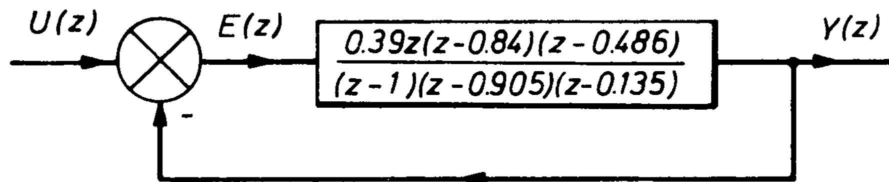
Ovi izrazi vrijede za $T \ll$, tj. onda kada vrijede izrazi (8.284) i (8.287). Točnost diskretnih sistema određuje se analogno kao kod kontinuiranih sistema na osnovi koeficijenata dobrote po brzini, ubrzanju itd.

$$\left.\begin{aligned} D_v^* &= \frac{1}{C_1} \\ D_a^* &= \frac{2!}{C_2} \\ D_{\dot{a}}^* &= \frac{3!}{C_3} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{8.292}$$

Što su veći iznosi ovih koeficijenata, to je točnost sistema veća.

Primjer 8.20.

Potrebno je odrediti pokazatelje kvalitete s obzirom na točnost za sistem zadan strukturnom blok-shemom na sl. 8.80.



Slika 8.80.

$$\begin{aligned} E_d(z) &= U(z) - Y(z) = U(z) - G_z(z) \cdot U(z) \\ &= [1 - G_z(z)] \cdot U(z) \end{aligned} \tag{8.293}$$

$$\frac{E_d(z)}{U(z)} = G_\varepsilon(z) = 1 - G_z(z) = 1 - \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

$$G_\varepsilon(z) = \frac{1}{1 + G(z)} \tag{8.294}$$

$$G_\varepsilon(z) = \frac{z^3 - 2{,}04z^2 + 1{,}162z - 0{,}122}{1{,}39z^3 - 2{,}18z^2 + z - 0{,}122} \tag{8.295}$$

$$\overline{C}_i = \left.\frac{d^i G_\varepsilon(z)}{dz^i}\right|_{z=1} \qquad i = 1, 2, \dots$$

$C_0=0$ $\qquad C_0=\overline{C}_0=0$

$\overline{C}_1=0{,}9$ $\qquad C_1=T\overline{C}_1=0{,}045[s]$

$\overline{C}_2=6{,}313$ $\qquad C_2=T^2\overline{C}_2=0{,}022[s^2]$

$\overline{C}_3=-408$ $\qquad C_3=T^3\overline{C}_3=-0{,}051[s^3]$

$$D_v^*=\frac{1}{C_1}=22{,}22[s^{-1}]$$

$$D_a^*=\frac{2!}{C_2}=90{,}91[s^{-2}]$$

Na temelju dobivenih rezultata iz izraza (8.275) proizlazi:

$$\varepsilon_0(kT)=0{,}045\cdot u'(kT)+0{,}011\cdot u''(kT)-0{,}0085\cdot u'''(kT)+\ldots-$$

8.14. Normirana prijenosna funkcija diskretnog sistema

Dosad izloženi matematički postupci analize diskretnih sistema mogu se poopćiti uvođenjem bezdimenzijske varijable $\bar{t}=\frac{t}{T}$. Primjenom normirane varijable $\bar{t}$ olakšava se komparativna analiza dinamičkog ponašanja diskretnih sistema iste klase na digitalnom računalu. Postupak uvođenja normirane varijable $\bar{t}$ može se pojasniti preko impulsne prijelazne funkcije sistema:

$$g(t)=g(\bar{t}T)=\bar{g}(\bar{t})=g(k) \tag{8.296}$$

gdje je:

$$\bar{t}=k=\frac{t}{T}$$

Također je prema definiciji:

$$G(s)=\mathsf{L}\{g(t)\}\overset{def}{=}\int_0^\infty e^{-st}g(t)\,dt \tag{8.297}$$

Zamjenom t sa $\bar{t}$ u (8.297) dobit će se normirana prijenosna funkcija:

$$\overline{G}(q)=\mathsf{L}\{\bar{g}(\bar{t})\}\overset{def}{=}\int_0^\infty e^{-q\bar{t}}\bar{g}(\bar{t})\,d\bar{t} \tag{8.298}$$

gdje je:

$$q=Ts$$

odnosno:

$$\mathsf{L}\{g(\bar{t}T)\}=\overline{G}(q)=\frac{1}{T}G\left(\frac{q}{T}\right) \tag{8.299}$$

Izraz (8.299) pokazuje da se normirana prijenosna funkcija $G(q)$ s bezdimenzijskom kompleksnom varijablom q dobije tako da se prijenosna funkcija $G(s)$ podijeli s periodom diskretizacije T, a varijabla s zamijeni s varijablom $\frac{q}{T}$, tj. $s=\frac{q}{T}$.

Normirana prijenosna funkcija fiksatora nultog reda u skladu s (8.299) ima oblik:

$$\overline{G}_F(q)=\frac{1}{T}G_F\left(\frac{q}{T}\right)=\frac{1}{T}\cdot K_F\cdot\frac{1-e^{-aT\frac{q}{T}}}{\frac{q}{T}} \tag{8.300}$$

odnosno:

$$\overline{G}_F(q)=K_F\cdot\frac{1-e^{-aq}}{q} \tag{8.301}$$

U tablici 8.9. dane su L-transformacije tipičnih funkcija.

Tablica 8.9.

Funkcija	$F(s)$	$F(s)$	$\overline{F}(q)$
f(t), K, t, aT	$K\cdot\frac{1-e^{-aTs}}{s}$	$a\ll 1$ KaT	$K\cdot\frac{1-e^{-aq}}{q}$
f(t), K, t, aT	$K\cdot\frac{2(1-e^{-\frac{aTs}{2}})^2}{Ts^2}$	$a\ll 1$ $K\cdot\frac{aT}{2}$	$K\cdot\frac{2(1-e^{-\frac{aq}{2}})^2}{aq^2}$
f(t), K, t, aT	$\frac{KT\frac{\pi}{a}(1+e^{-aTs})}{s^2T^2+\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$	$aT\ll 1$ $\frac{2KaT}{\pi}$	$K\cdot\frac{\frac{\pi}{a}(1+e^{-aq})}{q^2+\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$
f(t), K, t, aT	$K\cdot T\cdot\frac{1}{Ts+\frac{3}{a}}$	$K\cdot T\cdot\frac{1}{Ts+\frac{3}{a}}$	$K\cdot\frac{1}{q+\frac{3}{a}}$

Prijenosna funkcija ekvivalentnog kontinuiranog dijela diskretnog sistema (sl. 8.43) ima oblik:

$$G_{\text{ekv}}(s) = G_F(s) \cdot G(s) \tag{8.302}$$

Prema (8.299) proizlazi:

$$\overline{G}_{\text{ekv}}(q) = \frac{1}{T} G_{\text{ekv}}\left(\frac{q}{T}\right) = \frac{1}{T} G_F\left(\frac{q}{T}\right) G\left(\frac{q}{T}\right) \tag{8.303}$$

odnosno:

$$\overline{G}_{\text{ekv}}(q) = \overline{G}_F(q) \cdot \overline{G}(q) \tag{8.304}$$

Iz (8.303) i (8.304) proizlazi:

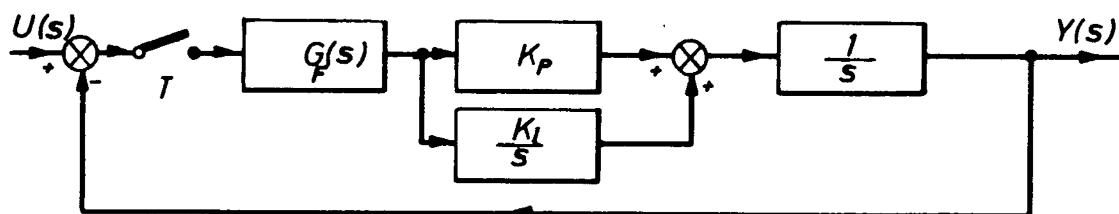
$$\overline{G}_F(q) = \frac{1}{T} G_F\left(\frac{q}{T}\right) \tag{8.305}$$

$$\overline{G}(q) = G\left(\frac{q}{T}\right) \tag{8.306}$$

Iz izraza (8.303), (8.304), (8.305) i (8.306) proizlazi da se pri prijelazu na normiranu prijenosnu funkciju ekvivalentnog kontinuiranog dijela diskretnog sistema prijenosna funkcija fiksatora mora pomnožiti s $\frac{1}{T}$, a varijabla s zamijeniti s $\frac{q}{T}$ (u skladu s (8.305)). Normirana prijenosna funkcija kontinuiranog dijela sistema $\overline{G}(q)$ dobije se iz prijenosne funkcije $G(s)$ zamjenom varijable s sa $\frac{q}{T}$ (prema 8.306)). Umnožak tako dobivenih normiranih prijenosnih funkcija daje normiranu prijenosnu funkciju ekvivalentnog kontinuiranog dijela diskretnog sistema.

Primjer 8.21.

Odredite normiranu prijenosnu funkciju $\overline{G}_{\text{ekv}}(q)$ ekvivalentnog kontinuiranog dijela diskretnog sistema za automatsko praćenje cilja, danog strukturnom shemom na sl. 8.81.



Slika 8.81.

Element za formiranje je fiksator nultog reda s $a \ll 1$. Prijenosna je funkcija kontinuiranog dijela sistema:

$$G(s) = \frac{K_P}{s} + \frac{K_I}{s^2}$$

Prijenosna funkcija fiksatora nultog reda uz $a \ll 1$ jest:

$$G_F(s) = K_F \cdot aT$$

Uvrštenjem bezdimenzijske varijable $\bar{t} = \frac{t}{T}$, proizlazi:

$$\overline{G}_F(q) = K_F \cdot a$$

$$\overline{G}(q) = \frac{K_P T}{q} + \frac{K_I T^2}{q^2}$$

Normirana prijenosna funkcija ekvivalentnog kontinuiranog dijela sistema jest:

$$\overline{G}_{\text{ekv}}(q) = \overline{G}_F(q) \cdot \overline{G}(q) = K_F \cdot a \left(\frac{K_P T}{q} + \frac{K_I T^2}{q^2} \right) = \frac{K_1}{q} + \frac{K_2}{q^2}$$

gdje je:

$$K_1 = K_F \cdot K_P \cdot T \cdot a; \qquad K_2 = K_F \cdot K_I \cdot T^2 \cdot a$$



ANALIZA LINEARNIH SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA POMOĆU VARIJABLI STANJA

9.1. Uvod

Kasnih tridesetih godina ovog stoljeća postojale su u teoriji automatskog upravljanja dvije različite, ali dobro razvijene metode za analizu i sintezu sistema:

1. Metode (u vremenskom području) koje su se osnivale na rješavanju običnih diferencijalnih jednadžbi i njihovih karakterističnih algebarskih jednadžbi. Budući da su imale osnovu u klasičnoj mehanici Poincaréa, najčešće su se koristile u strojarstvu, brodarstvu i dr.
2. Metode (u frekvencijskom području) koje su se osnivale na frekvencijskim karakteristikama sistema (Nyquist, Bode) ili prijenosnim funkcijama. Te metode primjenjivale su se u analizi i projektiranju pojačala u telefoniji.

Pojava frekvencijskih metoda značila je njihovu prednost u tome što su obrađivale sisteme preko apstraktnih blokova – elemenata sistema. Ovisno o prolazu signala kroz sistem, stvarala se blok-shema ili grafikon toka signala, a to je bila baza za primjenu frekvencijske analize sistema. Na taj način različiti sistemi mogli su imati iste frekvencijske karakteristike odnosno prijenosne funkcije. Uskoro su se frekvencijske metode proširile i na ostala područja, potiskujući metode iz vremenskog područja koje su bile ograničene na jednostavnije sisteme. Tokom drugoga svjetskog rata pojavila se potreba za visokokvalitetnim sistemima upravljanja. To je pogodovalo još široj primjeni frekvencijskih metoda u analizi i sintezi SAU s jednim ulazom i jednim izlazom, uokvirujući ih u jedinstvenu teoriju danas poznatu kao „klasična" teorija automatskog upravljanja.

Početak 50-ih godina značajan je za frekvencijske metode koje su upotpunjene 1948. godine metodom krivulje mjesta korijena (R. W. Evans). Za razliku od kasnih 20-ih godina, kada su metode u vremenskom području bile jedine za analizu i sintezu sistema, u 50-im godinama one su neznatno prisutne u tiskanim radovima toga doba. Vrlo brzo započeo je proces koji je doveo do toga da su krajem 60-ih godina metode u vremenskom području ponovno postale vrlo interesantne. Dva su osnovna uzroka nagloj promjeni koja se pojavila između 50-ih i 60-ih godina. To je pojava digitalnog računala, te sasvim nov tehnički problem koji se pojavljuje nekako u to vrijeme. Radilo se naime o slanju, manevriranju, vođenju, praćenju i spuštanju satelita. U SAD i SSSR-u uložena su golema sredstva i napori u rješavanju ovih problema. „Klasična" teorija automatskog upravljanja pokazala se kao neadekvatna za projektiranje složenih sistema (koji se sastoje od mnogo podsistema) koji svi moraju kvalitetno i pouzdano obavljati svoj dio zadatka. Osim toga pojavljuju se sasvim novi zahtjevi u odnosu na sisteme, kao npr. vođenje satelita ili raketa uz minimalni utrošak goriva,

dovođenje satelita iz jednog položaja u drugi za minimum vremena. Takve složene sisteme, koji općenito imaju više ulaza i izlaza, moguće je analizirati i projektirati takvim metodama koje bi davale informaciju i o unutarnjim „stanjima“ sistema. Novi zahtjevi u vođenju nužno su pretpostavljali poznavanje dinamike sistema u vremenu. Tih godina ponovno se „otkrivaju“ metode 20-ih godina, kao polazište za daljnji razvoj tzv. „suvremene“ teorije automatskog upravljanja. Svojstvo, da se diferencijalna jednadžba n-tog reda može rastaviti na n diferencijalnih jednadžbi I reda (Moigno, 1944), koristi se pri određivanju matematičkog modela sistema koji omogućava praćenje varijabli sistema u ovisnosti o prethodnim iznosima tih varijabli. *Ponašanje sistema u sadašnjosti uvjetovano je ponašanjem u prošlosti*, za razliku od frekvencijske ili prijenosne funkcije koje daju „trenutni“ odnos skupa izlaznih i ulaznih varijabli. Na taj način dobiven je matematički model dinamičkih sistema koji upućuje na temeljitije proučavanje problema (matematičkih ili fizikalnih) u teoriji automatskog upravljanja, koji nisu bili poznati u „klasičnoj“ teoriji automatskog upravljanja. Skup diferencijalnih jednadžbi I reda formira se na način kako bi se dobio tzv. model stanja sistema na kojem se osniva „suvremena“ teorija automatskog upravljanja razvijena od 60-ih godina do danas. Revitalizacija modela stanja omogućena je pojavom digitalnih računala pomoću kojih je moguće znatno brže i jednostavnije rješavati diferencijalne jednadžbe. Takav način opisa dinamike sistema i teorija koja je razvijena na temelju toga, zaslužni su što je nastupio širok prodor automatizacije u nova područja. Radi boljeg i potpunijeg shvaćanja teorije automatskog upravljanja, potrebno je dobro poznavati „klasičnu“ i „suvremenu“ teoriju automatskog upravljanja. Podjela na „klasičnu“ i „suvremenu“ teoriju uvjetnog je karaktera, budući da se radi o jednoj teoriji u kojoj matematički opis dinamike sistema diktira postupke i metodiku koji se mogu primijeniti pri rješavanju konkretnog problema. Da li će dinamičko ponašanje sistema biti opisano diferencijalnom jednadžbom, modelom stanja, prijenosnom funkcijom, frekvencijskom karakteristikom ili na neki drugi način, ovisi o pojedinom konkretnom problemu. Ovisno o odabranom opisu, definirani su i mogući postupci analize i sinteze sistema. Kada se radi o jednostavnijim sistemima s jednim ulazom i jednim izlazom, danas su u upotrebi „klasične“ metode, dok su „suvremene“ metode u upotrebi kada se radi o složenijim sistemima s više ulaza i izlaza, te upravljanju sistema po nekim „neklasičnim zahtjevima“ (minimum gubitka brzine, minimum trošenja goriva, minimum vremena itd.). Dobro poznavanje linearne algebre bitno je za pravilno shvaćanje osnova „suvremene“ teorije automatskog upravljanja. U prilogu su dane neke osnovne postavke linearne algebre, kao podsjetnik i pomoć za lakše praćenje ovog izlaganja.

Da bi se moglo prići proučavanju dinamike nekog sistema radi sinteze ili analize, osnovno je da postoji prikladan matematički model koji zadovoljavajuće opisuje ponašanje toga sistema. Matematički model nije jednoznačan, budući da je povezan s izborom metode koja se u daljnjem postupku primjenjuje za analizu i sintezu sistema. Matematički model koji se osniva na diferencijalnoj jednadžbi u standardnom obliku – jednadžba (9.1), baza je na kojoj je izgrađena „klasična“ teorija automatskog upravljanja.

$$A_n(t)\cdot y^{(n)}(t)+A_{n-1}(t)\cdot y^{(n-1)}(t)+\ldots+A_1(t)\cdot y'(t)+y(t)=$$
$$=B_m(t)\cdot u^{(m)}(t)+\ldots+B_1(t)\cdot u(t)+C(t)\cdot f(t) \qquad (9.1)$$

Na matematičkom modelu – diferencijalnoj jednadžbi sistema u normalnom Cauchyjevu obliku (9.2), osniva se „suvremena“ teorija automatskog upravljanja.

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\cdot x_j(t)+\sum_{j=1}^{m} b_{ij}(t)\cdot u_j(t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{l} e_{ij}(t)\cdot f(t); \quad i=1, 2, \dots, n \tag{9.2}$$

U matričnoj formi može se jednadžba (9.2) napisati:

$$\underline{\dot{x}}(t)=\underline{A}(t)\cdot\underline{x}(t)+\underline{B}(t)\cdot\underline{u}(t)+\underline{E}(t)\cdot\underline{f}(t) \tag{9.3}$$

gdje su:

$$\underline{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{\dot{x}}(t)=\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{A}(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{u}(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

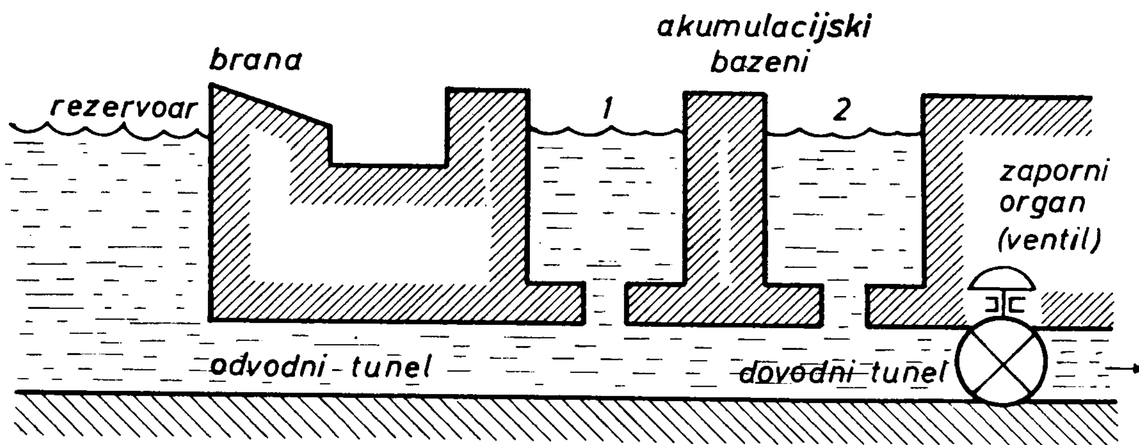
$$\underline{B}(t)=\begin{bmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1m}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(t) & \dots & b_{nm}(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{f}(t)=\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_l(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{E}(t)=\begin{bmatrix} e_{11}(t) & \dots & e_{1l}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ e_{n1}(t) & \dots & e_{nl}(t) \end{bmatrix}$$

Pri takvom matematičkom modelu bitnu ulogu ima koncept stanja sistema.

9.2. Stanje sistema

Kada bi se ponašanje nekog sistema (npr. nivo vode u protočnom bazenu) snimalo na filmsku traku, tada bi svaka slika na filmu predstavljala stanje sistema (visinu vode u bazenu ili volumen vode) u pripadnom trenutku. Da bi se opisalo stanje sistema koristi se skup varijabli – *varijable stanja*, kojima je moguće identificirati sistem i opisati njegovo ponašanje. Ako je dinamički sistem jednostavan, tada je za opis njegova stanja dovoljna jedna varijabla stanja.

Za sistem prema sl. 9.1. na prvi pogled potrebne su dvije varijalbe za opis njegova stanja.



Slika 9.1.

Sistem koji se može opisati konačnim brojem varijabli stanja naziva se – *konačno dimenzijski sistem* ili *sistem s koncentriranim parametrima.* Izraz koncentrirani parametar upotrebljava se da bi se izrazilo svojstvo da svaka točka u sistemu nosi svojstva njene neposredne okoline. Skalarne varijable opisuju stanje sistema u jednoj točki u prostoru. Međutim, kada se koriste kao varijable stanja, tada se pretpostavlja da one predstavljaju srednju vrijednost raspodjele oko svake točke. Naime, svojstva u okolini točke *koncentrirana* su u svaku točku opisanu varijablom stanja. Dinamičke jednadžbe koje opisuju sistem s koncentriranim parametrima mogu se napisati kao obične diferencijalne jednadžbe konačnog reda. Proces odvajanja međusobno djelujućih efekata (npr. otpora dovodnih žica od kondenzatora) i promatranje sistema (kondenzatora) kao sastavljenog od idealiziranih elemenata npr. idealnog otpora (bez induktivnih i kapacitivnih svojstava) i kondenzatora (bez ostalih svojstava), naziva se *koncentriranje.* Praksa koncentriranja, koja se često koristi, ekvivalentna je promatranju sistema kao skupa diskretnih funkcija u točkama koje se mogu opisati diferencijalnim jednadžbama. Kod takvih sistema vrijeme je jedina nezavisna varijabla.

Sistemi kod kojih osim vremena postoji i položaj u prostoru, kao nezavisna varijabla, nazivaju se *sistemima s raspodijeljenim parametrima.* Njihovo stanje opisuje se funkcijom, a dinamičko ponašanje parcijalnim diferencijalnim jednadžbama. Svaki fizikalni sistem ponaša se kao sistem s raspodijeljenim parametrima ako se pobuda sistema naglo mijenja, jer tada u početnim trenucima dolazi do naglih promjena unutar sistema. Izmjenjivači topline, destilacijske kolone, električke linije prijenosa, fluidne linije prijenosa (naftovodi) i drugi sistemi, ponašaju se kao sistemi s raspodijeljenim parametrima, jer su varijable temperatura, koncentracija, tok i ostalo funkcije vremena i položaja duž linije.

U ovom poglavlju obrađivat će se sistemi s koncentriranim parametrima, budući da su matematički jednostavniji i mogu se svrstati u linearnu teoriju sistema.

Izbor varijabli stanja sistema dio je umješnosti u inženjerstvu, budući da se ne može dati neki opći recept za sve sisteme. Konačan izbor ovisi kako o iskustvu inženjera, tako i o svrsi projekta. Neki sistemi po svojoj strukturi olakšavaju izbor varijabli stanja. Takav slučaj je kod sistema u kojih su primarna energetska skladišta pridružena elementima sistema koji se mogu fizikalno izdvojiti. Primjerice na sl. 9.1, dva energetska skladišta akumulacijski su bazeni, pa se mogu kao varijable stanja odabrati npr. visina vode u svakom bazenu. Isto tako moguće je uzeti i volumen vode u bazenima kao varijable stanja. Takav izbor moguć je uz pretpostavke:

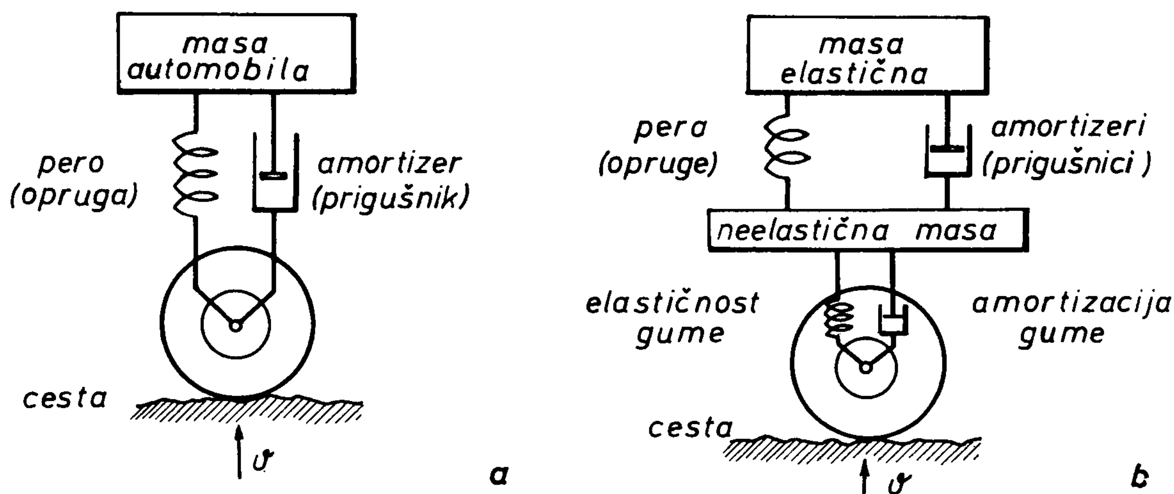
1. energetski sadržaj sistema je potencijalana energija proporcionalna visini vode u bazenu,
2. utjecaj gibanja vode u bazenima može se zanemariti,
3. promjene u visini na površini, zbog valova male su u odnosu na visinu vode koja se mjeri.

Rezervoar se uzima kao beskonačan, tj. njegov se nivo vode ne mijenja promjenom nivoa u bazenima. On se može promatrati kao izvor energije u takvom sistemu L[1]. Sistem na slici 9.1. može se promatrati i kao sistem s više od dva skladišta energije. Sve ovisi o tome u kojem se vremenskom razmaku promatra takav sistem i koje fizikalne promjene su značajne. Tako npr. za srednje duga promatranja, kada se zaporni organ (ventil) otvara ili zatvara polako, potrebno je odlučiti se je li važno u razmatranje uključiti kinetičku energiju vode zbog njena gibanja u odvodnom i dovodnom tunelu. Ako je odvodni tunel vrlo dug, tada će kinetička energija imati velik utjecaj na dinamiku čitava sistema.

Kad se sistem promatra neposredno poslije naglog otvaranja ili zatvaranja ventila, tada se ne smije zanemariti stišljivost tekućine. U tom kratkom vremenskom

intervalu bazeni se mogu promatrati kao izvori energije, budući da se nivo vode u njima neznatno mijenja.

Jednostavni modeli ovjesa automobila također ukazuju na moguće načine izbora varijabli stanja. Na modelu prema slici 9.2.a moguće je odrediti dvije varijable stanja za opis stanja sistema ovjesa. Jednu varijablu za kinetičku energiju mase automobila i drugu za potencijalnu energiju opruge. Cestu treba promatrati kao okomit izvor brzine za sistem. Brzina mase i sila u opruzi mogu biti jedan od izbora varijabli stanja za takav jednostavan sistem. Nešto složeniji model (sl. 9.2.b) dobije se kada se automobil promatra kao elastična i neelastična masa. Neelastična masa je dio automobila ispod glavnih opruga: kotači, osovine itd., dok je elastična masa preostali dio automobila, tj. školjka, motor, putnici. Dinamika takvog sistema opisuje se modelom s četiri varijable stanja koji je mnogo bliži realnom sistemu.



Slika 9.2.

Izbor varijabli stanja moguć je na bazi elemenata – skladišta energije u sistemu. U tablici 9.1. dan je popis tih elemenata.

Tablica 9.1.

ELEMENT	ENERGIJA	FIZIKALNA VARIJABLA
kondenzator C	$\frac{Cu^2}{2}$	napon, u
zavojnica L	$\frac{Li^2}{2}$	struja, i
masa m	$\frac{mv^2}{2}$	brzina, v
moment inercije J	$\frac{J\Omega^2}{2}$	kutna brzina, Ω
opruga K	$\frac{Kx^2}{2}$	pomak, x
fluidni kondenzator $C=\rho A$	$\frac{\rho Ah^2}{2}$	visina, h
temperaturni kondenzator C	$\frac{C\theta^2}{2}$	temperatura, θ

U jednadžbi za ravnotežu energija nekog sistema za svaki element (skladište energije) *može* se odabrati kao varijabla stanja sistema, njegova fizikalna varijabla. Pri tome treba paziti da se odaberu samo linearno nezavisne fizikalne varijable kao varijable stanja. Nezavisne varijable stanja su one varijable koje se ne mogu izraziti pomoću preostalih varijabli stanja. Broj varijabli stanja neophodno potrebnih i dovoljnih da se opiše dinamika sistema jednak je (ili manji) broju energetskih skladišta u sistemu. Taj broj jednak je redu sistema (ili broju integratora u sistemu).

9.3. Vektor stanja i prostor stanja

Prikladan način prikaza varijabli stanja sistema, naročito za sisteme višeg reda i s mnogo varijabli stanja, jest da ih se napiše kao elemente (stupčanog) vektora. Za sistem n-tog reda, vektor stanja glasi:

$$\underline{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots\cdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \equiv \underline{x} \tag{9.4}$$

Kao što je već pokazano izbor vektora stanja ili skupa varijabli stanja nije jednoznačan. Za neki sistem postoji više od jednog mogućeg skupa varijabli stanja. Pa ipak, svi mogući skupovi moraju imati isti broj varijabli stanja i svaki skup, da bi bio valjan, mora sadržavati nezavisne varijable. Tako npr., u sistemu s dva bazena (sl. 9.1) neće se odabrati kao varijable stanja visine tekućine u svakom bazenu i ukupni volumen tekućine (h_1, h_2 i V), budući da V ovisi o h_1 i h_2 ($V=V_1+V_2=A_1h_1+A_2h_2$), što daje linearnu zavisnost varijabli. Međutim, bilo koja kombinacija *dviju* varijabli davat će valjan skup varijabli stanja, budući da nema ograničenja u postavljanju njihovih početnih uvjeta.

Prostor stanja definiran je kao n-dimenzijski (euklidski) prostor u kome su koordinate prostora komponente vektora stanja.

Na osnovi do sada izloženog može se navesti definicija stanja sistema prema R. E. Kalmanu:

L[28]: *stanje sistema matematička je struktura koja sadrži skup od n-varijabli* $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots.\ x_i(t), \ldots.\ x_n(t)$ *zvanih varijable stanja, koje omogućuju da se, poznavajući početne vrijednosti* $x_i(t)$ *tog skupa i signale ulaza u sistem* $u_j(t)$ *za* $t \geq t_0$, *jednoznačno opiše odziv sistema za* $t \geq t_0$.

Prema toj općoj definiciji proizlazi da varijable stanja ne moraju biti fizikalno mjerljive ili osmotrive veličine, a to znači da mogu biti i čisto matematičke veličine. Ovo će se kasnije i pokazati. Varijable stanja imaju jedno vrlo važno svojstvo: naime, poznavajući njihov iznos u nekom trenutku t_0 (a također i ulazne signale u sistem u $t \geq t_0$) moguće je odrediti bilo koji izlazni signal iz sistema u $t \geq t_0$. Ako je moguće odrediti ponašanje varijabli sistema, tada je moguće odrediti i ponašanje izlaznih signala za dane pobudne signale. Moglo bi se prema tome za stanje sistema reći da je to minimalni skup varijabli – varijable stanja, koje sadrže dovoljno informacija o prošlosti sistema i koje dozvoljavaju da se proračuna buduće stanje sistema, uz pretpostavku da su svi budući ulazni signali poznati, a također i jednadžbe koje opisuju sistem. Broj n-varijabli stanja definira red ili dimenzionalnost sistema.

Energetski koncept ima velik značaj u inženjerskoj praksi, jer je dinamika većine tehničkih sistema direktno vezana uz skladište energije u sistemu. Dinamičke promjene kod takvih sistema uzrokovane su preraspodjelom energije unutar sistema.

Energija se pojavljuje u različitim fizikalnim oblicima i može se transformirati iz jednog u drugi oblik ovisno o strukturi sistema. Zapravo, bilo koji sistem upravljanja može se promatrati kao energetsko-preraspodjeljujući proces u kojem se energija prebacuje iz jednog u drugi oblik po predodređenom načinu (zakonu). Pri tome se prijelaz energije ne može trenutno izvršiti, budući da bi to zahtijevalo beskonačnu količinu energije što je fizikalno nemoguće. Sve energetske promjene unutar sistema odigravaju se s konačnom količinom energije, a to znači da je potrebno neko vrijeme da bi se izvršio proces preraspodjele energije.

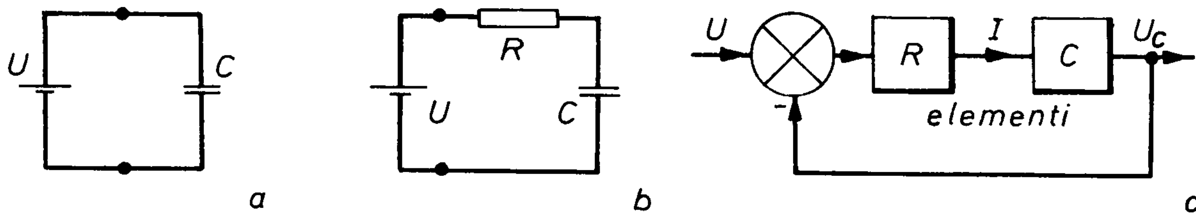
Za razliku od većine tehničkih sistema kod kojih se varijable stanja pridružuju pripadnim skladištima energije, postoje sistemi kod kojih to nije moguće. Tako biološki procesi (npr. međudjelovanje između dvije kolonije bakterija), sociološki sistemi, ekonomski sistemi, ekološki sistemi i neki drugi, iako se podvrgavaju zakonu o ravnoteži energija, otežavaju definiranje varijabli stanja, budući da skladišta energije nisu tako lako uočljiva i definirana. Navedena definicija stanja sistema uključuje u sebi i takve sisteme. Izbor varijabli stanja na bazi skladišta energije ponekad se naziva i fizikalna metoda izbora varijabli stanja.

9.4. Opis nekih tehničkih sistema pomoću varijabli stanja

U inženjerskoj praksi najčešće se javljaju energetski sistemi koji se podvrgavaju poznatim fizikalnim zakonima. Matematički model takvih sistema mnogo je lakše odrediti, nego kod onih sistema kod kojih nisu poznati osnovni zakoni po kojima se ponašaju (na primjer, ekološki ili sociološki sistemi). Jednom kada su varijable stanja energetskog sistema pridružene pripadnom elementu-skladištu energije, one se mogu međusobno povezati ako se primjene prikladni osnovni fizikalni zakoni po kojima se ponašaju dotični elementi u sistemu. Da bi se došlo do jednadžbi koje opisuju dinamiku sistema, potrebno je još provjeriti da li unutar sistema (između elemenata) vrijedi prirodna uzročno-posljedična veza (kauzalnost), te odabrati predznake u sistemu.

Kada se elementi sistema međusobno povežu, potrebno je provjeriti postoji li među njima neprirodna veza. Na primjer, ako se želi odrediti matematički model sistema koji se sastoji od naponskog izvora spojenog direktno na kondenzator (sl. 9.3.a), doći će do neprirodne (neuzročno-posljedične) veze u sistemu.

Naime, varijabla izvora je napon, za kondenzator je ulazna varijabla struja, a napon izlazna. Međutim, takva konfiguracija dovodi do nemogućeg spoja, jer se uzročno-posljedična priroda izvora ne može promijeniti, a također i kondenzatora, jer bi on inače trebao biti diferencijator. Diferencijator ne postoji (barem ne idealni, što bi u ovom slučaju trebalo biti), budući da je za njega potrebno poznavanje budućnosti da bi se mogla proračunati derivacija neke vremenski promjenjive funkcije. Može se prema tome zaključiti da je model sa sl. 9.3.a neadekvatno formuliran. Mnogo prirodnija formulacija bila bi da se u modelu izdvoji otpornost dovodnih žica i spojeva (sl. 9.3.b). Takav model zadovoljava princip kauzalnosti u sistemu.



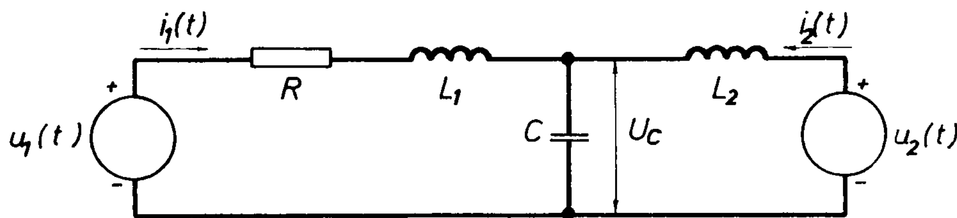
Slika 9.3.

Pri dobivanju matematičkog modela nekog sistema treba naročito brinuti o zadržavanju iste logike u pridavanju predznaka. Greška u dodjeli predznaka može kasnije sadržavati i pogrešno interpretiranje stabilnosti sistema.

Primjer 9.1.

Ako se dva naponska izvora na sl. 9.4. mogu podešavati, tada se i sistem na slici može promatrati kao otvoren regulacijski sistem. Stanje toga sistema može se mijenjati pomoću vektora $\underline{u}$ (podesivih napona izvora).

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{ili kraće} \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{9.5}$$



Slika 9.4.

Prvo što je potrebno odrediti da bi se došlo do skupa varijabli stanja, odnosno vektora stanja ovog sistema, jest red sistema, tj. broj elemenata – skladišta energije. U tom sistemu energija se može uskladištiti u zavojnicama, kao magnetska energija $\frac{1}{2}Li^2$, i u kondenzatoru kao elektrostatska energija $\frac{1}{2}Cu_c^2$. Svakom ovom elementu moguće je pridružiti nezavisne varijable struje $i_1(t)$ te $i_2(t)$ za zavojnice L_1 i L_2, i napon na kondenzatoru $u_c(t)$ za kondenzator C. Prema tome, može se zaključiti da je sistem trećeg reda, te će vektor stanja biti trodimenzionalan. Kao varijable stanja mogu se odabrati $i_1(t)$, $i_2(t)$ te $u_c(t)$, budući da su one mjerljive veličine i ujedno imaju fizikalni smisao. Vektor stanja glasi:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \hat{=} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \hat{=} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_c \end{bmatrix} \tag{9.6}$$

Dvije od tri diferencijalne jednadžbe sistema mogu se dobiti izjednačavanjem napona u petljama:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= Ri_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + u_c(t) \\ u_2(t) &= L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + u_c(t) \end{aligned} \tag{9.7}$$

Treća diferencijalna jednadžba glasi:

$$\frac{du_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}[i_1(t) + i_2(t)] \tag{9.8}$$

Uvrštenjem (9.5) i (9.6) u (9.7) i (9.8) te sređenjem, dobit će se:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{R}{L_1}\cdot x_1 + 0 - \frac{1}{L_1}\cdot x_3 + \frac{1}{L_1}\cdot u_1 + 0 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 0 + 0 - \frac{1}{L_2}\cdot x_3 + 0 + \frac{1}{L_2}\cdot u_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{1}{C}\cdot x_1 + \frac{1}{C}\cdot x_2 + 0 + 0 + 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9.9)$$

Ako se označi

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \text{te} \quad \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} \qquad (9.10)$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \qquad (9.11)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (9.12)$$

Jednadžba (9.9) može se u matričnom obliku napisati:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L_1 & 0 & -1/L_1 \\ 0 & 0 & -1/L_2 \\ 1/C & 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_1 & 0 \\ 0 & 1/L_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad (9.13)$$

ili skraćeno:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{u} \qquad (9.14)$$

Ako je moguće svesti jednadžbe sistema na oblik (9.14), tada se može reći da je sistem *linearan*.

Ako pretpostavimo da je napon na zavojnici L_1 jedini izlaz iz sistema, tj.

$$y \mathrel{\hat{=}} L_1 \frac{di_1}{dt} \qquad (9.15)$$

tada je iz prve jednadžbe iz (9.9) moguće izraziti:

$$y = -Rx_1 - x_3 + u_1 \qquad (9.16)$$

Odavde se izlazni signal može izraziti:

$$y=[-R \quad 0 \quad -1]\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+[1 \quad 0]\cdot\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix} \tag{9.17}$$

Ako je:

$$\underline{C}=[-R \quad 0 \quad -1] \tag{9.18}$$

$$\underline{D}=[1 \quad 0] \tag{9.19}$$

tada se jednadžba (9.17) može općenito u skraćenom obliku napisati:

$$\underline{y}=\underline{C}\cdot\underline{x}+\underline{D}\cdot\underline{u} \tag{9.20}$$

Jednadžbe (9.14) i (9.20) predstavljaju matematički opis sistema preko varijabli stanja. Pri tome je (9.14) *jednadžba stanja* sistema (opisuje stanje sistema), a jednadžba (9.20) *jednadžba izlaza sistema* (opisuje ponašanje izlaznih signala sistema).

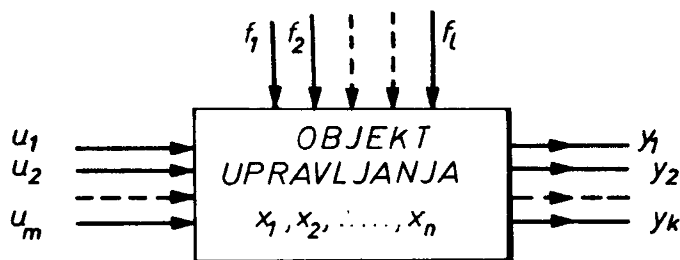
U slučaju kad na sistem djeluje još i poremećaj, tada jednadžbe (9.14) i (9.20 glase:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}&=\underline{A}\cdot\underline{x}+\underline{B}\cdot\underline{u}+\underline{E}\cdot\underline{f}\\ \underline{y}&=\underline{C}\cdot\underline{x}+\underline{D}\cdot\underline{u}\end{aligned} \tag{9.21}$$

U jednadžbama (9.21) jesu:

$\underline{A}$ ... matrica sistema (matrica koeficijenta)
$\underline{B}$ ... matrica upravljanja (matrica raspodjele)
$\underline{E}$ ... matrica poremećaja
$\underline{C}$ ... matrica izlaza (matrica mjerenja)
$\underline{D}$ ... ulazno-izlazna matrica
$\underline{x}$ ... vektor stanja (n-dimenzionalan)
$\underline{u}$ ... vektor upravljanja (m-dimenzionalan)
$\underline{y}$ ... vektor izlaza (k-dimenzionalan)
$\underline{f}$ ... vektor poremećaja (l-dimenzionalan)

Jednadžbe (9.21) opisuju otvoreni sistem upravljanja (sl. 9.5) i mogu se prikazati blok-dijagramom (sl. 9.6).

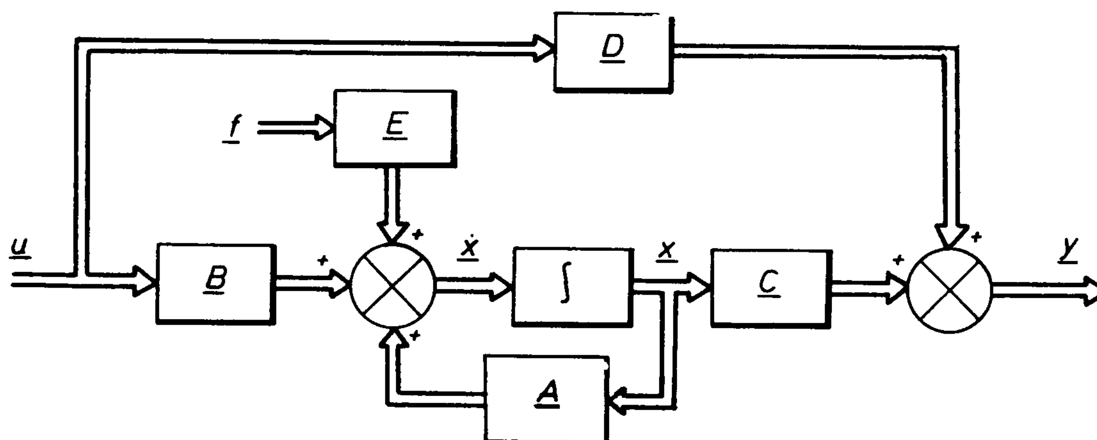


Slika 9.5.

Jednadžbe sistema u obliku (9.21) često se pojavljuju i kod ostalih tipova tehničkih sistema, te se može ustvrditi da predstavljaju opći matematički oblik kada se sistem opisuje preko varijabli stanja. Takav oblik daje n diferencijalnih jednadžbi prvog reda za sisteme n-tog reda, kod kojih se derivacija varijabli stanja pojavljuje na jednoj (lijevoj) strani jednadžbi. Postoji nekoliko glavnih prednosti kada se sistem opisuje s diferencijalnim jednadžbama I reda:

1. To su najbolje proučene diferencijalne jednadžbe i postoji nekoliko dobro razrađenih postupaka za njihovo rješavanje.

2. Takav oblik predstavljanja sistema može se proširiti i na nestacionarne i nelinearne sisteme, što nije tako jednostavno kod predstavljanja sistema diferencijalnim jednadžbama n-tog reda.
3. Takav oblik matematičkog opisa sistema najprikladniji je za obradu na računalima.

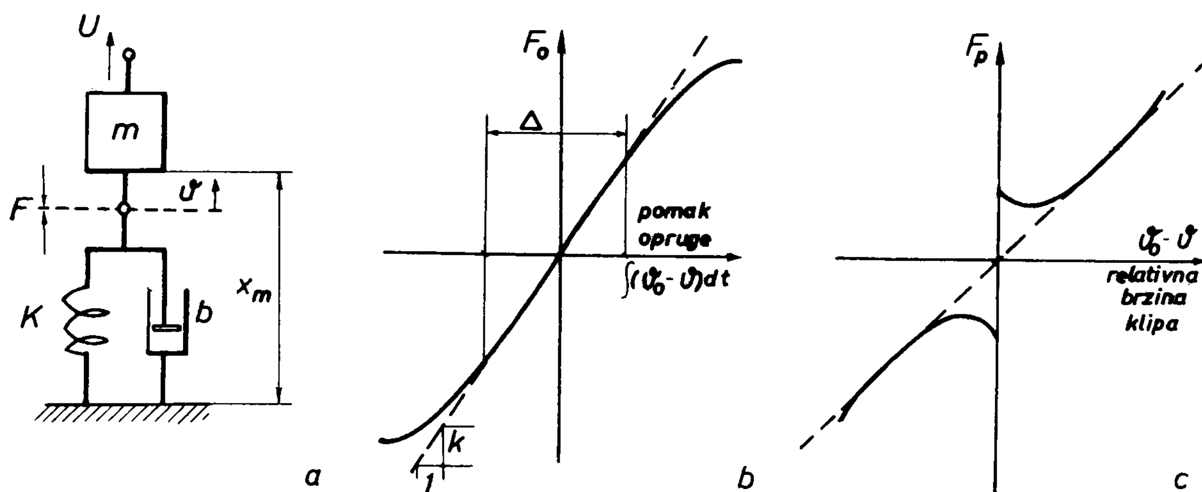


Slika 9.6.

Primjer 9.2.

Za mehanički sistem, prema sl. 9.7.a, potrebno je odrediti jednadžbu stanja.

Pobuda-sila U (koja djeluje na masu m), pozitivna je u smjeru prema gore. Brzina mase v pozitivna je kada se masa giba prema gore. Protusila F, koja djeluje na masu, pozitivna je kada je veza (naznačena kružićem na slici) između mase i opruge u kompresiji.



Slika 9.7.

Statička karakteristika opruge (sl. 9.7.b) je nelinearna (puna linija). Unutar ograničenog intervala pomaka opruge (Δ) sila je proporcionalna nagibu K (konstanta opruge) prema Hookeovu zakonu, te se može izraziti:

$$F_o = \int K\,(v_o - v)\,dt \tag{9.22}$$

v_o ... brzina podnožja ($v_o = 0$ u ovom slučaju).

Budući da je i statička karakteristika prigušivača nelinearna, potrebno je linearizirati njezino ponašanje:

$$F_p = b\,(v_o - v) \tag{9.23}$$

b ... konstanta prigušivača

Tri sile djelovat će na masu $F = F_0 + F_p + U$, te će II Newtonov zakon davati:

$$m\frac{dv}{dt} = F \tag{9.24}$$

Budući da u sistemu postoje dva skladišta energije (m i K), sistem mora posjedovati dvije varijable stanja, tj. dva integratora. Za varijable stanja mogu se odabrati:

x_1 ... pomak opruge (pozitivan za kompresiju)
x_2 ... brzina mase (pozitivna prema gore).

Iz jednadžbi (9.22), (9.23) i (9.24) dobit će se jednadžba stanja (uz $v_o = 0$):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{K}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}U \end{aligned} \tag{9.25}$$

odnosno poznati oblik:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{u} \tag{9.26}$$

gdje je matrica stanja $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{K}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}$,

dok je matrica upravljanja $\underline{B}$ u ovom slučaju stupčani vektor (zbog toga se često označava malim slovom $\underline{b}$):

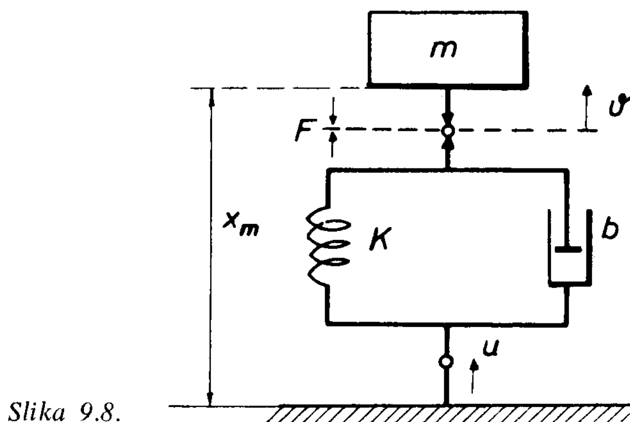
$$\underline{B} = \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$$

Budući da je izbor varijabli stanja nejednoznačan, također je bilo moguće odabrati brzinu (v) i pomak (x) mase kao skup varijabli stanja. U slučaju da je apsolutni pomak mase x_m interesantan za promatrani sistem, tada će zbog toga jer je $v_o = 0$, taj pomak biti jednak pomaku opruge, pa se umjesto dvije diferencijalne jednadžbe I reda može dobiti diferencijalna jednadžba II reda.

$$\frac{d^2x_m}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx_m}{dt} + \frac{K}{m}x_m = \frac{1}{m} \cdot U \tag{9.27}$$

Ova diferencijalna jednadžba poznata je jednadžba iz klasične mehanike za oscilatorni sistem II reda. Ona nije za razliku od jednadžbe (9.25) toliko prikladna za numeričko rješavanje.

Ako se umjesto pobude – sile U, sistem pobuđuje brzinskom pobudom u (na primjer, neravna cesta) (sl. 9.8), doći će do promjene u matematičkom modelu sistema.



Slika 9.8.

Relacije (9.22), (9.23) i (9.24) za oprugu, prigušivač te masu i dalje vrijede, ali uz zamjenu v_0 sa u. Kao jednadžba stanja sistema dobit će se:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 + u$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{K}{m} x_1 - \frac{b}{m} x_2 + \frac{b}{m} \cdot u \tag{9.28}$$

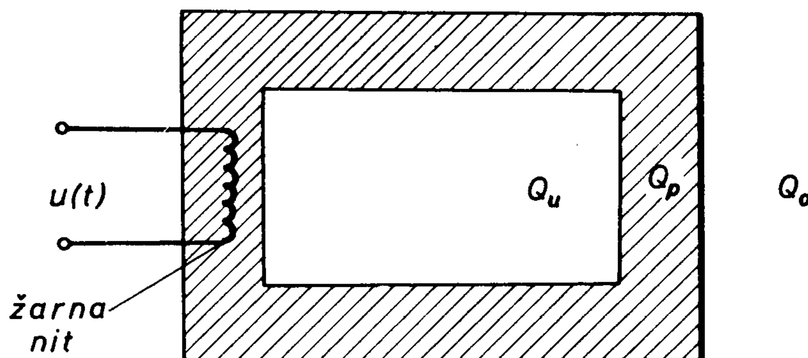
Kod takvih mehaničkih sistema interesantni su pomaci mase x_m. Budući da takav sistem s brzinskim ulazom nema direktne (čvrste) veze s podlogom (cestom), nema načina na koji bi se iz pomaka x_1 i x_2 mogao proračunati pomak mase x_m. Umjesto toga x_m može se i mora proračunati integracijom brzine v_m što daje treću jednadžbu stanja:

$$\frac{dx_m}{dt} = v_m \tag{9.29}$$

Kada u sistemu nema prigušivača (amortizer) $b = 0$, nema ni disipacije energije, te će sistem oscilirati i bez pobude. *Oscilacije* se pojavljuju zbog preraspodjele između kinetičke (maksimalna, kada masa prolazi kroz ravnotežni položaj opruge) i potencijalne energije (maksimalna, kada je opruga ili potpuno stisnuta ili potpuno rastegnuta i kada je brzina mase 0).

Primjer 9.3.

Kao sljedeći primjer može poslužiti dvostruko kapacitivni toplinski sistem (pećnica). Temperatura električki zagrijavane pećnice (sl. 9.9) regulira se promjenom napona žarne niti $u(t)$.



Slika 9.9.

Temperatura okoline (θ_0), plašta (θ_p) i unutrašnjosti (θ_u) naznačene su na slici. Zbog pojednostavnjenja pretpostavlja se da se temperatura jednoliko raspoređuje u plaštu i unutrašnjosti (zanemaruje se toplinski otpor). Parametri sistema jesu:

A_u, A_v unutrašnja i vanjska površina plašta
C_u, C_p toplinski kapacitet unutrašnjeg prostora i prostora u plaštu
h_u, h_o koeficijenti izolacijskog sloja na unutrašnjoj i vanjskoj površini sistema.

Za ravnotežu topline u plaštu proizlazi:

$$C_p \frac{d\theta_p}{dt} = A_v \cdot h_0 (\theta_0 - \theta_p) + A_u \cdot h_u (\theta_u - \theta_p) + u \tag{9.30}$$

Za ravnotežu topline u unutrašnjosti proizlazi:

$$C_u \cdot \frac{d\theta_u}{dt} = A_u \cdot h_u (\theta_p - \theta_u) \tag{9.31}$$

Ako su temperaturne razlike $\theta_p - \theta_0$ i $\theta_u - \theta_0$ interesantnije od pravih temperatura, tada se kao varijabla stanja može odabrati skup varijabli, dan varijablom stanja:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \hat{=} \begin{bmatrix} \theta_p - \theta_0 \\ \theta_u - \theta_0 \end{bmatrix} \tag{9.32}$$

Uz pretpostavku da je temperatura okoline konstantna dobit će se:

$$\begin{aligned} C_p \dot{x}_1 &= -A_v h_0 x_1 + A_u \cdot h_u (x_2 - x_1) + u \\ C_u \dot{x}_2 &= A_u \cdot h_u (x_1 - x_2) \end{aligned} \tag{9.33}$$

odnosno u normalnom obliku, jednadžbe stanja:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_p} (A_v \cdot h_0 + A_u \cdot h_u) & \frac{A_u \cdot h_u}{C_p} \\ \frac{A_u \cdot h_u}{C_u} & -\frac{A_u \cdot h_u}{C_u} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_p} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u \tag{9.34}$$

tj.:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot \underline{u} \tag{9.35}$$

Primjer 9.4.

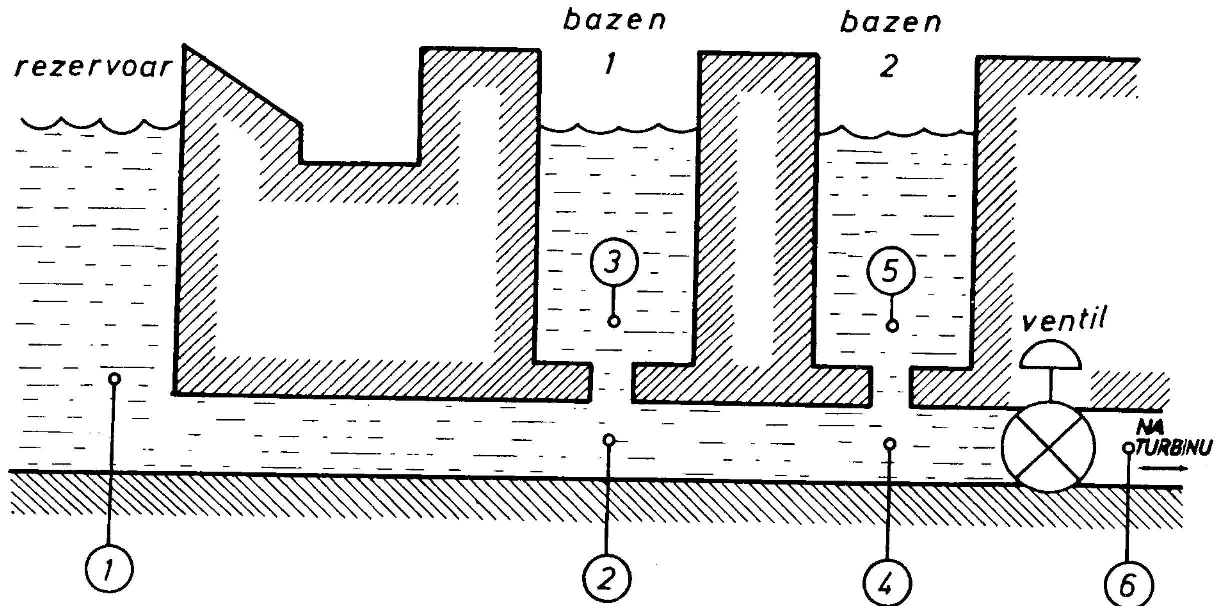
Kao primjer određivanja matematičkog modela stanja sistema može poslužiti sistem L[1] prikazan na slici 9.10.

Zaokruženi brojevi na slici dani su u svrhu lakšeg praćenja položaja tokom razrade modela.

Ako se promatraju vode u odvodnom $(1-2)$ i dovodnom $(2-4)$ tunelu kao *koncentrirane* inercije, pa prema tome i skladišta kinetičke energije, ako se uzme da sistem ima dva skladišta potencijalne energije (bazeni 1 i 2), tada se vidi da takav sistem ima četiri skladišta energije; to znači da su potrebne četiri varijable stanja da ga opišu.

Jedan od mogućih izbora varijabli stanja je sljedeći:

$$\begin{aligned}
&x_1(t) \rightarrow Q_{12} \;\ldots \text{ protok vode u tunelu } 1-2 \quad [\mathrm{m^3/sek}]\\
&x_2(t) \rightarrow P_3 \;\ldots \text{ pritisak vode u točki } 3 \quad [\mathrm{N/m^2}]\\
&x_3(t) \rightarrow Q_{24} \;\ldots \text{ protok vode u tunelu } 2-4 \quad [\mathrm{m^3/s}]\\
&x_4(t) \rightarrow P_5 \;\ldots \text{ pritisak vode u točki } 5 \quad [\mathrm{N/m^2}]
\end{aligned} \tag{9.36}$$



Slika 9.10.

1. Za tunel 1 – 2 potrebno je promatrati moment ili inercijsko djelovanje mase vode:

$$m_{12} = \rho A_{12} L_{12} \quad [\mathrm{kg}] \tag{9.37}$$

gdje su: ρ ... specifična gustoća vode $[\mathrm{kg/m^3}]$
A_{12} ... površina presjeka tunela $[\mathrm{m^2}]$
L_{12} ... duljina tunela $[\mathrm{m}]$.

Sila koja djeluje na ovu masu vode jest:

$$(P_1 - P_2) \cdot A_{12} \quad [\mathrm{N}] \tag{9.38}$$

gdje su: P_1 i P_2 ... pritisci vode u točkama 1 i 2 $[\mathrm{N/m^2}]$.

Protok (Q_{12}) vode vezan je s brzinom vode (v_{12}) relacijom (uz pretpostavku jednolike brzine i protoka):

$$v_{12} = \frac{Q_{12}}{A_{12}} \quad [\mathrm{m/s}] \tag{9.39}$$

Prema II Newtonovu zakonu proizlazi da će u tunelu 1 – 2 dinamika sistema biti opisana jednadžbom:

$$\frac{dQ_{12}}{dt} = \frac{A_{12}}{\rho L_{12}} \cdot (P_1 - P_2) \tag{9.40}$$

2. Prvi bazen povezan je s glavnim tunelom lijevkastim tunelom (otporna sekcija tunela), pa se turbulentni protok tekućine kroz otpornu sekciju može opisati jednadžbom:

$$Q_{23} = \eta_1 \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}; \qquad x = P_2 - P_3 \tag{9.41}$$

gdje je:

η_1 ... koeficijent proporcionalnosti dobiven eksperimentalno ($0 < \eta_1 < 0{,}6$) L [71]

Izraz $\operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}$ potreban je zbog mogućeg punjenja ili pražnjenja bazena (kada se predznak očito mijenja), a proizlazi iz Bernoullijeve jednadžbe.

3. Kapacitivni efekt prvog bazena može se izraziti preko nivoa vode u bazenu h_1 [m], koji je jednak $h_1 = V_1/A_1$

A_1 ... površina bazena [m^2]
V_1 ... volumen vode u bazenu [m^3].

Kako je:

$$V_1 = \int Q_{23}dt \quad [\mathrm{m}^3] \tag{9.42}$$

to je

$$h_1 = \frac{1}{A_1}\int Q_{23}dt \quad [\mathrm{m}] \tag{9.43}$$

Pritisak u točki 3 glasi:

$$P_3 = \rho g h_1 = \frac{\rho g}{A_1}\int Q_{23}dt \quad [\mathrm{N/m}^2] \tag{9.44}$$

Odnosno:

$$\frac{dP_3}{dt} = \frac{\rho g Q_{23}}{A_1} \tag{9.45}$$

g ... lokalna vrijednost gravitacije [m/s^2].

4. Inercija vode u tunelu 2 – 4 dana je kao i za tunel 1 – 2 izrazom:

$$\frac{dQ_{24}}{dt} = \frac{A_{24}}{\rho L_{24}}(P_2 - P_4) \tag{9.46}$$

Pretpostavlja se da vrijedi uvjet kontinuiteta u točki 2:

$$Q_{23} = Q_{12} - Q_{24} \tag{9.47}$$

5. Za otpornu sekciju drugog bazena vrijedi:

$$Q_{45} = \eta_2 \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}, \qquad \text{uz } x = P_4 - P_5 \tag{9.48}$$

također za drugi bazen vrijedi:

$$\frac{dP_5}{dt} = \frac{\rho g Q_{45}}{A_2} \tag{9.49}$$

6. Za ventil se može postaviti (kao i za otporne sekcije ako se pretpostavi konstantan otvor ventila):

$$Q_{46} = \eta_3 \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}, \quad \text{uz } x = P_4 - P_6 \tag{9.50}$$

Uvjet kontinuiteta u točki 4 glasi:

$$Q_{45} = Q_{24} - Q_{46} \tag{9.51}$$

7. Kao izvori (ulazi) sistema mogu se smatrati:

   $P_1(t)$ ... pritisak u točki 1 od rezervoara kao izvora pritiska
   $P_6(t)$ ... pritisak iza ventila zbog pojednostavnjenja uzima se konstantnim (u realnim sistemima nije konstantan).

8. Za predznake uzima se da je tok pozitivan slijeva nadesno i prema gore (za bazene).
9. Kauzalnost. Algebarska složenost u izrazima (9.40) do (9.51) otežava eliminiranje pomoćnih varijabli i svođenje skupa jednadžbi na četiri jednadžbe s odabranim varijablama stanja. Da bi se pojednostavnio problem moguće je linearizirati statičke nelinearne relacije za protok kroz otporne sekcije, te će se dobiti:

$$Q_{23} = \frac{1}{R_{23}}(P_2 - P_3) \tag{9.52}$$

$$Q_{45} = \frac{1}{R_{45}}(P_4 - P_5) \tag{9.53}$$

$$Q_{46} = \frac{1}{R_{46}}(P_4 - P_6) \tag{9.54}$$

R_{23}, R_{45} i R_{46} predstavljaju ekvivalentne linearne otpore protoku vode kroz otporne sekcije. Matematički model stanja sistema sada glasi:

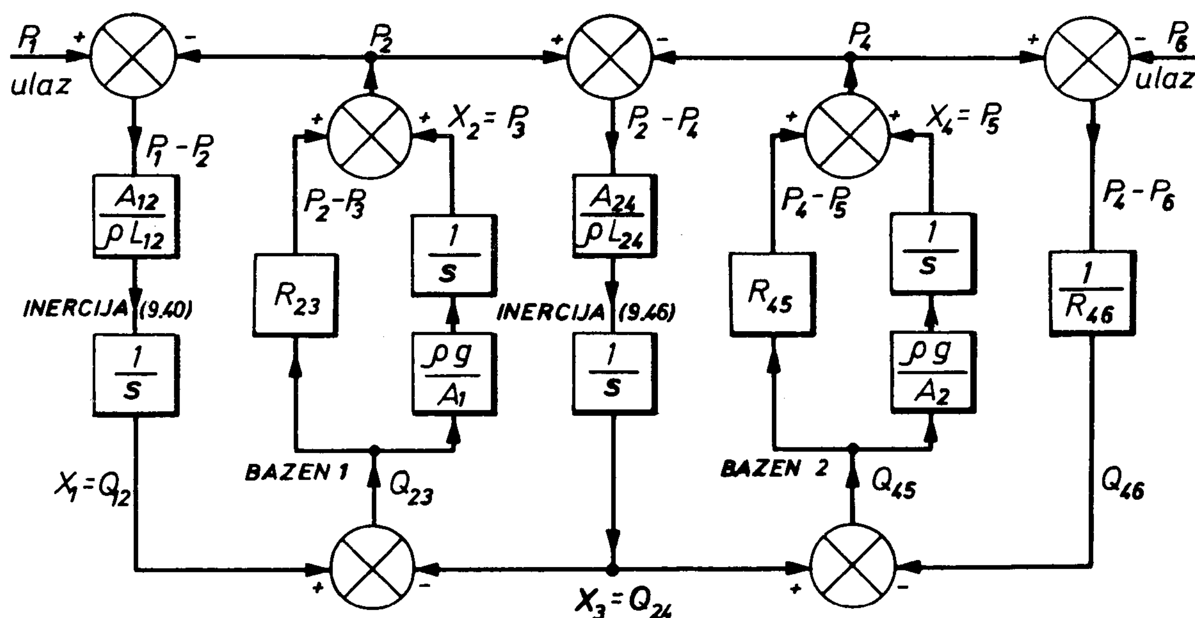
$$\begin{aligned}
x_1(t) &= Q_{12}(t); & \dot{x}_1 &= \frac{A_{12}}{\rho L_{12}} \cdot (-R_{23}x_1 - x_2 + R_{23}x_3 + P_1) \\
x_2(t) &= P_3(t); & \dot{x}_2 &= \frac{\rho g}{A_1} \cdot (x_1 - x_3) \\
x_3(t) &= Q_{24}(t); & \dot{x}_3 &= \frac{A_{24}}{\rho L_{24}} \cdot \left[R_{23}x_1 + x_2 - \left(R_{23} + \frac{R_{45}}{C} \right) x_3 - \frac{1}{C} x_4 - \frac{R_{45}}{CR_{46}} \cdot P_6 \right] \\
x_4(t) &= P_5(t); & \dot{x}_4 &= \frac{\rho g}{A_2} \left(\frac{1}{C} x_3 - \frac{1}{R_{46} \cdot C} \cdot x_4 + \frac{1}{R_{46} \cdot C} \cdot P_6 \right)
\end{aligned} \tag{9.55}$$

gdje je:

$$C = \frac{1 + R_{45}}{R_{46}}$$

19 *

Blok-dijagram jednadžbi (9.55) prikazan je na slici 9.11.



Slika 9.11.

Na sl. 9.11. mogu se vidjeti četiri dinamička bloka i tri linearizirana statička disipativna elementa. Jednadžbe (9.55) predstavljaju četiri ulazna signala u četiri integratora, dok su varijable stanja izlazni signali iz tih integratora.

Svi navedeni primjeri jednadžbi stanja za različite tehničke sisteme pokazuju u osnovi istu matematičku formu (9.21). Matematički modeli sastoje se od skupa diferencijalnih jednadžbi I reda u normalnom obliku, s vremenom kao jedinom nezavisnom varijablom. Red ili dimenzionalnost sistema ovisi o minimalnom broju nezavisno izabranih zavisnih varijabli koje su neophodne da bi se sistem potpuno opisao. Za većinu tehničkih sistema moguće je varijable stanja povezati s energetskim skladištima u sistemu. Svi navedeni sistemi bili su stacionarni, budući da su matrice $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ i $\underline{D}$ bile matrice s vremenski nepromjenjivim elementima – konstantama. Kod stacionarnih sistema stanje je ovisno o trajanju upravljajućeg signala. Pokazalo se također da ne postoji samo jedan vektor stanja, već da je izbor vektora stanja ovisan o mnogo faktora (znanje, iskustvo, svrha matematičkog modela, prikladnost za rješavanje na računalu i dr.). Jednadžbe stanja razrađene su u primjerima na temelju fizikalnih svojstava sistema. U mnogim situacijama (linearni stacionarni sistemi) poznata su dinamička svojstva nekog sistema iz njegove prijenosne funkcije. Matematički model po varijablama stanja sistema iz njegove prijenosne funkcije moguće je odrediti na više načina. Prijenosna funkcija ne daje tako dobar uvid u dinamiku sistema kao što je slučaj kod prikaza sistema jednadžbama stanja, a to će se kasnije i pokazati.

9.5. Način dobivanja matematičkog modela stanja iz prijenosne funkcije sistema

Ako je poznata prijenosna funkcija sistema, matematički model stanja moguće je odrediti iz simulacijskog modela odnosno blok-dijagrama sistema na nekoliko načina. Tri su postupka najčešća: direktni, serijski i paralelni. Za svaki od postupaka karakteristično je da se kao varijabla stanja uzima izlazni signal iz integratora

simulacijskog modela sistema, budući je poznato da je izlazni signal x_i, povezan s ulaznim signalom x_u integratora, relacijom $\dot{x}_i = x_u$. Ulazna jednadžba svakog integratora po istoj će logici predstavljati jednadžbu stanja. Postupci će se pokazati na primjeru prijenosne funkcije:

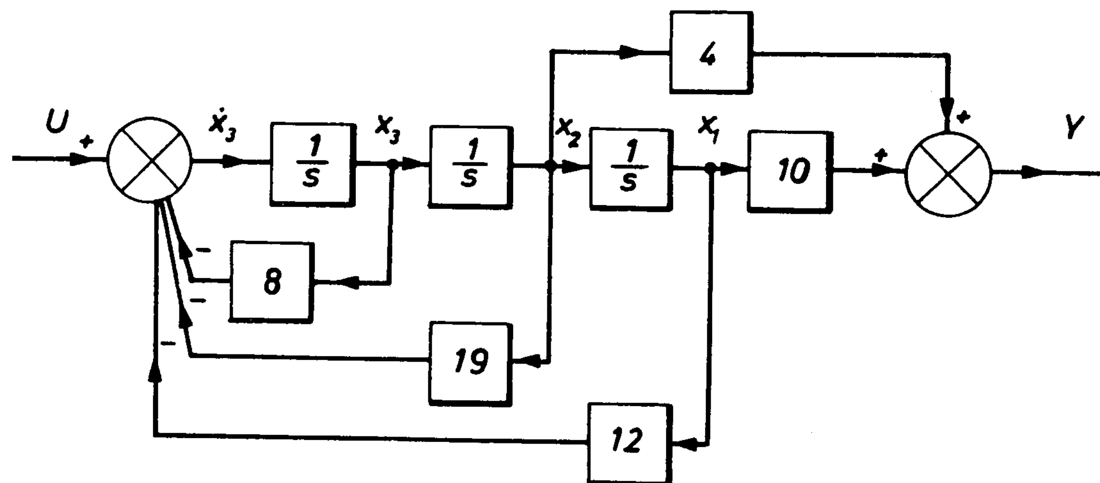
$$G(s) = \frac{4s+10}{s^3+8s^2+19s+12} \tag{9.56}$$

$$= \frac{4(s+{}^5/_2)}{(s+1)(s+3)(s+4)} \tag{9.57}$$

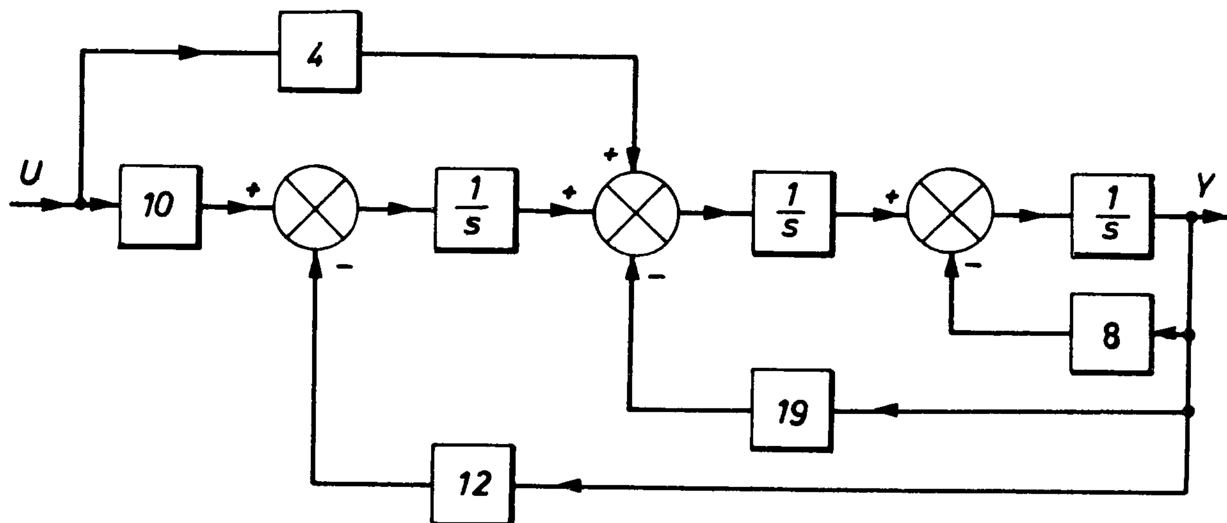
$$= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3} - \frac{2}{s+4} \tag{9.58}$$

Direktni postupak

Prijenosnu funkciju (9.56) moguće je predstaviti na dva načina – sl. 9.12.a i b.



a



Slika 9.12.

b

Ako se u daljnjem razmatranju razvoj modela temelji na sl. 9.12.a, tada će se dobiti da su varijable stanja (izlazni signali iz integratora) povezane sa signalima na ulazu integratora relacijama:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_3\\ \dot{x}_3 &= -12x_1 - 19x_2 - 8x_3 + u\end{aligned} \tag{9.59}$$

dok je izlaz sistema dan sa:

$$y = 10x_1 + 4x_2 \tag{9.60}$$

Jednadžba stanja i jednadžba izlaza:

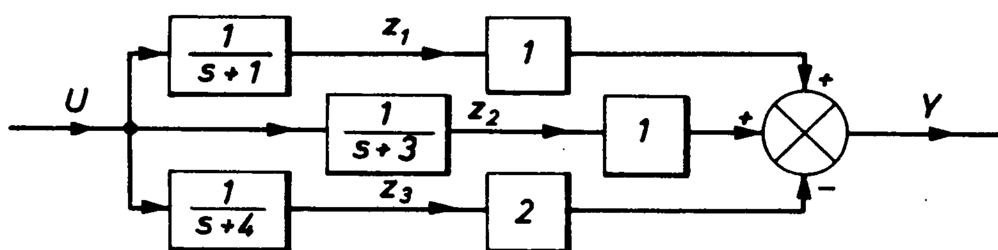
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -12 & -19 & -8\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \cdot u \tag{9.61}$$

$$y = [10 \quad 4 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix}x1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \tag{9.62}$$

Varijable stanja dobivene direktnim postupkom često se zovu i *fazne varijable*. Matrica sistema $\underline{A}$ ima oblik fazne varijable ili takozvani *prateći oblik*. Kad se kao osnova za razradu modela izabere prikaz – sl. 9.12.b, dobio bi se drugi skup varijabli stanja.

Paralelni postupak

Ako se analizira prijenosna funkcija oblika (9.58) vidi se da je taj oblik dobiven rastavljanjem na parcijalne razlomke izraza (9.56). Jednadžba (9.58) može se prikazati blok-shemom (sl. 9.13).



Slika 9.13.

Na slici je vidljivo da se ovdje radi o tri prijenosne funkcije prvog reda, pa se za varijable stanja mogu odabrati izlazi ovih podsistema I reda. Ako se izlazi podsistema označe sa z_1, z_2 i z_3, tada se jednadžbe stanja mogu napisati kao:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -z_1 + u\\ \dot{z}_2 &= -3z_2 + u\\ \dot{z}_3 &= -4z_3 + u\end{aligned} \tag{9.63}$$

Jednadžba izlaza glasi:

$$y = z_1 + z_2 - 2z_3 \tag{9.64}$$

odnosno:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \tag{9.65}$$

$$y = [1 \quad 1 \quad -2] \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \tag{9.66}$$

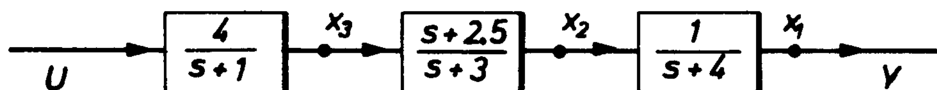
Takav oblik jednadžbi – *normalan (kanonski) oblik*, vrlo je značajan i o njemu će još biti govora. Varijable stanja takvog matematičkog oblika imaju naziv i dijagonalizirane varijable ili *kanonske varijable stanja*. One zadovoljavaju *Jordanov kanonski oblik* diferencijalnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{z}}(t) &= \underline{\Lambda} \cdot \underline{z}(t) + \underline{B}_n \cdot \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{C}_n \cdot \underline{z}(t) + \underline{D}_n \cdot \underline{u}(t) \end{aligned} \tag{9.67}$$

Kada je matrica sistema $\underline{A}$ dijagonalna, označava se s $\underline{\Lambda}$ i naziva *kanonska matrica*.

Serijski postupak

Prijenosna funkcija $G(s)$ može se također predstaviti i serijskim spojem podsistema, jednadžbe (9.57) i sl. 9.14.



Slika 9.14.

Svaki od podsistema je prvog reda, pa se prema tome može izlaz iz svakog promatrati kao varijabla stanja. Sa sl. 9.14. proizlazi:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -4x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 + 3x_2 &= \dot{x}_3 + {}^5/_2 x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_3 + 4u \end{aligned} \tag{9.68}$$

Sređenjem izraza (9.68) proizlazi:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & {}^3/_2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot u \tag{9.69}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{9.70}$$

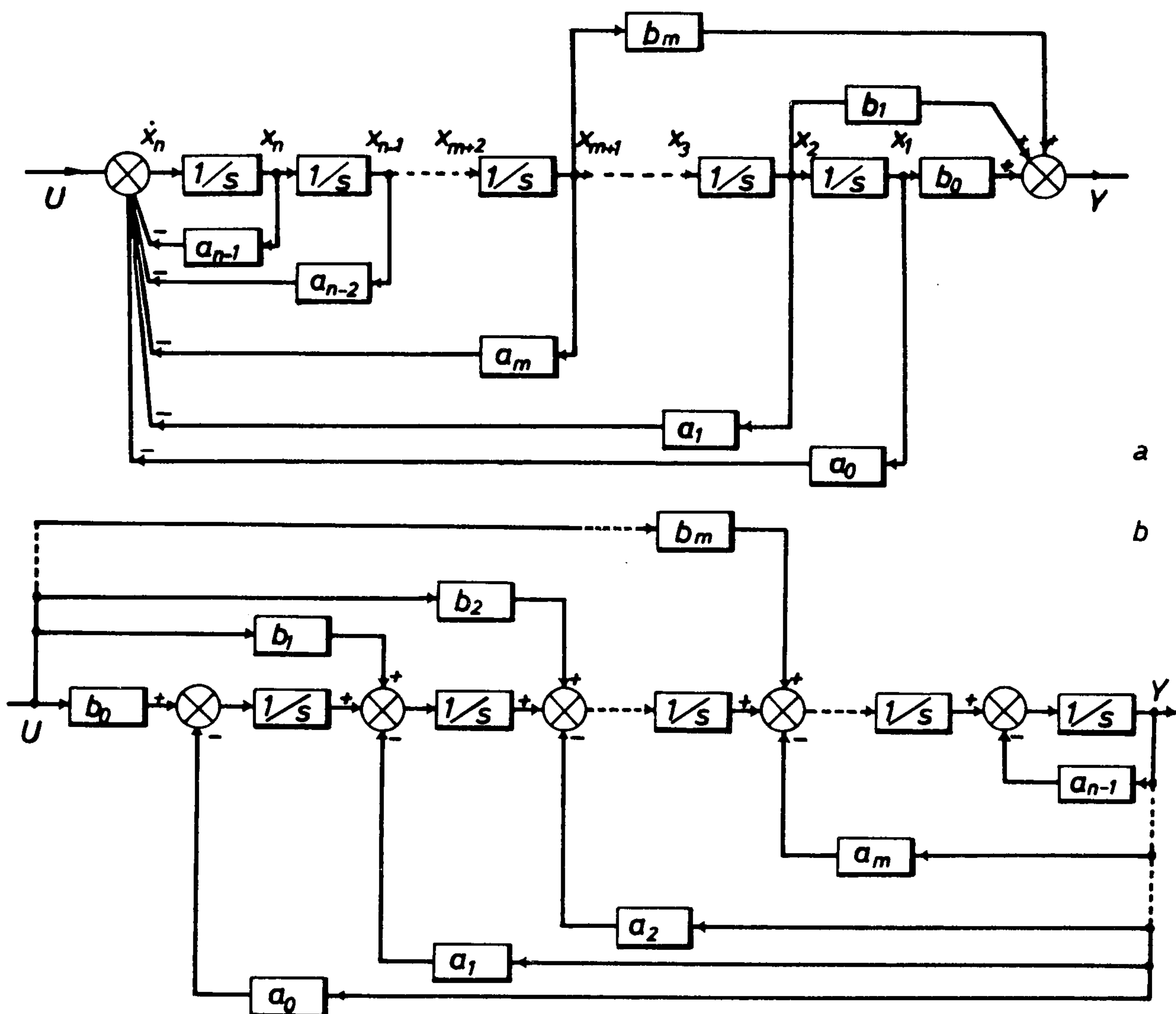
Iz ovih postupaka očigledno je da se i iz prijenosne funkcije nekog sistema (9.56), može doći do različitih vektora stanja, odnosno jednadžbi stanja (9.91), (9.65) i (9.69). Od

dobivenih varijabli stanja najznačajnije su i najčešće se susreću fazne i kanonske varijable. Jednadžbe stanja u normalnom obliku i obliku fazne varijable vrlo jednostavno slijede iz prijenosne funkcije. Ako se uzme prijenosna funkcija sistema općeg oblika:

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0} \tag{9.71}$$

koja se može predstaviti blok-dijagramom (sl. 9.15.a ili b), tada se npr. na osnovi sl. 9.15.a mogu odmah napisati diferencijalne jednadžbe:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2\\
\dot{x}_2 &= x_3\\
&\;\vdots\;\ldots\ldots\ldots\\
\dot{x}_{n-1} &= x_n\\
\dot{x}_n &= -a_{n-1}x_n-a_{n-2}x_{n-1}-\ldots-a_1x_2-a_0x_1+u
\end{aligned} \tag{9.72}$$



Slika 9.15.

te jednadžba izlaza:

$$y=b_0x_1+b_1x_2+\ldots+b_mx_{m+1} \tag{9.73}$$

odnosno:

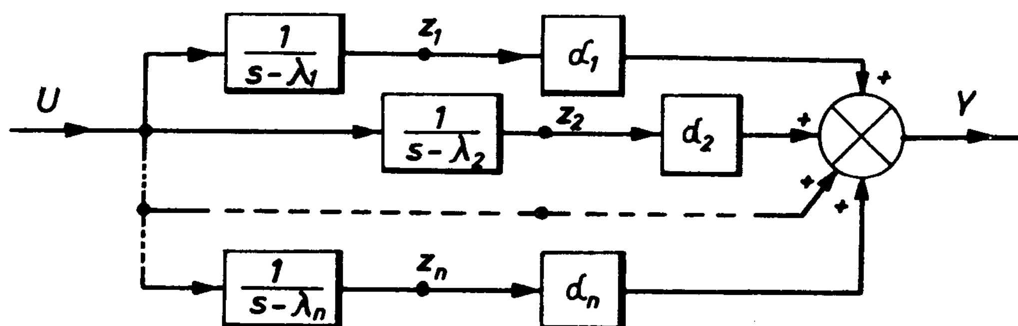
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \ldots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\cdot u(t) \tag{9.74}$$

$$y=[b_0 \quad b_1\ldots b_m \quad 0\ldots 0]\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_n\end{bmatrix} \tag{9.75}$$

Jednadžbe (9.74) i (9.75) pokazuju da se takav oblik, poznat kao *Kalmanov prvi oblik* jednadžbi, mogao dobiti direktno iz prijenosne funkcije (9.71) bez crtanja blok-dijagrama odnosno simulacijske sheme sistema. Blok-dijagram sa sl. 9.15.b, rezultirao bi u tzv. *Kalmanovom drugom obliku* jednadžbi.

Prijenosnu funkciju (9.71) moguće je rastaviti na parcijalne razlomke:

$$G(s)=\frac{\alpha_1}{s-\lambda_1}+\frac{\alpha_2}{s-\lambda_2}+\ldots+\frac{\alpha_3}{s-\lambda_3} \tag{9.76}$$



Slika 9.16.

Slika 9.16. pokazuje blok-dijagram za jednadžbu (9.76). U slučaju jednostrukih polova sistema (λ_i) normalni oblik jednadžbi glasi:

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\\ \vdots\\ \dot{z}_{n-1}\\ \dot{z}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots \lambda_{n-1} & 0\\ 0 & 0 & \ldots 0 & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ \ldots\\ z_{n-1}\\ z_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \ldots\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u(t) \tag{9.77}$$

odnosno:

$$y=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} \quad \alpha_n] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} \tag{9.78}$$

I ovaj oblik (normalni oblik) moguće je odrediti direktno iz prijenosne funkcije rastavljene na parcijalne razlomke. Ako prijenosna funkcija ima višestruke polove, oblik je nešto drugačiji.

9.6. Načini dobivanja matematičkog modela stanja iz diferencijalne jednadžbe sistema

Postupci određivanja matematičkog modela stanja iz diferencijalne jednadžbe sistema analogni su postupcima baziranim na prijenosnoj funkciji (direktni, serijski, paralelni). Osim toga često se susreće i tzv. standardni postupak, koji rezultira u standardnom obliku jednadžbi stanja, te opći postupak koji rezultira u općem obliku jednadžbi stanja.

Standardni postupak

Opći oblik diferencijalne jednadžbe n-tog reda dan je izrazom (9.79)

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0 y=b_m\frac{d^m u}{dt^m}+\ldots+b_1\frac{du}{dt}+b_0 u \quad \text{uz } m\leq n \tag{9.79}$$

Standardni postupak osniva se na postepenoj eliminaciji derivacije signala $u\,(t)$. Kada je $m=n$, član $b_n\frac{d^n u}{dt^n}$ kombinira se sa $\frac{d^n y}{dt^n}$ da bi se dobilo:

$$\frac{d^n\,(y-b_n u)}{dt^n}=\frac{d^n x_1}{dt} \tag{9.80}$$

te se prva varijabla stanja definira kao:

$$x_1\equiv y-b_n\cdot u \tag{9.81}$$

odavde je izlaz sistema:

$$y=x_1+b_n\cdot u \tag{9.82}$$

Ako se (9.82) uvrsti u (9.79) i sredi dobit će se:

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dx_1}{dt}+a_0 x_1=$$

$$=(b_{n-1}-a_{n-1}b_n)\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}+\ldots+(b_1-a_1 b_n)\frac{du}{dt}+(b_0-a_0 b_n)\cdot u \tag{9.83}$$

Definiranjem prve varijable stanja – izrazom (9.81), eliminira se član $\frac{d^n u}{dt^n}$ u jednadžbi (9.79), što se vidi u izrazu (9.83). Postupak se nastavlja tako što se definira:

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = (b_{n-1} - a_{n-1}\, b_n)\frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} \tag{9.84}$$

odakle proizlazi druga varijabla stanja:

$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left[\frac{dx_1}{dt} - (b_{n-1} - a_{n-1}\, b_n)\cdot u\right] \equiv \frac{d^{n-1} x_2}{dt^{n-1}} \tag{9.85}$$

Jednadžba stanja sada glasi:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + (b_{n-1} - a_{n-1}\, b_n)\cdot u \tag{9.86}$$

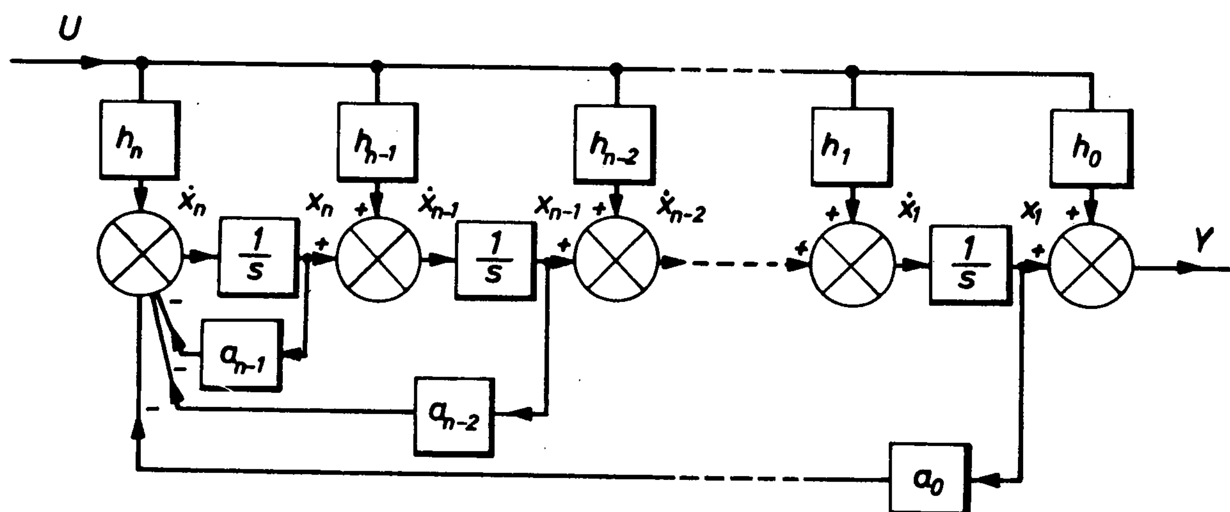
Ako se (9.86) uvrsti u (9.83) proizlazi:

$$\frac{d^{n-1} x_2}{dt^{n-1}} + a_{n-1}\frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \ldots + a_1 x_2 + a_0 x_1 =$$

$$= [(b_{n-2} - a_{n-2}\, b_n) - a_{n-1}(b_{n-1} - a_{n-1}\, b_n)]\frac{d^{n-2} u}{dt^{n-2}} + \ldots \tag{9.87}$$

Postupak se ponavlja sve dok se derivacije signala $u(t)$ ne odstrane i dok se svih n varijabli stanja ne definira.

Za $m = n$ blok-dijagram je prikazan na sl. 9.17.



Slika 9.17.

Jednadžbe stanja i izlaza:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A}\cdot\underline{x} + \underline{B}\cdot u \\ \underline{y} &= \underline{C}\cdot\underline{x} + \underline{D}\cdot \underline{u} \end{aligned} \tag{9.88}$$

imaju matrice:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{9.89}$$

$$\underline{B}=\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{n-1}-a_{n-1}\,b_n \\ b_{n-2}-a_{n-1}\cdot h_1-a_{n-2}\,b_n \\ \dots \\ b_0-a_{n-1}\,h_{n-1}-a_{n-2}\,h_{n-2}-\dots-a_0 b_n \end{bmatrix} \tag{9.90}$$

$$\underline{C}=[1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \tag{9.91}$$

$$\underline{D}=[h_0]=b_n \tag{9.92}$$

k-ta jednadžba stanja glasi:

$$\dot{x}_k=x_{k+1}+h_k\cdot u,\quad 1\leq k\leq n-1 \tag{9.93}$$

Standardni oblik jednadžbi stanja ima matricu stanja $\underline{A}$, istu kao i oblik fazne varijable, dok se ostale matrice razlikuju.

Opći postupak

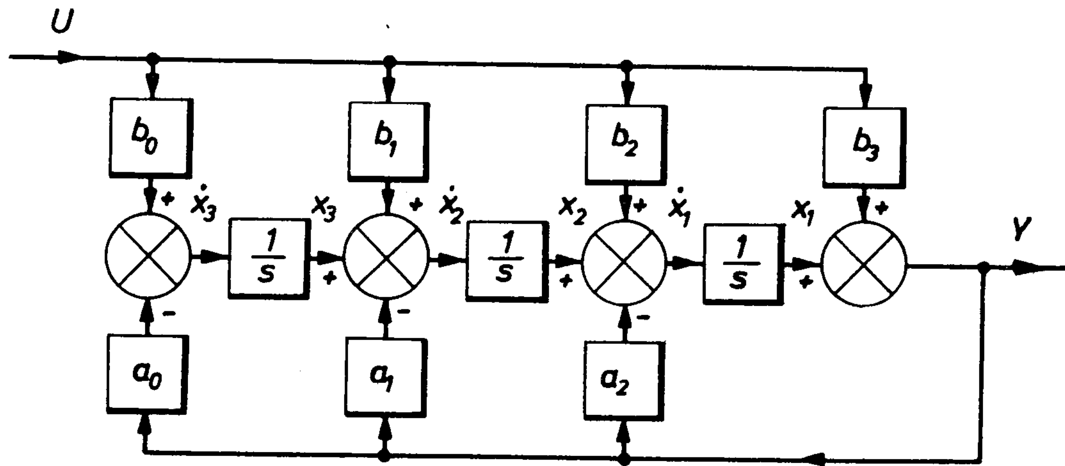
Ovaj postupak primjenjuje se za stacionarne i nestacionarne sisteme s jednim ulazom i jednim izlazom. Može se primijeniti čak i onda, kada se u diferencijalnoj jednadžbi pojavljuje derivacija ulaznog signala $u(t)$. Kao primjer može se navesti diferencijalna jednadžba III reda:

$$\frac{d^3 y}{dt^3}+a_2\frac{d^2 y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+a_0 y=b_3\frac{d^3 u}{dt}+b_2\frac{d^2 u}{dt}+b_1\frac{du}{dt}+b_0 u \tag{9.94}$$

Ako se najviša derivacija signala $y(t)$ ostavi na lijevoj strani, a sve ostalo prebaci na desnu, te izvrši integriranje tako dobivene jednadžbe onoliko puta koliki je red diferencijalne jednadžbe, dobit će se:

$$\begin{aligned} y=b_3 u+\int(b_2 u-a_2 u)\,dt+\int[\int(b_1 u-a_1 y)\,dt]\,dt+\\ +\int\{\int[\int(b_0 u-a_0 y)\,dt]\,dt\}\,dt=b_3 u+\int\{(b_2 u-a_2 y)\,dt+\\ +\int[(b_1 u-a_1 y)\,dt+\int(b_0 u-a_0 y)\,dt]\} \end{aligned} \tag{9.95}$$

Blok-dijagram jednadžbe (9.95) dan je na sl. 9.18.



Slika 9.18.

Ako se kao varijable stanja odaberu varijable s izlaza integratora, dobit će se:

$$\begin{aligned} y &= x_1 + b_3 u \\ \dot{x}_1 &= x_2 - a_2 y + b_2 u = x_2 - a_2 x_1 + (b_2 - a_2 b_3)\, u \\ \dot{x}_2 &= x_3 - a_1 y + b_1 u = x_3 - a_1 x_1 + (b_1 - a_1 b_3)\, u \\ \dot{x}_3 &= -a_0 y + b_0 u = -a_0 x_1 + (b_0 - a_0 b_3)\, u \end{aligned} \tag{9.96}$$

Jednadžbe stanja i izlaza glase:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 - a_2 b_3 \\ b_1 - a_1 b_3 \\ b_0 - a_0 b_3 \end{bmatrix} \cdot u\,(t) \tag{9.97}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + b_3 \cdot u \tag{9.98}$$

Varijable stanja dobivene na ovaj način razlikuju se od faznih varijabli. Prednost ovog postupka jest u tome što se na taj način dobiju jednostavnije matrice $\underline{A}$ i $\underline{B}$, koje se mogu direktno napisati iz diferencijalne jednadžbe sistema. Matrica $\underline{A}$ sadrži 1 u superdijagonali, a negativni se koeficijenti nalaze u prvom stupcu.

Ostali postupci, kao što su direktni, serijski i paralelni, obrađeni su u prethodnom dijelu dobivanja jednadžbi stanja iz prijenosne funkcije.

Na osnovi do sada izloženog može se reći da se matematički model stanja, odnosno izbor skupa varijabli stanja(vektor stanja) nekog sistema, može odabrati na nebrojeno mnogo načina. Ako se jednadžbe stanja grade na osnovi analize realnog sistema, tada se najčešće kao varijable stanja mogu odabrati oni signali koji fizikalno predstavljaju skladišta energije, ili pak signali koji se mogu jednostavno mjeriti i time omogućiti praćenje početnog stanja sistema. Ako se jednadžbe stanja grade na osnovi prijenosne funkcije ili diferencijalne jednadžbe, tada su mogućnosti izbora različitih varijabli stanja vrlo velike. Često nije odmah evidentno koji izbor dovodi do najprikladnijeg i najjednostavnijeg praćenja stanja sistema.

Iz izloženih postupaka evidentno je da se za izlaznu veličinu sistema $y\,(t)$ uvijek dobije isto rješenje, neovisno o odabranom matematičkom modelu stanja.

Primjer 9.5.

Potrebno je odrediti jednadžbe stanja i jednadžbu izlaza sistema opisanog diferencijalnom jednadžbom:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=\frac{du}{dt}+3u \tag{9.99}$$

Kako je $a_1=3$, $a_0=2$, $b_2=0$, $b_1=1$ i $b_0=3$, to će se dobiti oblik fazne-varijable iz izraza (9.74) i (9.75):

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\cdot u \tag{9.100}$$

$$y=[3 \quad 1]\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\underline{O}\cdot u \tag{9.101}$$

Kanonski oblik na osnovi (9.77) i (9.78) glasi:

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\cdot u \tag{9.102}$$

$$y=[2 \quad -1]\cdot\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}+\underline{O}\cdot u \tag{9.103}$$

Standardni oblik iz izraza (9.89) do (9.92) slijedi:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\cdot u \tag{9.104}$$

$$y=[1 \quad 0]\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\underline{O}\cdot u \tag{9.105}$$

Opći je oblik:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}\cdot u(t) \tag{9.106}$$

$$y=[1 \quad 0]\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\underline{O}\cdot u \tag{9.107}$$

Na osnovi dobivenih matematičkih modela stanja sistema (9.100) do (9.107) jasno je da su vektori stanja različiti skupovi varijabli. Jedan te isti sistem može se opisati različitim varijablama stanja. Vidljivo je da svi mogući skupovi varijabli stanja moraju na neki način biti međusobno vezani. Naime, ako je poznat jedan skup varijabli stanja, tada je moguće naći neki drugi skup. Kako je već rečeno, za varijable stanja bitno je da su međusobno nezavisne veličine. Linearna nezavisnost varijabli stanja olakšava nalaženje drugih skupova varijabli stanja.

9.7. Linearna transformacija vektora stanja

Ako su $x_1, x2, \ldots, x_n$ te $x_1^*, x_2^*, \ldots. x_n^*$ dva različita skupa varijabli stanja nekog sistema, tada se može postaviti među njima odnos:

$$\begin{aligned} x_1^* &= m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + \ldots + m_{1n}x_n \\ x_2^* &= m_{21}x_1 + m_{22}x2 + \ldots + m_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^* &= m_{n1}x_1 + m_{2n}x_2 + \ldots + m_{nn}x_n \end{aligned} \qquad (9.108)$$

odnosno u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \ldots \\ x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \ldots m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} \ldots m_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ m_{n1} & m_{n2} \ldots m_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (9.109)$$

$$\underline{x}^* = \underline{M} \cdot \underline{x} \qquad (9.110)$$

$$\underline{x} = \underline{M}^{-1} \cdot \underline{x}^* \qquad (9.111)$$

Vektor stanja $\underline{x}$ transformira se u drugi vektor stanja $\underline{x}^*$ linearnom transformacijom preko matrice $\underline{M}$ – jednadžba (9.110 Također je očito da poznavanje vektora $\underline{x}^*$ dozvoljava određivanje vektora $\underline{x}$ – izraz (9.111), uz pretpostavku da postoji $\underline{M}^{-1}$, tj. ako je matrica $\underline{M}$ nesingularna matrica ($|M| \neq 0$). Prema tome može se reći: ako je $\underline{M}$ nesingularna matrica, tada je i vektor $\underline{x}^*$ definiran s (9.110) također vektor stanja. Ovo ograničenje, da matrica $\underline{M}$ mora biti nesingularna, osigurava da se nezavisnost varijabli stanja originalnog skupa prenese u nezavisnost varijabli stanja novog skupa. Ako je matrica $\underline{M}$ singularna, novi skup varijabli stanja bit će linearno zavisan i pored toga što su varijable stanja originalnog skupa bile nezavisne.

Značaj mogućnosti transformacije vektora stanja dolazi naročito do izražaja pri razradi i analizi sistema upravljanja. Čest je slučaj da jednadžbe $\underline{x} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$ i $\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} + \underline{D}\,\underline{u}$ dobivene na osnovi fizikalnog razmatranja sistema ne daju najbolji uvid u njegovu dinamiku. Naime, diferencijalna jednadžba određene varijable stanja ima oblik:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + b_{i1}u_1 + b_{i2}u_2 + \ldots + b_{im}u_m \qquad (9.112)$$

a to znači da promjena varijable x_i može biti uzrokovana linearnom kombinacijom *svih* varijabli stanja i ulaznih signala u sistem. Zbog povezanosti stanja u sistemu, teško je odavde izolirati parametre ili grupe parametara koji utječu na dinamiku određenog stanja sistema. Kada bi se odredio takav model kod kojega bi promjena varijable stanja x_i bila uzrokovana samo tom varijablom stanja x_i i ulaznim signalima u sistem, postigao bi se mnogo jednostavniji i prikladniji matematički model. Jednadžbe stanja u kanonskom (normalnom) obliku upravo predstavljaju takav matematički model. Do kanonskog oblika jednadžbi stanja moguće je doći ako se pretpostavi da se dinamika sistema $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{u}$ $\underline{y} = \underline{C} \cdot \underline{x} + \underline{D} \cdot \underline{u}$ može opisati transformiranim vektorom stanja z – izraz (9.110). Uz pretpostavku da je matrica $\underline{M}$ (koja se sada zove *modalna matrica*) nesingularna, tj. da vrijedi

$$\underline{M}^{-1}\underline{M} = \underline{M}\,\underline{M}^{-1} = \underline{I} \qquad (9.113)$$

postoji jednoznačno preslikavanje iz $\underline{x}$ u $\underline{z}$. Svaka točka u $\underline{x}$-prostoru jednoznačno određuje i određena je sa svakom točkom u $\underline{z}$-prostoru. Dinamika sistema može se pratiti u oba prostora. Iz jednadžbi stanja te (9.110) i (9.111) proizlazi:

$$\dot{x} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}u \tag{9.114}$$

$$\underline{M}\dot{\underline{z}} = \underline{A}\,\underline{M}\,\underline{z} + \underline{B}\,\underline{u} \tag{9.115}$$

$$\dot{\underline{z}} = \underline{M}^{-1}\cdot\underline{A}\cdot\underline{M}\cdot\underline{z} + \underline{M}^{-1}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u} \tag{9.116}$$

odnosno:

$$\dot{\underline{z}} = \underline{\Lambda}\cdot\underline{z} + \underline{B}_n\cdot\underline{u} \tag{9.117}$$

Jednadžba izlaza daje:

$$\underline{y} = \underline{C}\cdot\underline{x} + \underline{D}\cdot\underline{u} \tag{9.118}$$

$$\underline{y} = \underline{C}\cdot\underline{M}\cdot\underline{z} + \underline{D}\cdot\underline{u} \tag{9.119}$$

$$\underline{y} = \underline{C}_n\cdot\underline{z} + \underline{D}\cdot\underline{u} \tag{9.120}$$

Matrica sistema postaje kanonska matrica:

$$\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0\ldots 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0\ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\ldots\lambda_n \end{bmatrix} = \underline{M}^{-1}\cdot\underline{A}\cdot\underline{M} \tag{9.121}$$

Matrica upravljanja glasi:

$$\underline{B}_n = \underline{M}^{-1}\cdot\underline{B} \tag{9.122}$$

Ovom transformacijom postiglo se međusobno odvajanje varijabli stanja. Nove varijable stanja ($\underline{z}$) tvore koordinatne osi (kanonske ili normalne koordinate) novog prostora u kojem je promjena određene varijable stanja ovisna o toj varijabli stanja i upravljajućim signalima sistema – jednadžbe (9.123).

$$\frac{dz_i}{dt} = \lambda_i z_i + b_{n_{i_1}} u_1 + \ldots + b_{n_{i_m}} u_m \tag{9.123}$$

Takav matematički model daje bolji uvid u ponašanje sistema, budući da je jednostavnije pojedinačno praćenje svakog stanja. Analiza, pa i sinteza sistema, prema tome je olakšana. Jedina poteškoća ostaje, međutim, u nalaženju matrice M – *modalne matrice*, što i predstavlja jedan od najvažnijih problema linearne algebre. Na kraju ovog vrlo kratkog osvrta na kanonsku transformaciju potrebno je podsjetiti se da je sve rađeno uz pretpostavku jednostrukih polova.

Postojanje višestrukih i konjugirano-kompleksnih polova unosi nove elemente koji će se obraditi kasnije.

9.8. Rješenje jednadžbi stanja

U prethodnim poglavljima obrađivani su postupci matematičkog opisa sistema pomoću varijabli stanja. O rješavanju takvih jednadžbi bit će riječi u ovom dijelu. Opći postupak rješavanja takvih jednadžbi razrađen je za linearne stacionarne sisteme opisane sa:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\cdot\underline{x}(t) + \underline{B}\cdot\underline{u}(t) \qquad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \tag{9.124}$$

gdje su $\underline{A}$ i $\underline{B}$ matrice konstanti, a $\underline{x}_0$ početni vektor stanja.

Model stanja daje više informacija o sistemu od prijenosne funkcije. Prijenosna funkcija daje ulazno-izlaznu dinamiku sistema, a model stanja osim te informacije daje i ovisnost ponašanja sistema o početnom stanju. Važnost takvog matematičkog modela sistema je velika.

Pretpostavlja se da je početno stanje, bez gubitaka općenitosti, stanje u trenutku $t=0$, što i nije uvijek slučaj. To se može pretpostaviti, budući se razmatraju stacionarni sistemi (konstantni parametri) za koje vrijedi da je promjena stanja neovisna o početnom trenutku. Ona ovisi samo o duljini intervala u kojem djeluje upravljajući signal.

Odziv svakog sistema sastoji se iz dviju komponenti: a) slobodni odziv i b) prinudni odziv.

Slobodni odziv jest odziv sistema nastao zbog djelovanja početnog stanja (početnih uvjeta) sistema. Početno stanje predstavlja akumuliranu energiju u sistemu do trenutka promatranja.

Prinudni odziv jest odziv sistema nastao kao rezultat djelovanja upravljajućih signala na sistem, bez utjecaja početnog stanja. Na osnovi izloženog, rješenje skalarne diferencijalne jednadžbe:

$$\dot{x}=ax+bu, \tag{9.125}$$

ima oblik:

$$x=x_h+x_p \tag{9.126}$$

gdje je x_h rješenje homogene jednadžbe $\dot{x}=ax$ sa $x(0)=x_0$, dok je x_p partikularno rješenje nehomogene jednadžbe (9.125).

Ako se pretpostavi da homogeno rješenje ima oblik beskonačnog reda po varijabli t:

$$x_h=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_it^i+\ldots \tag{9.127}$$

tada će ono uvršteno u jednadžbu (9.125) za $u(t)=0$ davati identitet za vrijednost t:

$$a_1+2a_2t+3a_3t^2+\ldots=a(a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots) \tag{9.128}$$

odnosno:

$$\begin{aligned} a_1&=aa_0\\ a_2&=\frac{1}{2}aa_1=\frac{1}{2}a^2a_0\\ a_3&=\frac{1}{3}aa_2=\frac{1}{3\cdot 2}a^3a_0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_i&=\frac{1}{i!}a^i\cdot a_0 \end{aligned} \tag{9.129}$$

Kada $t\to 0$ tada iz (9.127) proizlazi da $a_0\to x_0$. Prema tome rješenje homogene diferencijalne jednadžbe glasi:

$$x_h=\left(1+at+\frac{1}{2!}a^2t^2+\ldots+\frac{1}{i!}a^it^i+\ldots\right)\cdot x_0 \tag{9.130}$$

Izraz unutar zagrade u jednadžbi (9.130) predstavlja razvoj funkcije e^{at} u red, te slijedi da je rješenje homogene diferencijalne jednadžbe:

$$x_h = e^{at} \cdot x_0 \tag{9.131}$$

Za partikularno rješenje može se jednim od postupaka (npr. metodom varijacije konstante) odrediti rješenje u obliku:

$$x_p = e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} \cdot b \cdot u(\tau)\, d\tau \tag{9.132}$$

Opće rješenje jednadžbe (9.125) glasi:

$$x = e^{at} \cdot x_0 + e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} \cdot b \cdot u(\tau)\, d\tau \tag{9.133}$$

Homogeno rješenje ne ovisi o upravljajućem signalu $u(t)$ *već samo o početnom stanju* x_0, te predstavlja slobodni odziv sistema. Partikularno rješenje neovisno je o početnom stanju, ali ovisi o signalu upravljanja u intervalu 0 do t, pa predstavlja prinudni odziv sistema.

Slobodan odziv sistema

Analogno rješavanju skalarne homogene diferencijalne jednadžbe, pristupa se rješavanju vektorske homogene diferencijalne jednadžbe:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} \quad \text{uz} \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \tag{9.134}$$

Ako se rješenje pretpostavi u obliku vektorskog reda po rastućim potencijama skalarne varijable t, tj.:

$$\underline{x} = \underline{a}_0 + \underline{a}_1 t + \underline{a}_2 t^2 + \ldots + \underline{a}_i t^i + \ldots \tag{9.135}$$

Identitet tada glasi:

$$\underline{a}_1 + 2\underline{a}_2 t + 3\underline{a}_3 t^2 + \ldots = \underline{A}\,(\underline{a}_0 + \underline{a}_1 t + \underline{a}_2 t^2 + \ldots) \tag{9.136}$$

Da bi jednadžba (9.136) bila zadovoljena, mora biti:

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 &= \underline{A}\,\underline{a}_0 \\ \underline{a}_2 &= \frac{1}{2!}\underline{A}^2 \cdot \underline{a}_0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{a}_i &= \frac{1}{i!} A^i \cdot \underline{a}_0 \end{aligned} \tag{9.137}$$

kako po analogiji slijedi da $\underline{a}_0$ mora biti $\underline{x}_0$ da bi rješenje (9.135) težilo pravom početnom stanju kada $t \to 0$, to se rješenje homogene jednadžbe može napisati u obliku:

$$\underline{x} = \left(\underline{I} + \underline{A}\,t + \frac{1}{2!}\underline{A}^2 t^2 + \ldots + \frac{1}{i!}\underline{A}^i t^i + \ldots\right) \cdot \underline{x}_0 \tag{9.138}$$

Izraz unutar zagrade je $n \times n$ matrica, koja zbog formalne sličnosti s razvojem skalarne eksponencijalne funkcije u red ima naziv *eksponencijalna matrica* $e^{\underline{A}t}$:

$$e^{\underline{A}t} \overset{\text{def}}{=} \underline{I} + \underline{A}t + \frac{1}{2!}\underline{A}^2 t^2 + \ldots + \frac{1}{i!}\underline{A}^i t^i + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underline{A}^k \cdot t^k}{k!} \tag{9.139}$$

Matrični red (9.139) apsolutno i uniformno konvergira za svaki konačni t. Rješenje vektorske homogene diferencijalne jednadžbe prema tome ima oblik:

$$\underline{x} = e^{\underline{A}t} \cdot \underline{x}_0 \tag{9.140}$$

Promotri li se da je $e^{\underline{A}t}$ $n \times n$ matrica, tada se može jednadžbu (9.140) promatrati kao linearnu transformaciju, po kojoj se početno stanje $\underline{x}_0$ transformira u novo stanje $\underline{x}$. Matrica $e^{\underline{A}t}$ označava se sa $\underline{\Phi}(t)$ i zove *prijelazna matrica stanja ili temeljna matrica*. Prijelazna matrica stanja opisuje zapravo zakon po kojem se odigrava prijelaz iz početnog u neko drugo stanje. Za linearne stacionarne sisteme osnovna svojstva prijelazne matrice stanja glase:

1. $$\underline{\Phi}(0) = e^{\underline{A}0} = \underline{I} \tag{9.141}$$

2. $$\underline{\Phi}(t) = e^{\underline{A}t} = (e^{-\underline{A}t})^{-1} = [(\underline{\Phi}(-t)]^{-1} \tag{9.142}$$

$$\underline{\Phi}^{-1}(t) = \underline{\Phi}(-t) \tag{9.143}$$

3. $$\underline{\Phi}(t_1 + t_2) = e^{\underline{A}(t_1+t_2)} = e^{\underline{A}t_1} \cdot e^{\underline{A}t_2} = \underline{\Phi}(t_1)\,\underline{\Phi}(t_2) = \\ = \underline{\Phi}(t_2)\,\underline{\Phi}(t_1) \tag{9.144}$$

4. $$[\underline{\Phi}(t)]^n = \underline{\Phi}(nt) \tag{9.145}$$

5. $$\underline{\Phi}(t_2 - t_1)\,\underline{\Phi}(t_1 - t_0) = \underline{\Phi}(t_2 - t_0) = \underline{\Phi}(t_1 - t_0)\,\underline{\Phi}(t_2 - t_1) \tag{9.146}$$

Homogena jednadžba sistema u kanonskom obliku glasi:

$$\dot{\underline{z}} = \underline{\Lambda} \cdot \underline{z} \tag{9.147}$$

Uz:

$$e^{\underline{\Lambda}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots\ldots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad i \quad \underline{z}(0) = \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ \vdots \\ z_n(0) \end{bmatrix}$$

iz (9.140) i (9.147) proizlazi:

$$z(t) = e^{\underline{\Lambda}t} \cdot \underline{z}(0)$$

Matrica $e^{\underline{\Lambda}t}$ ima naziv *modalna prijelazna matrica*, a njeni dijagonalni elementi su *karakteristična ponašanja sistema*.

$$\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \; z_1(0) \\ e^{\lambda_2 t} \cdot z_2(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \cdot z_n(0) \end{bmatrix} \tag{9.148}$$

Karakteristična vrijednost

U homogenoj jednadžbi $\dot{\underline{x}}=\underline{A}\cdot\underline{x}$ su $\dot{\underline{x}}$ i $\underline{x}$ vektori, a matrica $\underline{A}$ je kvadratna n-tog reda. Jedno od rješenja takve jednadžbe postoji ako su vektori $\underline{x}$ i $\dot{\underline{x}}$ istog smjera u prostoru stanja, ali se razlikuju u duljini za neki faktor proporcionalnosti λ. U tom slučaju vrijedi rješenje $\dot{\underline{x}}=\lambda\cdot\underline{x}$, tj.:

$$\lambda\cdot\underline{x}=\underline{A}\cdot\underline{x} \tag{9.149}$$

odakle

$$[\lambda\underline{I}-\underline{A}]\cdot\underline{x}=\underline{0} \tag{9.150}$$

Rješenje jednadžbe (9.150) netrivijalno je kada je $\underline{x}\neq\underline{0}$ te proizlazi da matrica $[\lambda\underline{I}-\underline{A}]$ mora biti singularna matrica. Ako je matrica $[\lambda\underline{I}-\underline{A}]$ nesingularna, to povlači za sobom da matrica $\underline{x}$ mora biti singularna (ne postoji $\underline{x}^{-1}$ ili $|\underline{x}|=0$) da bi jednadžba (9.149) bila zadovoljena. Međutim, to ne može biti, budući da je $\underline{x}$ vektor stanja. Prema tome, ako je $[\lambda\underline{I}-\underline{A}]$ singularna, tada slijedi da determinanta koeficijenta od $\underline{x}$ mora biti jednaka nuli:

$$N(\lambda)\equiv|\lambda\underline{I}-\underline{A}|=0 \tag{9.151}$$

Kada je $\underline{A}$ n-tog reda tada se izraz:

$$N(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0=0 \tag{9.152}$$

naziva *karakterističnom jednadžbom* matrice $\underline{A}$, dok se korijeni karakteristične jednadžbe nazivaju *karakterističnim vrijednostima* (eigenvalue). Jedno od osnovnih svojstava karakterističnih vrijednosti jest da su one invarijantne na linearne transformacije. Karakteristične vrijednosti sistema ostaju iste, bez obzira u kojem se koordinatnom prostoru stanja razmatra sistem. To se može pokazati na slučaju normalnog (kanonskog) prostora stanja ($\underline{z}$) i nekog drugog prostora ($\underline{x}$) stanja.

Karakteristična jednadžba originalnog sistema glasi:

$$|\lambda\underline{I}-\underline{A}|=0 \tag{9.153}$$

Karakteristična jednadžba transformiranog sistema ima oblik:

$$|\lambda\underline{I}-\underline{\Lambda}|=0 \tag{9.154}$$

gdje je $\underline{\Lambda}$ dana izrazom (9.121).

Kako je $\underline{M}^{-1}\cdot\underline{M}=\underline{I}$ i $\underline{I}\cdot\underline{I}=\underline{I}$, to iz (9.154) proizlazi:

$$|\lambda\cdot\underline{M}^{-1}\cdot\underline{I}\cdot\underline{M}-\underline{M}^{-1}\cdot\underline{A}\cdot\underline{M}|=0 \tag{9.155}$$

odnosno:

$$|\underline{M}^{-1}(\lambda\cdot\underline{I}-\underline{A})\underline{M}|=0 \tag{9.156}$$

Budući da je determinanta produkta matrica jednaka produktu determinanata matrica to slijedi:

$$|\underline{M}^{-1}|\cdot|\lambda\underline{I}-\underline{A}|\cdot|\underline{M}|=0 \tag{9.157}$$

Uz $|\underline{M}^{-1}|\cdot|\underline{M}|=|\underline{I}|=1$, karakteristična jednadžba transformiranog sistema dana izrazom (9.154) jednaka je karakterističnoj jednadžbi originalnog sistema, što proizlazi iz (9.157):

$$|\lambda\underline{I}-\underline{A}|=0 \tag{9.158}$$

Karakteristični vektor

Pri određivanju karakterističnog vektora polazi se od pretpostavke da neki sistem ima n različitih jednostrukih karakterističnih vrijednosti, što je opravdano, jer se sistem s višestrukim karakterističnim vrijednostima može uvijek po volji točno aproksimirati sa sistemom koji ima jednostruke karakteristične vrijednosti.

Homogeno rješenje vektorske diferencijalne jednadžbe $\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x}$ sadrži eksponencijalne članove $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$ i može se predstaviti:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= m_{11}e^{\lambda_1 t} + \ldots + m_{1n}e^{\lambda_n t} \\ x_2(t) &= m_{21}e^{\lambda_1 t} + \ldots + m_{2n}e^{\lambda_n t} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(t) &= m_{n1}e^{\lambda_1 t} + \ldots + m_{nn}e^{\lambda_n t} \end{aligned} \tag{9.159}$$

Koeficijenti m_{ij} pokazuju kolik je utjecaj pojedinih eksponencijalnih članova u rješenju. Ako se uzme:

$$\underline{e}^{\lambda t} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad \text{te} \quad \underline{M} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} m_{11} \ldots m_{1n} \\ \ldots\ldots \\ m_{n1} \ldots m_{nn} \end{bmatrix}$$

tada se može (9.159) napisati u obliku:

$$\underline{x}(t) = \underline{M} \cdot \underline{e}^{\lambda t} \tag{9.160}$$

Kako rješenje jednadžbe $\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x}$ ovisi o n nezavisnih početnih uvjeta $\underline{x}_0$ – izraz (9.140), to će prema tome postojati n stupnjeva slobode u izboru n^2 elemenata m_{ij}. Ako je moguće između n^2 elemenata m_{ij}, naći n linearno nezavisnih grupa, tada je moguće izraziti sva $\underline{x}$ rješenja pomoću tih grupa. Postoji beskonačno mnogo mogućnosti izbora koji bi bili prihvatljivi s tog stajališta. Prikladan je izbor kad se uzmu stupci matrice $\underline{M}$. Pri tome se n grupa ili vektora, koji se mogu tako dobiti nazivaju *karakterističnim vektorima (eigenvector)* $\underline{m}_1, \underline{m}_2, \ldots, \underline{m}_n$, definirani sa:

$$\underline{m}_j \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} m_{1j} \\ m_{2j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{bmatrix} \quad \text{za } j = 1, 2, \ldots, n \tag{9.161}$$

Iz (9.159) proizlazi da će svaki karakteristični vektor $\underline{m}_j$ biti vezan za samo jednu karakterističnu vrijednost λ_j. Rješenje (9.159) može se dati u obliku:

$$\underline{x}(t) = \underline{m}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + \underline{m}_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + \ldots + \underline{m}_n \cdot e^{\lambda_n t} \tag{9.162}$$

Ako je (9.162) rješenje jednadžbe $\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x}$, tada je očito da i svaki član iz (9.162) također mora zadovoljavati tu jednadžbu, te proizlazi:

$$\lambda_j \underline{m}_j e^{\lambda_j t} = \underline{A}\,\underline{m}_j e^{\lambda_j t} \quad \text{za} \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{9.163}$$

odavde:

$$\lambda_j \underline{m}_j = \underline{A} \cdot \underline{m}_j \quad \text{za} \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{9.164}$$

odnosno:

$$[\lambda_j \underline{I} - \underline{A}]\, \underline{m}_j = \underline{0} \quad \text{za} \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{9.165}$$

Na taj način mogu se proračunavati karakteristični vektori. Jednadžba (9.165) predstavlja skup od n homogenih linearnih algebarskih jednadžbi od kojih svaka ima n nepoznanica m_{1j}, $m_{2j}, \ldots, m_{nj}$. Skup homogenih jednadžbi ima ili trivijalno rješenje kada su svi $m_{nj} = 0$, ili beskonačno mnogo rješenja. U ovom drugom slučaju rješenje je svaki vektor koji ima pravilan smjer (bez obzira na „duljinu"). Netrivijalna rješenja dobit će se samo onda ako je $|\lambda_j \underline{I} - \underline{A}| = 0$. Kako je karakteristična vrijednost λ_j rješenje ove karakteristične jednadžbe, to će za svaki λ_j vektor $\underline{m}_j$ određen iz (9.165) imati određen smjer i duljinu po izboru.

Primjer 9.6.

Potrebno je odrediti karakteristične vektore za sistem:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Karakteristične vrijednosti mogu se naći iz:

$$|\lambda \underline{I} - \underline{A}| = 0$$

odavde:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 3) - 8 = 0$$

te su $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 5$.

Iz (9.164) proizlazi:

$$-1 \cdot \underline{m}_1 = \underline{A} \cdot \underline{m}_1 \Rightarrow -1 \cdot \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix}$$

te

$$5 \cdot \underline{m}_2 = \underline{A} \cdot \underline{m}_2 \Rightarrow 5 \cdot \begin{bmatrix} m_{12} \\ m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{12} \\ m_{22} \end{bmatrix} \tag{9.166}$$

Iz vektorskih jednadžbi (9.166) proizlaze karakteristični vektori:

$$\underline{m}_1 = \begin{bmatrix} m_{11} \\ -m_{11} \end{bmatrix} \qquad \underline{m}_2 = \begin{bmatrix} m_{12} \\ 2m_{12} \end{bmatrix}$$

Duljina karakterističnih vektora može se odrediti samo ako se poznaju početni uvjeti. Često se u numeričkim proračunima koristi promjena mjerila (množenje s prikladnim brojem) da bi se dobila neka prikladna veličina vektora (npr. 1). Promjena mjerila (normaliziranje) ima svrhu da se, ako je moguće, poveća točnost i pojednostavni numerički proračun na digitalnom računalu. Naime, množenje stupca matrice $\underline{M}$

s nekim brojem ne mijenja svojstva te matrice. Normaliziranje karakterističnog vektora na jediničnu duljinu daje jedinične karakteristične vektore $\hat{\underline{m}}_1$ i $\hat{\underline{m}}_2$. Uz $||\underline{m}_j|| = \sqrt{m_{1j}^2 + m_{2j}^2 + \ldots + m_{nj}^2} = 1$, te $\sqrt{m_{11}^2 + (-m_{11})^2} = 1 \Rightarrow m_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i $\sqrt{m_{12}^2 + (2m_{12})^2} = 1 \Rightarrow m_{12} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ slijedi:

$$\hat{\underline{m}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad \hat{\underline{m}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Rješenje $\underline{x}$ glasi:

$$\underline{x}(t) = \alpha_1 \hat{\underline{m}}_1 e^{-t} + \alpha_2 \hat{\underline{m}}_2 e^{5t} \tag{9.167}$$

Skalarni koeficijenti α_1 i α_2 mogu se odrediti ako je poznato početno stanje sistema. Za taj slučaj može se uzeti da je:

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9.168}$$

Iz jednadžbe (9.167) proizlazi:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \tag{9.169}$$

Iz (9.169) dobit će se:

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}, \qquad \alpha_2 = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

Slobodan odziv sistema sada glasi:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1/_3 \\ -{}^1/_3 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} {}^2/_3 \\ {}^4/_3 \end{bmatrix} e^{5t} \tag{9.170}$$

te su karakteristični vektori:

$$\underline{m}_1 = \begin{bmatrix} {}^1/_3 \\ -{}^1/_3 \end{bmatrix}, \qquad \underline{m}_2 = \begin{bmatrix} {}^2/_3 \\ {}^4/_3 \end{bmatrix}$$

Karakteristične vektore moguće je odrediti i eksplicitno iz matrica $[\lambda_j \underline{I} - \underline{A}]$. Ako se uzme da je:

$$\underline{N} = \lambda_j \underline{I} - \underline{A} \tag{9.171}$$

te znajući da je $|\lambda_j \underline{I} - \underline{A}| = 0$ dobit će se da je:

$$[\lambda_j \underline{I} - \underline{A}] \cdot \text{adj}[\lambda_j \underline{I} - \underline{A}] = \underline{0} \qquad (9.172)$$

Usporedbom (9.172) s (9.165) proizlazi da će se karakteristični vektor dobiti, ako se uzme bilo koji stupac (različit od nula) adjungirane matrice $[\lambda_j \underline{I} - \underline{A}]$:

$$\underline{m}_j = \text{stupac od adj.}[\lambda_j \underline{I} - \underline{A}] \qquad (9.173)$$

Slobodan odziv pomoću Laplaceove transformacije

Ako se na diferencijalnu jednadžbu stanja slobodnog sistema $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x}$ primijeni Laplaceova transformacija dobit će se:

$$s\underline{X}(s) - \underline{x}(0) = \underline{A} \cdot \underline{X}(s) \qquad (9.174)$$

gdje je $\mathsf{L}\{\underline{x}(t)\} = \underline{X}(s)$ ... oznaka za vektor u L domeni.
Jednadžbu (9.174) moguće je svesti na oblik:

$$[s\underline{I} - \underline{A}]\,\underline{X}(s) = \underline{x}(0) \qquad (9.175)$$

Iz (9.175) proizlazi rješenje homogene diferencijalne jednadžbe u Laplaceovu području:

$$\underline{X}(s) = [s\underline{I} - \underline{A}]^{-1} \cdot \underline{x}(0) \qquad (9.176)$$

Inverznom Laplaceovom transformacijom svakog elementa u matričnoj jednadžbi (9.176) dobit će se:

$$\underline{x}(t) = \mathsf{L}^{-1}\{[s\underline{I} - \underline{A}]^{-1}\}\ \underline{x}(0) \qquad (9.177)$$

Ako se usporedi (9.177) s (9.140) proizlazi da je prijelazna matrica stanja:

$$\underline{\Phi}(t) = \mathsf{L}^{-1}\{[s\underline{I} - \underline{A}]^{-1}\} \qquad (9.178)$$

Laplaceova transformacija prijelazne matrice stanja naziva se *resolventnom matricom* $\underline{\Phi}(s)$:

$$\underline{\Phi}(s) = [s\underline{I} - \underline{A}]^{-1} \qquad (9.179)$$

Nazivnik resolventne matrice je $|s\underline{I} - \underline{A}|$ i naziva se karakteristični polinom. Taj karakteristični polinom jednak je polinomu u nazivniku prijenosne funkcije nekog sistema $G_0(s)$. Polovi prijenosne funkcije prema tome su rješenja karakteristične jednadžbe $|s\underline{I} - \underline{A}| = 0$:

$$\begin{aligned} |s\underline{I} - \underline{A}| &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \\ &= (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\ldots(s-\lambda_n) = 0 \end{aligned} \qquad (9.180)$$

gdje su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ karakteristične vrijednosti (eigenvalue) jednake polovima sistema. Za razliku od direktnog „klasičnog“ analitičkog postupka računanja odziva, koji je prikladniji za računalo, indirektni postupak (Laplaceovom transformacijom) mnogo je lakši, budući da se L-transformacijom diferencijalna jednadžba transformira u algebarsku koja se tada lakše rješava. Zbog toga se L-transformacija vrlo često koristi u analizi sistema kada se žele odrediti elementi prijelazne matrice $\underline{\Phi}(t)$.

Primjer 9.7.

Za sistem s jednadžbom stanja
$$\dot{x}_1 = -8x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - 6x_2 \tag{9.181}$$
potrebno je odrediti resolventnu i prijelaznu matricu stanja.

Laplaceova transformacija jednadžbi (9.181) daje:
$$\begin{aligned} sX_1(s) - x_1(0) &= -8X_2(s) \\ sX_2(s) - x_2(0) &= X_1(s) - 6X_2(s) \end{aligned} \tag{9.182}$$
Sređenjem (9.182) proizlazi:
$$\begin{bmatrix} s & 8 \\ -1 & s+6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \tag{9.183}$$
Iz (9.183) dobit će se:
$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{s+6}{(s+2)(s+4)} & \dfrac{-8}{(s+2)(s+4)} \\ \dfrac{1}{(s+2)(s+4)} & \dfrac{s}{(s+2)(s+4)} \end{bmatrix}}_{\underline{\Phi}(s)} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \tag{9.184}$$
Inverznom Laplaceovom transformacijom jednadžbe (9.184) proizlazi:
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-4t} & -4e^{-2t} + 4e^{-4t} \\ \dfrac{1}{2}e^{-2t} - \dfrac{1}{2}e^{-4t} & -e^{-2t} + 2e^{-4t} \end{bmatrix}}_{\underline{\Phi}(t)} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \tag{9.185}$$
Resolventna matrica uočljiva je u jednadžbi (9.184), a također i prijelazna matrica stanja u izrazu (9.185).

Primjer 9.8.

Potrebno je odrediti odziv slobodnog sistema zadanog izrazom:
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \text{uz } \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
Odziv sistema pomoću L-transformacije može se tražiti u obliku (9.175), odnosno (9.176):
$$\underline{X}(s) = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{X}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s-1} & 0 \\ \dfrac{1}{(s-1)^2} & \dfrac{1}{s-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9.186}$$

Inverznom Laplaceovom transformacijom izraza (9.186) proizlazi:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t(t+1) \end{bmatrix} \qquad (9.187)$$

Problem se mogao riješiti i direktnim postupkom. Zato je najprikladnije koristiti se digitalnim računalom. Rješenje je oblika:

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t} \cdot \underline{x}(0)$$

te kako je $e^{\underline{A}t} = \underline{I} + \underline{A}t + \frac{1}{2} \cdot \underline{A}^2 \cdot t^2 + \ldots$, to će biti:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \quad \underline{A}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ itd.}$$

proizlazi:

$$e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} 1 + t + 0{,}5t^2 + \ldots & 0 \\ t + t^2 + \ldots & 1 + t + 0{,}5t^2 + \ldots \end{bmatrix}$$

Rješenje sistema glasi:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + t + \frac{1}{2} t^2 + \ldots \\ 1 + 2t + 1{,}5t^2 + \ldots \end{bmatrix} \qquad (9.188)$$

Rješenje svake komponente vektora $\underline{x}$ dobije se u obliku reda (9.188). Rješenje odziva sistema preko $e^{\underline{A}t}$ *asimptotski* se približava rješenju $\underline{x}$ kad je t malo. Ono je to točnije, što je manji t. Ako je potrebno da ono bude u određenim granicama točnosti unutar intervala $0 < t < t_f$, tada treba uzeti više članove reda. Što je dulji interval t_f, to je veći i broj članova koje treba uzeti u obzir. Digitalno računalo pogodno je za takve proračune. Za proračun $e^{\underline{A}t}$ zahtijevaju se samo dvije operacije – skalarno množenje i zbrajanje. Zbog toga je programiranje problema $e^{\underline{A}t}$ relativno jednostavno. Najveći problem ostaje određivanje procedure po kojoj će računalo moći odlučiti kada će odbaciti više članove reda. Ako se uzme skalarni slučaj:

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2}(at)^2 + \ldots + \frac{1}{k!}(at)^k + R(k, t) \qquad (9.189)$$

tada se računalo može programirati na taj način da proračunava i dodaje stalno nove članove, sve dok se konačno ne zbroji k članova reda, tj. kada ostatak $R(k, t)$ ne postane manji od unaprijed predviđene vrijednosti (točnosti aproksimacije). Situacija je slična u matričnom slučaju tako što je ovdje $\underline{R}(k, t)$ matrica $n \times n$ reda. Proračun matričnog reda vrši se pribrajanjem članova sve dok matrica $\underline{R}(k, t)$ ne postigne određenu vrijednost. Za ocjenu veličine kod matrica služi *norma matrice* koja je skalarna veličina, tj. mjera apsolutne amplitude svih n^2 elemenata u matrici. Ako se norma definira kao $\|\underline{X}\| \overset{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^2$, (potrebno je napomenuti da osim ove postoje i

druge definicije norme) tada računalo proračunava i zbraja elemente reda $e^{\underline{A}t}$ uz kontinuirano praćenje norme $\|\underline{R}(k, t)\|$, te zaustavlja daljnji proračun kada norma dostigne željenu vrijednost.

Proračun prijelazne matrice stanja

Postoji nekoliko metoda za izračunavanje prijelazne matrice stanja ako je zadana matrica sistema $\underline{A}$. Najčešći su postupci koji se osnivaju na Cayley-Hamiltonovu teoremu, Sylvesterovu teoremu, pomoću L-transformacije, te pomoću razvoja u beskonačni red.

Postupak računanja $\underline{\Phi}(t)$, L-transformacijom pokazan je na primjeru 9.7. i 9.8. Također je u drugom dijelu primjera 9.8. pokazan postupak određivanja prijelazne matrice razvojem u red. Kada red brzo konvergira, postupak proračuna prikladan je za primjenu digitalnog računala. Kada se računalo ne koristi, najveću poteškoću predstavlja nalaženje sume reda, tj. prikaz reda u komprimiranom obliku. Kod primjene L-transformacije jedini problem predstavlja izračunavanje resolventne matrice $[s\underline{I}-\underline{A}]^{-1}$ i njezino vraćanje u vremensko područje.

Prema Cayley-Hamiltonovu teoremu svaka kvadratna matrica $\underline{A}$ zadovoljava svoju vlastitu karakterističnu jednadžbu.

Ako se skalarni polinom oblika

$$P(\lambda)=\lambda^m+C_{m-1}\cdot\lambda^{m-1}+\ldots+C_1\cdot\lambda+C_0 \tag{9.190}$$

podijeli sa karakterističnim polinomom $N(\lambda)$ dobit će se:

$$\frac{P(\lambda)}{N(\lambda)}=Q(\lambda)+\frac{R(\lambda)}{N(\lambda)}$$

ili

$$P(\lambda)=Q(\lambda)\cdot N(\lambda)+R(\lambda) \tag{9.191}$$

$R(\lambda)$ je ostatak, polinom $n-1$ reda (n je red karakterističnog polinoma). Za $\lambda=\lambda_i$ vrijednost $N(\lambda_i)=0$, pa iz (9.191) proizlazi:

$$P(\lambda_i)=R(\lambda_i) \tag{9.192}$$

Na sličan način matrični polinom koji odgovara skalarnom (9.190) s matricom $\underline{A}$ kao varijablom glasi:

$$\underline{P}(\underline{A})=\underline{A}^m+\underline{C}_{m-1}\cdot\underline{A}^{m-1}+\ldots+\underline{C}_1\cdot\underline{A}+\underline{C}_0\cdot\underline{I} \tag{9.193}$$

Karakteristična jednadžba $N(\lambda)=0$ je n-tog reda, te ima n korijena. Analogno se matrična jednadžba prema Cayley-Hamiltonovu teoremu može izraziti:

$$\underline{N}(\underline{A})=\underline{A}^n+a_{n-1}\underline{A}^{n-1}+\ldots+a_1\underline{A}+a_0\underline{I}=\underline{0} \tag{9.194}$$

Matrični polinom koji odgovara izrazu (9.191) i (9.192) glasi:

$$\underline{P}(\underline{A})=\underline{Q}(\underline{A})\cdot\underline{N}(\underline{A})+\underline{R}(\underline{A})=\underline{R}(\underline{A}) \tag{9.195}$$

Jednadžbe (9.192) i (9.195) vrijede kada je $P(\lambda)$ polinom bilo kojeg reda (može i beskonačni red) i ako je $P(\lambda)$ analitička funkcija. Eksponencijalna funkcija $P(\lambda)=e^{\lambda t}$ jedna je od funkcija koje su analitičke i koje se mogu predstaviti beskonačnim redom.

Budući da ta funkcija konvergira u području analitičnosti, može se izraziti polinomom od λ, $(n-1)$ reda. Za svaku karakterističnu vrijednost iz (9.192) proizlazi:

$$e^{\lambda_i t} = R(\lambda_i) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_i + \ldots + \alpha_k \lambda_i^k + \ldots + \alpha_{n-1} \lambda_i^{n-1} \tag{9.196}$$

n različitih karakterističnih vrijednosti sistema λ_i uvrštenih u izraz (9.196), davat će n jednadžbi s n nepoznanica α. Ako se ti koeficijenti izračunaju i uvrste u matričnu jednadžbu (9.194) dobit će se:

$$e^{\underline{A}t} = \underline{P}(\underline{A}) = \underline{R}(\underline{A}) = \alpha_0 \underline{I} + \alpha_1 \underline{A} + \ldots + \alpha_k \underline{A}^k + \ldots + \alpha_{n-1} \cdot \underline{A}^{n-1} \tag{9.197}$$

Prijelazna matrica stanja može se proračunati na osnovi izraza (9.197), odnosno:

$$\underline{\Phi}(t) = e^{\underline{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \underline{A}^k \tag{9.198}$$

Izraz (9.198) vrijedi za slučaj jednostrukih karakterističnih vrijednosti.

Primjer 9.9.

Potrebno je odrediti prijelaznu matricu primjenom Cayley-Hamiltonova teorema za sistem sa zadanom matricom sistema:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Karakteristična jednadžba sistema glasi:

$$N(\lambda) = |\lambda \underline{I} - \underline{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ 1 & \lambda+5 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

Karakteristične vrijednosti su: $\lambda_1 = -2$ i $\lambda_2 = -3$. Budući da je matrica $\underline{A}$ drugog reda, to će polinom ostatka $R(\lambda_i)$ biti:

$$P(\lambda_i) = R(\lambda_i) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_i \tag{9.199}$$

Uvrštenjem λ_1 i λ_2 u izraz (9.199) proizlazi:

$$\begin{aligned} e^{-2t} &= \alpha_0 - 2\alpha_1 \\ e^{-3t} &= \alpha_0 - 3\alpha_1 \end{aligned} \tag{9.200}$$

Koeficijenti α_0 i α_1 će biti:

$$\alpha_0 = 3e^{-2t} - 2e^{-3t}$$

$$\alpha_1 = e^{-2t} - e^{-3t}$$

Prijelazna matrica stanja će prema (9.198) biti:

$$\underline{\Phi}(t) = \alpha_0 \underline{I} + \alpha_1 \underline{A} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6\alpha_1 \\ -\alpha_1 & -5\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & 6e^{-2t} - 6e^{-3t} \\ -e^{-2t} + e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix} \tag{9.201}$$

Postupak koji se također često koristi za proračun prijelazne matrice stanja baziran je na Sylvesterovu teoremu odnosno Sylvesterovu razvoju u red. Taj postupak naročito je prikladan za digitalno računalo.

U slučaju kad je matrica $\underline{A}$, kvadratna matrica n-tog reda s n jednoznačnih karakterističnih vrijednosti, polinom $\underline{P}(\underline{A})$ se može izraziti, prema Sylvesterovu teoremu kao:

$$e^{-\underline{A}t} = \underline{P}(\underline{A}) = \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i) \cdot \underline{Z}_i(\underline{A}) \tag{9.202}$$

gdje je:

$$\underline{Z}_i(\underline{A}) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\underline{A} - \lambda_j \underline{I})}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)} \tag{9.203}$$

$$P(\lambda_i) = e^{\lambda_i t} \tag{9.204}$$

Primjer 9.10.

Za sistem s matricom stanja $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ potrebno je odrediti prijelaznu matricu $\underline{\Phi}(t)$.

Karakteristična jednadžba sistema glasi:

$$\mathrm{N}(\lambda) = |\lambda \underline{I} - \underline{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Karakteristična jednadžba sistema glasi:

Na osnovi (9.203) proizlaze matrice $\underline{Z}_1$ i $\underline{Z}_2$:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{A} - \lambda_2 \underline{I}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}{-1-(-2)} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{A} - \lambda_1 \underline{I}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}{-2-(-1)} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Budući da je $P(\lambda_i) = e^{\lambda_i t}$ proizlazi:

$$\underline{\Phi}(t) = e^{\underline{A}t} = e^{\lambda_1 t} \cdot \underline{Z}_1 + e^{\lambda_2 t} \cdot \underline{Z}_2 \tag{9.205}$$

odnosno:

$$\underline{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2(e^{-2t} - e^{-t}) \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} \tag{9.206}$$

9.9. Opće rješenje jednadžbi stanja

Rješenje vektorske homogene diferencijalne jednadžbe (9.140), slično je po formi rješenju skalarne homogene diferencijalne jednadžbe (9.131). Može se pokazati da je i opće rješenje skalarne diferencijalne jednadžbe (9.133), slično po formi općem rješenju vektorske diferencijalne jednadžbe $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{u}$. Rješenje ove jednadžbe ima oblik:

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t} \cdot \underline{x}(0) + \int e^{\underline{A}(t-\tau)} \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) \, d\tau \tag{9.207}$$

Budući da je red $e^{\underline{A}t}$ apsolutno i uniformno konvergentan za sve vrijednosti t, to se on može derivirati ili integrirati član po član:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{\underline{A}t} &= \underline{A} + \underline{A}^2 t + \frac{\underline{A}^3 t^2}{2!} + \dots \\ &= \underline{A} \left[\underline{I} + \underline{A}t + \frac{\underline{A}^2 t^2}{2!} + \dots \right] \end{aligned} \tag{9.208}$$

proizlazi da je:

$$\frac{d}{dt} e^{\underline{A}t} = \underline{A} e^{\underline{A}t}$$

Isto tako moguće je izraz (9.208) napisati:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{\underline{A}t} &= \left[\underline{I} + \underline{A}t + \frac{\underline{A}^2 t^2}{2!} + \dots \right] \cdot \underline{A} \\ &= e^{\underline{A}t} \cdot A \end{aligned} \tag{9.209}$$

Iz (9.208) i (9.209) proizlazi:

$$\frac{d}{dt} e^{\underline{A}t} = \underline{A} \cdot e^{\underline{A}t} = e^{\underline{A}t} \cdot \underline{A} \tag{9.210}$$

budući je:

$$e^{\underline{0}} = \underline{I} \tag{9.211}$$

$$e^{-\underline{A}t} \cdot e^{\underline{A}t} = e^{\underline{A}t} \cdot e^{-\underline{A}t} = \underline{I} \tag{9.212}$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{A}\,\underline{B}) = \frac{d\underline{A}}{dt} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \frac{d\underline{B}}{dt} \tag{9.213}$$

bit će:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[e^{-\underline{A}t} \cdot \underline{x}] &= \left(\frac{d}{dt} e^{-\underline{A}t} \right) \cdot \underline{x} + e^{-\underline{A}t} \cdot \dot{\underline{x}} \\ &= -e^{-\underline{A}t} \cdot \underline{A} \cdot \underline{x} + e^{-\underline{A}t} \cdot \dot{\underline{x}} \end{aligned} \tag{9.214}$$

Ako se jednadžbu stanja $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u}$ pomnoži s $e^{-\underline{A}t}$, dobit će se:

$$e^{-\underline{A}t} \cdot \dot{\underline{x}} = e^{-\underline{A}t} \cdot \underline{A} \cdot \underline{x} + e^{-\underline{A}t} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u} \tag{9.215}$$

odnosno:

$$e^{-\underline{A}t} \cdot \dot{\underline{x}} - e^{\underline{A}t} \cdot \underline{A} \cdot \underline{x} = e^{-\underline{A}t} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u} \tag{9.216}$$

$$\frac{d}{dt}[e^{-\underline{A}t} \cdot \underline{x}] = e^{-\underline{A}t} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u} \tag{9.217}$$

Integriranjem jednadžbe (9.217) od $t = t_0$ do $t = t_f$, proizlazi:

$$e^{-\underline{A}t} \cdot \underline{x} \Big|_{t_0}^{t_f} = \int_{t_0}^{t_f} e^{-\underline{A}t} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(t)\, dt \qquad (9.218)$$

$$e^{-\underline{A}t_f} \cdot \underline{x}(t_f) - e^{-\underline{A}t_0} \cdot \underline{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t_f} e^{-\underline{A}t} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(t)\, dt \qquad (9.219)$$

Iz (9.219) opće rješenje jednadžbe stanja glasi:

$$\underline{x}(t_f) = e^{\underline{A}(t_f - t_0)} \cdot \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} e^{\underline{A}(t_f - t)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(t)\, dt \qquad (9.220)$$

Jednadžba (9.220) često se susreće pod nazivom *prijelazna jednadžba stanja*. Kada je $t_0 = 0$, te kada se t_f zamijeni s t, a t sa τ kao varijablom integracije, dobit će se najčešće susretani izraz za opće rješenje (9.207).

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t} \cdot \underline{x}(0) + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau)\, d\tau \qquad (9.221)$$

Ako je sistem nestacionaran (matrica $\underline{A}$ vremenski promjenjiva), tada se ne može analitički riješiti jednadžba stanja, osim u slučaju kada matrica $\underline{A}$ zadovoljava određene zahtjeve, npr. $\underline{\dot{A}} \cdot \underline{A} = \underline{A} \cdot \underline{\dot{A}}$.

Prvi dio rješenja (9.221) predstavlja slobodan odziv, a drugi dio predstavlja prisilan odziv (partikularno rješenje) multivarijabilnog sistema. Budući da je partikularno rješenje dano konvolucijskim integralom, rješenje se (9.221) može napisati u obliku:

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t) \cdot \underline{x}(0) + \underline{\Phi}(t) * [\underline{B} \cdot \underline{u}(t)] \qquad (9.222)$$

Ako se ulazni signal sistema promatra kao $\underline{B} \cdot \underline{u}(t)$, tada prijelazna matrica stanja ima ulogu težinske funkcije stanja ili impulsnog odziva stanja sistema.

Primjer 9.11.

Potrebno je odrediti vektor stanja $\underline{x}(t)$ sistema $\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{u}$ gdje su:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -12 & 2/3 \\ -36 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{u}(t) = S(t)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Prijelazna matrica stanja može se dobiti jednim od navedenih postupaka. Ona glasi:

$$\underline{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} e^{-4t} + \frac{8}{5} e^{-9t} & \frac{2}{15}(e^{-4t} - e^{-9t}) \\ \frac{36}{5}(-e^{-4t} + e^{-9t}) & \frac{8}{5} e^{-4t} - \frac{3}{5} e^{-9t} \end{bmatrix} \qquad (9.223)$$

slobodan odziv sistema je:

$$e^{\underline{A}t}\cdot x(0)=\begin{bmatrix}\left(-\frac{16}{15}e^{-4t}+\frac{46}{15}e^{-9t}\right)\cdot S(t)\\ \left(-\frac{64}{5}e^{-4t}+\frac{69}{5}e^{-9t}\right)\cdot S(t)\end{bmatrix} \tag{9.224}$$

Prinudni odziv je:

$$e^{\underline{A}t}*\underline{B}\cdot\underline{u}(t)=\begin{bmatrix}\left(-\frac{3}{5}e^{-4t}+\frac{8}{5}e^{-9t}\right)\cdot S(t) & \frac{2}{15}(e^{-4t}-e^{-9t})\cdot S(t)\\ \frac{36}{5}(-e^{-4t}+e^{-9t})\cdot S(t) & \left(\frac{8}{5}e^{-4t}-\frac{3}{5}e^{-9t}\right)\cdot S(t)\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\frac{1}{3}S(t)\\ S(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{15}e^{-4t}\cdot S(t)*S(t)+\frac{2}{5}e^{-9t}\cdot S(t)*S(t)\\ -\frac{4}{5}e^{-4t}\cdot S(t)*S(t)+\frac{9}{5}e^{-9t}\cdot S(t)*S(t)\end{bmatrix} \tag{9.225}$$

Konvolucijski integrali u (9.225) mogu se odrediti iz tablica, te proizlazi:

$$e^{\underline{A}t}*\underline{B}\cdot\underline{u}(t)=\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{60}e^{-4t}+\frac{2}{45}e^{-9t}\right)\cdot S(t)\\ \frac{1}{5}(e^{-4t}-e^{-9t})\cdot S(t)\end{bmatrix} \tag{9.226}$$

Vektor stanja može se prema (9.222) napisati:

$$\underline{x}=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{36}-\frac{21}{20}e^{-4t}+\frac{136}{45}e^{-9t}\right)\cdot S(t)\\ \left(-\frac{63}{5}e^{-4t}+\frac{68}{5}e^{-9t}\right)\cdot S(t)\end{bmatrix} \tag{9.227}$$

Opće rješenje primjenom L-transformacije

Kada se diferencijalna jednadžba stanja sistema (9.222) rješava pomoću L-transformacije, olakšava se postupak dobivanja rješenja:

$$\dot{\underline{x}}=\underline{A}\,\underline{x}+\underline{B}\,\underline{u} \tag{9.228}$$

$$s\underline{X}(s)-\underline{x}(0)=\underline{A}\,\underline{X}(s)+\underline{B}\,\underline{U}(s) \tag{9.229}$$

$$s\underline{X}(s)-\underline{A}\,\underline{X}(s)=\underline{x}(0)+\underline{B}\,\underline{U}(s) \tag{9.230}$$

$$[s\underline{I}-\underline{A}]\,\underline{X}(s)=\underline{x}(0)+\underline{B}\,\underline{U}(s) \tag{9.231}$$

Opće rješenje u L-području glasi:

$$X(s) = [s\underline{I} - \underline{A}]^{-1} \cdot [\underline{x}(0) + \underline{B}\,\underline{U}(s)] \tag{9.232}$$

$$\underline{X}(s) = \underline{\Phi}(s) \cdot \underline{x}(0) + \underline{\Phi}(s) \cdot \underline{B} \cdot \underline{U}(s) \tag{9.233}$$

Primjer 9.12.

Za sistem iz primjera 9.11. potrebno je korištenjem L-transformacije odrediti vektor stanja $\underline{x}(t)$.

Budući da je vektor stanja dan izrazom (9.233) potrebno je odrediti resolventnu matricu da bi se odredio vektor stanja $\underline{X}(s)$.

$$[s\underline{I} - \underline{A}] = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 & \frac{2}{3} \\ -36 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+12 & -\frac{2}{3} \\ 36 & s+1 \end{bmatrix}$$

Kako je:

$$\underline{\Phi}(s) = [s\underline{I} - \underline{A}]^{-1} = \frac{\operatorname{adj}[s\underline{I} - \underline{A}]}{|s\underline{I} - \underline{A}|}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{(s+4)(s+9)} & \dfrac{^2/_3}{(s+4)(s+9)} \\ \dfrac{-36}{(s+4)(s+9)} & \dfrac{s+12}{(s+4)(s+9)} \end{bmatrix} \tag{9.234}$$

Uz $\underline{U}(s) = \dfrac{1}{s}$ proizlazi:

$$\underline{B} \cdot \underline{U}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3s} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix} \tag{9.235}$$

$$\underline{x}(0) = \underline{B}\,\underline{U}(s) = \begin{bmatrix} 2 + \frac{1}{3s} \\ 1 + \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6s+1}{3s} \\ \frac{s+1}{s} \end{bmatrix} \tag{9.236}$$

$$\underline{X}(s) = \underline{\Phi}(s) \cdot [\underline{x}(0) + \underline{B} \cdot \underline{U}(s)]$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{(s+4)(s+9)} & \dfrac{^2/_3}{(s+4)(s+9)} \\ \dfrac{-36}{(s+4)(s+9)} & \dfrac{s+12}{(s+4)(s+9)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{6s+1}{s3} \\ \dfrac{s+1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\underline{X}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{2s^2+3s+1}{s(s+4)(s+9)}\\ \dfrac{s-59}{(s+4)(s+9)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{1/36}{s}-\dfrac{21/20}{s+4}+\dfrac{136/45}{s+9}\\ \dfrac{-63/5}{s+4}+\dfrac{68/5}{s+9}\end{bmatrix} \tag{9.237}$$

L^{-1}-transformacijom izraza (9.237) proizlazi:

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(\dfrac{1}{36}-\dfrac{21}{20}e^{-4t}+\dfrac{136}{45}e^{-9t}\right)\cdot S(t)\\ \left(-\dfrac{63}{5}e^{-4t}+\dfrac{68}{5}e^{-9t}\right)\cdot S(t)\end{bmatrix} \tag{9.238}$$

Primjer 9.13.

Za sistem opisan jednadžbom stanja potrebno je odrediti odziv uz $\underline{x}(0)=\underline{0}$.

$$\dot{x}_1=-6x_1+x_2+2u$$

$$\dot{x}_2=-8x_1+16u$$

Resolventna matrica glasi:

$$\underline{\Phi}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s}{(s+2)(s+4)} & \dfrac{1}{(s+2)(s+4)}\\ \dfrac{-8}{(s+2)(s+4)} & \dfrac{s+6}{(s+2)(s+4)}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}X_1(s)\\ X_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{s}{(s+2)(s+4)} & \dfrac{1}{(s+2)(s+4)}\\ \dfrac{-8}{(s+2)(s+4)} & \dfrac{s+6}{(s+2)(s+4)}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}\dfrac{s}{(s+2)(s+4)} & \dfrac{1}{(s+2)(s+4)}\\ \dfrac{-8}{(s+2)(s+4)} & \dfrac{s+6}{(s+2)(s+4)}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2U(s)\\ 16U(s)\end{bmatrix}$$

$$X_1(s)=\frac{2s+16}{(s+2)(s+4)}\cdot U(s)$$

$$X_2(s)=\frac{16s+80}{(s+2)(s+4)}\cdot U(s) \tag{9.239}$$

Za slučaj kad je $y=x_1$, tada izraz $\frac{2s+16}{(s+2)(s+4)}$ predstavlja prijenosnu funkciju sistema.

9.10. Prijenosna matrica sistema

Analiza dinamike sistema moguća je onda kada postoji matematički model sistema. On se sastoji od jednadžbe stanja (9.240) i jednadžbe izlaza (9.241). Diferencijalna jednadžba stanja (9.240) opisuje dinamiku sistema, a algebarska jednadžba izlaža (9.241) povezuje izlaz sa stanjem sistema.

$$\dot{\underline{x}}=\underline{A}\cdot\underline{x}+\underline{B}\cdot\underline{u}, \quad \underline{x}(0)=\underline{x}_0 \tag{9.240}$$

$$\underline{y}=\underline{C}\cdot\underline{x}+\underline{D}\cdot\underline{u} \tag{9.241}$$

Broj varijabli stanja povezan je sa strukturom sistema (može biti jednak broju elemenata – skladišta energije). Broj izlaznih varijabli ovisi o projektantu koji ih bira tako da budu potrebni za praćenje ili upravljanje ili oboje.

U nekim slučajevima potrebna je unutrašnja dinamika, a u drugima zbog pomanjkanja dovoljno informacija o stanju sistema ili nezanimljivosti unutrašnjeg stanja, važnije je promatrati ulaz i izlaz sistema. Kod ulazno-izlaznog pristupa odričemo se informacije o unutrašnjem stanju sistema, zamišljajući da je unutrašnja struktura zaklonjena „crnom kutijom". Pri ovom pristupu eliminira se $\underline{x}(t)$ iz (9.240) i (9.241). Najjednostavnije je vektor stanja eliminirati u L-području kada su jednadžbe algebarske. Budući da unutrašnje stanje nije interesantno (ili je nepoznato) logično je pretpostaviti da nema početnih uvjeta, tj. $\underline{x}(0)=\underline{0}$ (inertni sistem). Proizlazi:

$$\underline{X}(s)=[s\underline{I}-\underline{A}]^{-1}\cdot\underline{B}\cdot\underline{U}(s) \tag{9.242}$$

odnosno:

$$\underline{Y}(s)=\underline{C}\cdot\underline{X}(s)+\underline{D}\cdot\underline{U}(s) \tag{9.243}$$

Uvrštenjem (9.242) u (9.243) dobit će se:

$$\underline{Y}(s)=[\underline{C}(s\underline{I}-\underline{A})^{-1}\cdot\underline{B}+\underline{D}]\cdot U(s) \tag{9.244}$$

Po analogiji sa skalarnom jednadžbom:

$$\underline{G}_0(s)=\frac{\underline{Y}(s)}{\underline{U}(s)}=\underline{C}[s\underline{I}-\underline{A}]^{-1}\cdot\underline{B}+\underline{D} \tag{9.245}$$

Izraz (9.245) zove se *prijenosna matrica sistema*. Za multivarijabilne sisteme (sistem s više ulaza i izlaza) elementi prijenosne matrice prijenosne su funkcije između svakog izlaza i svakog ulaza. Kod sistema s jednim ulazom i izlazom prijenosna matrica svodi se na prijenosnu funkciju sistema.

Primjer 9.14.

Potrebno je odrediti prijenosnu matricu sistema opisanog jednadžbama:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \tag{9.246}$$

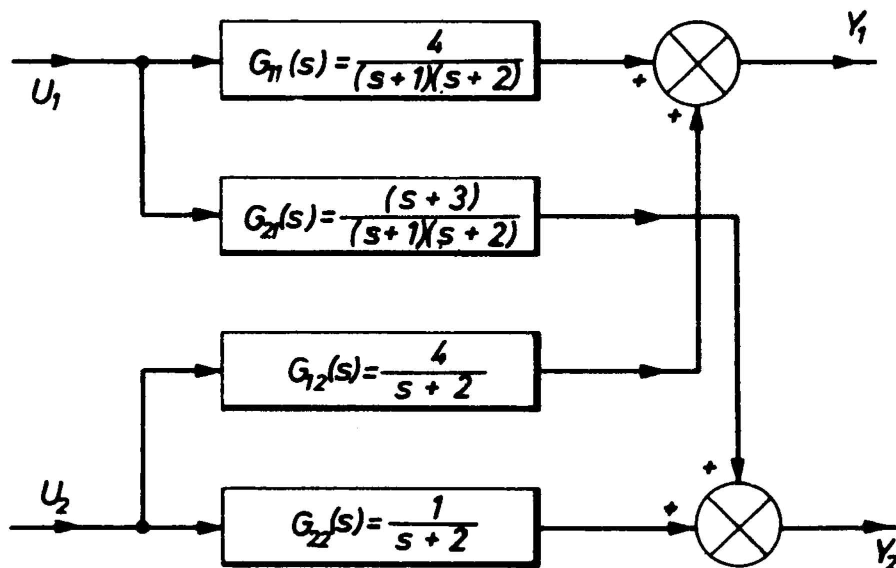
Karakteristični je polinom $\left|s\underline{I}-\underline{A}\right|=(s+1)(s+2)$. Resolventna matrica glasi:

$$\underline{\Phi}(s)=\frac{adj[s\underline{I}-\underline{A}]}{|s\underline{I}-\underline{A}|}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\cdot\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}$$

Prijenosna matrica sistema je:

$$\underline{G}(s)=\underline{C}\cdot\underline{\Phi}(s)\cdot\underline{B}=\begin{bmatrix}\dfrac{4}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{4}{s+2}\\ \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{s+2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G_{11}(s) & G_{12}(s)\\ G_{21}(s) & G_{22}(s)\end{bmatrix} \tag{9.247}$$

Blok-dijagram sistema prikazan je na sl. 9.19.



Slika 9.19.

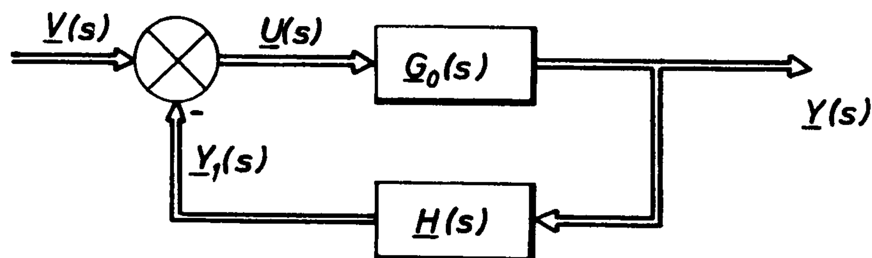
Prijenosna matrica zatvorenog sistema

Sistem na slici 9.20. je multivarijabilni sistem. Prijenosna matrica procesa ($\underline{G}_0(s)$) dana je izrazom (9.245), dok je matrica u povratnoj vezi označena s $\underline{H}(s)$.

Kako je:

$$\underline{Y}_1(s)=\underline{H}(s)\cdot\underline{Y}(s)=\underline{H}(s)\cdot\underline{G}_0(s)\cdot\underline{U}(s) \tag{9.248}$$

Iz (9.248) može se zaključiti da je prijenosna matrica serijski povezanih elemenata jednaka produktu prijenosnih matrica pojedinih elemenata. Pri tome je poredak



Slika 9.20.

elemenata vrlo važan, budući da je množenje matrica općenito nekomutativno. Prijenosna matrica zatvorenog sistema dobije se:

$$\underline{Y}(s) = \underline{G}_0(s) \cdot [\underline{V}(s) - \underline{Y}_1(s)]$$

$$= \underline{G}_0(s)[\underline{V}(s) - \underline{H}(s) \cdot \underline{Y}(s)] \qquad (9.249)$$

Iz (9.249) proizlazi:

$$[\underline{I} + \underline{G}_0(s) \cdot \underline{H}(s)]\, \underline{Y}(s) = \underline{G}_0(s) \cdot \underline{V}(s)$$

odnosno:

$$\underline{Y}(s) = [\underline{I} + \underline{G}_0(s) \cdot \underline{H}(s)]^{-1} \cdot \underline{G}_0(s) \cdot \underline{V}(s) \qquad (9.250)$$

Prijenosna matrica zatvorenog multivarijabilnog sistema glasi:

$$\underline{G}_z(s) \stackrel{def}{=} [\underline{I} + \underline{G}_0(s) \cdot \underline{H}(s)]^{-1} \cdot \underline{G}_0(s) \qquad (9.251)$$

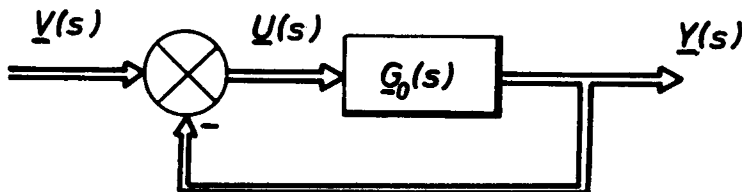
Preko prijenosne matrice zatvorenog sistema moguće je direktno izraziti izlaz sistema $\underline{Y}(s)$, kada je poznata vodeća veličina $\underline{V}(s)$. Zatvoreni sistem sa sl. 9.20. može se predstaviti jednim blokom (sl. 9.21).



Slika 9.21.

Redukcijom blok-dijagrama izgubilo se poznavanje unutrašnjeg protoka signala. Reducirani blok-dijagram vrlo je jednostavan, ali daje informacije samo o izlaznom signalu ako je poznat ulazni signal.

Ako je matrica $\underline{H}$ jedinična matrica $\underline{I}$, sistem na sl. 9.20. može se prikazati blok-dijagram kao na sl. 9.22.



Slika 9.22

Prijenosna matrica tako zatvorenog sistema glasi:

$$\underline{G}_z(s) = [\underline{I} + \underline{G}_0(s)]^{-1} \cdot \underline{G}_0(s) \qquad (9.252)$$

Matematički model zatvorenog sistema po formi je jednak matematičkom modelu otvorenog, pa se matematičke metode razvijene za rješavanje jednadžbi otvorenog sistema mogu primijeniti i na jednadžbe zatvorenog sistema.

Ako se otvoreni sistem može opisati sa:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{x}} &= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C}\,\underline{x} \end{aligned} \tag{9.253}$$

tada se zatvoreni sistem prema slici (9.22) opisuje jednadžbama:

$$\underline{u} = \underline{v} - \underline{y} \tag{9.254}$$

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} \tag{9.255}$$

Uvrštenjem (9.254) i (9.255) u (9.253) i sređenjem dobit će se:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{x}} &= (\underline{A} - \underline{B} \cdot \underline{C})\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{v} \\ \underline{y} &= \underline{C}\,\underline{x} \end{aligned} \tag{9.256}$$

Jednadžbe zatvorenog sistema (9.256) imaju isti oblik kao jednadžbe otvorenog (9.253). Zatvoreni sistem opisan je s *novom* matricom zatvorenog sistema. (Sasvim općenito i ostale matrice mogu se promijeniti).

Za navedeni slučaj koji nije općenit (u krug se mogu uključiti regulatori, povratna veza ne mora biti jedinična itd.), nova matrica stanja je $\underline{A}_z = \underline{A} - \underline{B} \cdot \underline{C}$ te je matematički model zatvorenog sistema:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{x}} &= \underline{A}_z \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{v} \\ \underline{y} &= \underline{C} \cdot \underline{x} \end{aligned} \tag{9.257}$$

Ulazni signal (signal vođenja) $\underline{v}$ ima istu ulogu kod zatvorenog sistema, kao i $\underline{u}$ kod otvorenog.

9.11. Kanonska transformacija

Dijagonalizacija matrice $\underline{A}$

U poglavlju 9.5. prikazano je da se do kanonskog oblika jednadžbi stanja može doći rastavljanjem prijenosne funkcije sistema na parcijalne razlomke. Taj postupak ograničen je na sisteme s jednim ulazom i izlazom (skalarna prijenosna funkcija) i teško je primjenjiv na multivarijabilne sisteme. U poglavlju 9.7. općenito je izložena mogućnost transformacije vektora stanja s osvrtom na specijalan slučaj – transformacije u kanonski (normalni) oblik.

Kada su karakteristične vrijednosti sistema različite, jednoznačne i realne, najčešće se koriste tri metode za dobivanje modalne matrice. Modalna matrica je ona pomoću koje se vrši pretvorba jednadžbi stanja u kanonski oblik.

I metoda

Kada je matrica $\underline{A}$ pratećeg oblika, modalna matrica je u Vandermonde obliku (Vandermondova matrica $\underline{W}$):

$$\underline{W}=\underline{M}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \tag{9.258}$$

Primjer 9.15.

Sistem zadan jednadžbom stanja i izlaza potrebno je transformirati u kanonski oblik:

$$\underline{\dot{x}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}u \tag{9.259}$$

$$\underline{y}=[3 \quad 3 \quad 1]\cdot\underline{x} \tag{9.260}$$

Karakteristične vrijednosti sistema jesu: $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=-4$. Budući da su karakteristične vrijednosti različite, a matrica $\underline{A}$ je u pratećem obliku, Vandermondova se matrica može koristiti kao modalna matrica:

$$\underline{M}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} \tag{9.261}$$

$$\underline{M}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 12 & 7 & 1 \\ -16 & -12 & -2 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}=\underline{M}^{-1}\cdot\underline{A}\cdot\underline{M}=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \tag{9.262}$$

Kanonski oblik jednadžbe stanja i izlaza glasi:

$$\underline{\dot{z}}=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\underline{z}+\begin{bmatrix} 7 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix}\underline{u} \tag{9.263}$$

$$\underline{y}=[1 \quad 3 \quad 7]\,\underline{z} \tag{9.264}$$

II metoda

Kod druge metode nije bitno da je matrica $\underline{A}$ u pratećem obliku. Modalna matrica tvori se tako da se za stupce uzimaju karakteristični vektori sistema (9.161).

Primjer 9.16.

Potrebno je odrediti kanonski oblik sistema opisanog jednadžbama.

$$\underline{\dot{x}}=\begin{bmatrix}-0,1 & 0 & 0\\ 10 & -0,2 & -0,3\\ 0 & 0,4 & -1\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 1,33\end{bmatrix}\underline{u} \tag{9.265}$$

$$\underline{y}=[0 \quad 0 \quad 1]\,\underline{x} \tag{9.266}$$

Budući da $\underline{A}$ nije pratećeg oblika, Vandermondova matrica nije modalna. Karakteristični polinom glasi:

$$|s\underline{I}-\underline{A}|=(s+0,1)(s^2+1,2s+0,32)\cdot$$
$$=(s+0,1)(s+0,4)(s+0,8)$$

Karakteristične vrijednosti su $\lambda_1=-0,1$, $\lambda_2=-0,4$ i $\lambda_3=-0,8$. Karakteristični vektor $\underline{m}_1$ koji odgovara λ_1, dobije se iz (9.173) i glasi:

$$\underline{m}_1=\text{prvi stupac od adj.}[-0,1\,\underline{I}-\underline{A}]=\begin{bmatrix}0,21\\ 9\\ 4\end{bmatrix} \tag{9.267}$$

Na sličan način:

$$\underline{m}_2=\begin{bmatrix}0\\ 3\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\underline{m}_3=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$

Modalna matrica tvori se od stupaca (karakteristični vektori te glasi:

$$\underline{M}=\begin{bmatrix}0,21 & 0 & 0\\ 9 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 2\end{bmatrix} \tag{9.268}$$

Kako je:

$$\underline{M}^{-1}=\begin{bmatrix}4,76\cdot 10^3 & 0 & 0\\ 16,7 & 0,5 & -0,25\\ 7,14 & -0,5 & 0,75\end{bmatrix} \tag{9.269}$$

Slijedi kanonski oblik jednadžbi stanja i izlaza:

$$\underline{\dot{z}}=\begin{bmatrix}-0{,}1 & 0 & 0\\ 0 & -0{,}4 & 0\\ 0 & 0 & -0{,}8\end{bmatrix}\underline{z}+\begin{bmatrix}4{,}76\cdot 10^{-2} & 0\\ 1{,}67\cdot 10^{-1} & -3{,}3\cdot 10^{-2}\\ 7{,}14\cdot 10^{-2} & 1\end{bmatrix}\underline{u} \tag{9.270}$$

$$\underline{y}=[4 \quad 2 \quad 2]\,\underline{z}$$

Kod izraza (9.267) može se postaviti pitanje je li moguće odabrati neki drugi stupac adjungirane matrice$[\lambda_j \underline{I}-\underline{A}]$ kao karakteristični vektor? Naime, prema (9.173) izlazi da je karakteristični vektor *bilo koji* supac različit od nula u matrici adj$[\lambda_j \underline{I}-\underline{A}]$. Primjerice, kada su karakteristične vrijednosti različite, svaki stupac matrice adj$[\lambda_j \underline{I}-\underline{A}]$ proporcionalan je bilo kojem drugom stupcu iste matrice. Zbog toga nije potrebno tražiti kompletnu matricu adj$[\lambda_j \underline{I}-\underline{A}]$, ako je već njen prvi stupac ispao različit od nule. Naime, svi ostali stupci razlikovat će se od prvoga samo za skalarnu konstantu – faktor proporcionalnosti.

III metoda

Ova metoda razlikuje se od druge metode u tome što se na drugi način traže karakteristični vektori, tj. elementi karakterističnog vektora. Postupak se bazira na izrazu (9.164) na osnovi kojeg je moguće razviti skup od n jednadžbi iz kojih se određuju elementi m_{ij} karakterističnih vektora $\underline{m}_j$.

Primjer 9.17.

Potrebno je sistem jednadžbi (9.271) transformirati u kanonski oblik:

$$\underline{\dot{x}}=\begin{bmatrix}-9 & 1 & 0\\ -26 & 0 & 1\\ -24 & 0 & 0\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix}2\\ 5\\ 0\end{bmatrix}\underline{u}$$

$$\underline{y}=[1 \quad 2 \quad -1]\,\underline{x} \tag{9.271}$$

Iz $|\lambda \underline{I}-\underline{A}|=0$ karakteristične vrijednosti jesu: $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=-4$. Iz (9.164) proizlazi:

$$\begin{bmatrix}-9 & 1 & 0\\ -26 & 0 & 1\\ -24 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}m_{1j}\\ m_{2j}\\ m_{3j}\end{bmatrix}=\lambda_j\begin{bmatrix}m_{1j}\\ m_{2j}\\ m_{3j}\end{bmatrix} \tag{9.272}$$

Odavde će za prvi karakteristični vektor $\underline{m}_1$ koji odgovara λ_1 biti:

$$-9m_{11}+m_{21}=-2m_{11} \tag{9.273}$$

$$-26m_{11}+m_{31}=-2m_{21} \tag{9.274}$$

$$-24m_{11} \qquad =-2m_{31} \tag{9.275}$$

Ako se m_{21} iz (9.273) i m_{31} iz (9.275) uvrste u (9.274) dobit će se $m_{11}=m_{11}$, a to znači da su samo dvije od tih jednadžbi nezavisne (rang-matrice $[\lambda_j \underline{I}-\underline{A}]$ je $n-1=2$). U

takvom slučaju potrebno je odabrati neku vrijednost za jedan od elemenata. Ako se uzme da $m_{11}=1$, tada će slijediti iz (9.273) do (9.275):

$$m_{11}=1 \quad m_{21}=7 \quad m_{31}=12 \qquad \text{odnosno} \qquad \underline{m}_1=\begin{bmatrix}1\\7\\12\end{bmatrix} \tag{9.276}$$

Ostali karakteristični vektori mogu se dobiti na sličan način:

$$\underline{m}_2=\begin{bmatrix}1\\6\\8\end{bmatrix}; \qquad \underline{m}_3=\begin{bmatrix}1\\5\\6\end{bmatrix} \tag{9.277}$$

Modalna matrica je:

$$\underline{M}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\7 & 6 & 5\\12 & 8 & 6\end{bmatrix} \tag{9.278}$$

Kanonski oblik jednadžbi je:

$$\dot{\underline{z}}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & -3 & 0\\0 & 0 & -4\end{bmatrix}\underline{z}+\begin{bmatrix}-1\\-3\\6\end{bmatrix}\underline{u} \tag{9.279}$$

$$\underline{y}=[3 \quad 5 \quad 5]\cdot\underline{z}$$

Nezavisnost samo dviju jednadžbi iz sistema (9.273) do (9.275), pokazuje da ne postoji jedno rješenje za elemente vektora $\underline{m}_1$, već da je tih rješenja beskonačno mnogo. Kada se zahtijeva određena struktura matrice $\underline{B}_n$, tada se u sistem jednadžbi (9.273) do (9.275) uključuju i dodatne jednadžbe, koje ograničavaju moguća rješenja na jedno rješenje.

Da je matrica $\underline{M}$ modalna, ako su njeni stupci karakteristični vektori, može se pokazati ako se jednadžba (9.280) pomnoži s $\underline{M}$:

$$\underline{M}^{-1}\cdot\underline{A}\cdot\underline{M}=\underline{\Lambda} \tag{9.280}$$

$$\underline{A}\cdot\underline{M}=\underline{M}\cdot\underline{\Lambda}$$

Ako su stupci matrice karakteristični vektori, proizlazi:

$$\underline{A}\cdot[\underline{m}_1 \quad \underline{m}_2 \quad \dots \quad \underline{m}_n]=[\underline{m}_1 \quad \underline{m}_2 \quad \dots \quad \underline{m}_n]\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\0 & \lambda_2 & \dots & \vdots\\\dots & \dots & \dots & \vdots\\0 & \dots & \dots & \lambda_n\end{bmatrix} \tag{9.281}$$

odnosno:

$$\underline{A}\cdot\underline{m}_j=\lambda_j\cdot\underline{m}_j=\lambda_j\underline{I}\cdot\underline{m}_j \tag{9.282}$$

$$[\lambda_j\underline{I}-\underline{A}]\cdot\underline{m}_j=\underline{0} \quad \text{za} \quad j=1,2,\dots n \tag{9.283}$$

što je ekvivalentno izrazu (9.165).

Jordanov oblik matrice stanja

U slučajevima kada su karakteristične vrijednosti višestruke, nije moguće dijagonalizirati matricu sistema $\underline{A}$, što znači da nije moguće razdvojiti međusoban utjecaj varijabli stanja. Najviše što se može napraviti jest transformacija matrice $\underline{A}$ u *Jordanovu kanonsku matricu* (*Jordanov oblik*):

$$\underline{J}=\underline{M}^{-1}\cdot\underline{A}\cdot\underline{M} \tag{9.284}$$

koja ima sljedeća svojstva:

1. svi dijagonalni elementi karakteristične su vrijednosti sistema,
2. svi ostali elementi su nula, osim onih iznad višestrukih karakterističnih vrijednosti koji su 1.

Tako, na primjer, ako matrica $\underline{A}$ (3×3 reda) ima karakteristične vrijednosti λ, tada Jordanova kanonska matrica može imati samo jedan od ovih oblika.

$$\underline{J}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix} \quad \text{za} \quad \lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3; \tag{9.285}$$

$$\underline{J}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix} \quad \text{za} \quad \lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3; \tag{9.286}$$

$$\underline{J}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix} \quad \text{za} \quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3; \tag{9.287}$$

Jordanova kanonska matrica (9.287) naziva se Schwartzov oblik.

U slučaju trostrukih karakterističnih vrijednosti $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, Jordanova kanonska matrica može imati samo jedan od oblika (9.285) do (9.287), što ovisi o sistemu (primjer 9.20).

Ako matrica $\underline{A}$ (7×7 reda) ima jednu trostruku, jednu dvostruku i dvije jednostruke karakteristične vrijednosti, tada će Jordanov oblik matrice $\underline{A}$ biti:

$$\underline{J}=\left[\begin{array}{ccc|cc|cc}\lambda_1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & 0 & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\ \hline & & & \lambda_2 & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \lambda_2 & & \\ \hline & & & & & \lambda_6 & 0\\ & & & & & 0 & \lambda_7\end{array}\right] \tag{9.288}$$

Dijagonalna matrica $\underline{\Lambda}$ specijalan je slučaj Jordanove kanonske matrice. Jordanova kanonska matrica može se podijeliti na blokove (crtkano u izrazu (9.288) – *Jordanovi blokovi*, $L_1, L_2 \ldots, L_k$

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} L_1(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & L_k(\lambda_k) \end{bmatrix} \tag{9.289}$$

gdje su:

$$\underline{L}_j(\lambda_j) = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_j & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \ldots k \tag{9.290}$$

Najjednostavniji oblik Jordanove kanonske matrice (Schwartzov oblik), dobit će se kada postoji samo jedna karakteristična vrijednost λ_1 (jedan Jordanov blok), višestrukosti n (n je red sistema), i gdje se može odabrati samo jedan karakteristični vektor koji odgovara λ_1:

$$\underline{J} = \underline{M}^{-1} \underline{A}\, \underline{M} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_1 & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{bmatrix} \tag{9.291}$$

Da bi se odredila matrica transformacije $\underline{M}$ za taj slučaj, potrebno je kao i prije odrediti stupac po stupac matrice $\underline{M}$. Prvi stupac dan je karakterističnim vektorom $\underline{m}_1$, dok su ostali stupci dani vektorima $m_2, \ldots m_n$.
Ako se (9.291) pomnoži s $\underline{M}$ dobit će se:

$$\underline{A} \cdot \underline{M} = \underline{M} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_1 & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{bmatrix} \tag{9.292}$$

Iz (9.292) za prvi stupac produkta $\underline{A} \cdot \underline{M}$ proizlazi:

$$\underline{A} \cdot \underline{m}_1 = \lambda_1 \cdot \underline{m}_1 \tag{9.293}$$

$$(\lambda_1 \underline{I} - \underline{A})\, m_1 = \underline{0} \tag{9.294}$$

što je isto kao i (9.165). Jednadžba (9.294) vrijedi samo za prvi stupac matrice $\underline{M}$. Budući da jedinice u superdijagonali Jordanove kanonske matrice uzrokuju povezivanje međusobnih djelovanja stanja, a to znači i relacija u preostalim stupcima, to će za preostale stupce vrijediti:

$$\left.\begin{aligned} \underline{A}\, \underline{m}_2 &= \underline{m}_1 + \lambda_1\, \underline{m}_2 \\ &\vdots \\ \underline{A}\, \underline{m}_n &= \underline{m}_{n-1} + \lambda_1\, \underline{m}_n \end{aligned}\right\} \tag{9.295}$$

ili

$$\left.\begin{array}{l}(\underline{A}-\lambda_1\underline{I})\,\underline{m}_2=\underline{m}_1\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ (\underline{A}-\lambda_1\underline{I})\,\underline{m}_n=\underline{m}_{n-1}\end{array}\right\} \qquad (9.296)$$

Kako je vektor $\underline{m}_1$ karakterističan vektor, dobiven iz (9.294), a kako ne postoji linearna nezavisnost tog vektora s ostalim vektorima $\underline{m}_2, \underline{m}_3, \ldots, \underline{m}_n$, ovi vektori ne predstavljaju karakteristične vektore. Skup linearno nezavisnih vektora $\underline{m}_2, \ldots \underline{m}_n$ (koji nisu karakteristični vektori), može se dobiti iz (9.296).

Na sličan način moguće je odrediti vektore za L_1, $L_2, \ldots L_k$, Jordanove blokove u općoj Jordanovoj matrici $\underline{J}$.

Primjer 9.18.

Matrica sistema $\underline{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0{,}5\\ -2 & -3\end{bmatrix}$ ima karakteristične vrijednosti $\lambda_1=\lambda_2=-2$.

Iz (9.294) proizlazi:

$$\left\{-2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 0{,}5\\ -2 & -3\end{bmatrix}\right\}\cdot\underline{m}_1=\underline{0}$$

odnosno:

$$\underline{m}_1=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$$

Za drugi stupac matrice $\underline{M}$ potrebno je odrediti vektor $\underline{m}_2$ iz (9.296):

$$(\underline{A}-\lambda_1\underline{I})\,\underline{m}_2=\underline{m}_1 \qquad (9.297)$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0{,}5\\ -2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}m_{12}\\ m_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix} \qquad (9.298)$$

Iz (9.298) proizlazi:

$$\underline{m}_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

Matrica transformacije $\underline{M}$ glasi:

$$\underline{M}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix} \qquad (9.299)$$

Jordanov oblik matrice $\underline{A}$ glasi:

$$\underline{J}=\underline{M}^{-1}\underline{A}\,\underline{M}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix} \qquad (9.300)$$

Primjer 9.19.

Za zadanu matricu stanja $\underline{A}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ -4 & 0 & 0\end{bmatrix}$ potrebno je naći pripadnu Jordanovu kanonsku matricu.

Karakteristične vrijednosti su $\lambda_1=\lambda_2=-1$, $\lambda_3=-4$.

Prvi karakteristični vektor iz (9.294):

$$(\underline{A}-\lambda_1\underline{I})\,\underline{m}_1=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ -4 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}m_{11}\\ m_{21}\\ m_{31}\end{bmatrix}=\underline{0} \tag{9.301}$$

Iz (9.301) proizlazi:

$$\begin{aligned}-2m_{11}+m_{21}&=0\\ -2m_{21}+m_{31}&=0\\ -4m_{11}+m_{31}&=0\end{aligned} \tag{9.302}$$

Iz (9.302) su:

$$\begin{aligned}m_{11}&=1\\ m_{21}&=2\\ m_{31}&=4\end{aligned}\quad \text{tj.}\quad \underline{m}_1=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 4\end{bmatrix} \tag{9.303}$$

Drugi vektor $\underline{m}_2$ (nije karakterističan vektor) dobije se iz (9.296):

$$(\underline{A}-\lambda_2\underline{I})\,\underline{m}_2=\underline{m}_1 \tag{9.304}$$

$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ -4 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}m_{12}\\ m_{22}\\ m_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 4\end{bmatrix} \tag{9.305}$$

Iz (9.305) proizlazi:

$$\begin{aligned}-2m_{12}+m_{22}&=1\\ -2m_{22}+m_{32}&=2\\ -4m_{12}+m_{32}&=4\end{aligned} \tag{9.306}$$

Vektor $\underline{m}_2$ je:

$$\underline{m}_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 4\end{bmatrix} \tag{9.307}$$

Za vektor $\underline{m}_3$ na sličan način proizlazi:

$$\underline{m}_3=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix} \tag{9.308}$$

Matrica transformacije glasi:

$$M=[\underline{m}_1\ \underline{m}_2\ \underline{m}_3]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 4 & 4 & 1\end{bmatrix} \tag{9.309}$$

Jordanova kanonska matrica je:

$$\underline{J}=\underline{M}^{-1}\cdot\underline{A}\cdot\underline{M}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix} \tag{9.310}$$

U slučaju da se par identičnih sistema prvog reda, bez međusobnog djelovanja promatra kao sistem drugog reda, tada je moguće matricu sistema dobiti u dijagonalnom obliku i pored toga što sistemi mogu imati iste karakteristične vrijednosti. Jednadžba (9.294) tada se transformira u:

$$\underline{0}\cdot\underline{m}_1=\underline{0} \tag{9.311}$$

Bilo koji konačni vektor zadovoljava izraz (9.311), te proizlazi da se mogu odabrati bilo koja dva linearno nezavisna vektora kao stupci matrice $\underline{M}$, koja tada u potpunosti rastavlja varijable stanja sistema (modalna matrica). To se može proširiti i na sisteme višeg reda.

Primjer 9.20.

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}-1{,}8 & 0{,}4 & -0{,}4\\ 0 & -1 & 0\\ -0{,}4 & 0{,}2 & -1{,}2\end{bmatrix}$$

Sistem ima karakteristične vrijednosti $\lambda_1=\lambda_2=-1$, $\lambda_3=-2$. Za prvi karakteristični vektor dobit će se:

$$2m_{11}-m_{21}+m_{31}=0 \tag{9.312}$$

Budući da u jednadžbi (9.312) postoje tri nepoznanice, moguće je odabrati dva linearno nezavisna vektora koji će zadovoljavati (9.312) i time učiniti suvišnim upotrebu (9.296). Karakteristični vektor $\underline{m}_3$ koji odgovara $\lambda_3=-2$ može se odrediti korištenjem izraza (9.294).
Karakteristični vektori jesu:

$$\underline{m}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\quad \underline{m}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\quad \underline{m}_3=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$$

Modalna matrica $\underline{M}$ (svi stupci linearno nezavisni) je:

$$\underline{M}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{9.313}$$

Jordanova kanonska matrica je:

$$\underline{J}=\underline{M}^{-1}\cdot\underline{A}\cdot\underline{M}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}=\underline{\Lambda} \tag{9.314}$$

Modificirana kanonska transformacija

Višestruki realni polovi rjeđe se pojavljuju kod sistema automatskog upravljanja. Mnogo češće se pojavljuju konjugirano-kompleksni polovi. Tako npr. oscilatorni sistem drugog reda $\ddot{x} - 2\sigma\dot{x} + (\sigma^2 + \omega^2)x = u(t)$ ima karakteristične vrijednosti $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ (σ i ω realni; $\omega > 0$). Takav sistem ima jednadžbe stanja i izlaza:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\sigma^2+\omega^2) & 2\sigma \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{9.315}$$

$$\underline{y} = [1 \quad 0]\, \underline{x} \tag{9.316}$$

Ako se gornji sistem jednadžbi dovede na kanonski oblik dobit će se:

$$\dot{\underline{z}} = \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix} \underline{z} + \begin{bmatrix} \frac{1}{j2\omega} \\ -\frac{1}{j2\omega} \end{bmatrix} u \tag{9.317}$$

$$\underline{y} = [1 \quad 1]\, \underline{z} \tag{9.318}$$

Elementi matrice $\underline{\Lambda}$ i $\underline{B}_n$ kompleksne su veličine, a to otežava rješavanje jednadžbi (9.317). Modalna matrica $\underline{M}$ (9.319) u ovom slučaju ne olakšava rješavanje jednadžbi stanja, jer se ovom transformacijom nisu eliminirale kompleksne veličine.

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sigma + j\omega & \sigma - j\omega \end{bmatrix} = [m_1 \quad m_2] \tag{9.319}$$

Potrebna je nova transformacija $\underline{z} = \underline{T} \cdot \underline{x}^*$, gdje je za konkretni primjer:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{j}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{j}{2} \end{bmatrix} \tag{9.320}$$

Ovom transformacijom eliminirat će se kompleksne veličine i dobiti modificirani kompleksni oblik jednadžbi:

$$\dot{\underline{x}}^* = \underline{T}^{-1} \cdot \Lambda \cdot \underline{T} \cdot \underline{x}^* + \underline{T}^{-1} \cdot \underline{M}^{-1} \cdot \underline{B} \cdot u = \underline{\Lambda}_m \cdot \underline{x}^* + \underline{B}_m \cdot u \tag{9.321}$$

$$\underline{y} = \underline{C} \cdot \underline{M} \cdot \underline{T} \cdot \underline{x}^* + \underline{D} \cdot u = \underline{C}_m \cdot \underline{x}^* + \underline{D} \cdot u \tag{9.322}$$

Odnosno:

$$\dot{x}^* = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \underline{x}^* + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\omega} \end{bmatrix} u \tag{9.323}$$

$$\underline{y} = [1 \quad 0]\, \underline{x}^* \tag{9.324}$$

Utjecaj dviju transformacija $\underline{x}=\underline{M}\,\underline{z}$ i $\underline{z}=\underline{T}\cdot\underline{x}^*$ može se promatrati kao utjecaj jedne transformacije

$$\underline{x}=\underline{M}\cdot\underline{T}\cdot\underline{x}^*=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \sigma & \omega\end{bmatrix}\underline{x}^*=\underline{M}_m\cdot\underline{x}^* \tag{9.325}$$

Usporedbom $\underline{M}_m$ sa $\underline{M}$ proizlazi:

$$\underline{M}_m=[Re\,(m_1)\quad Im\,(m_1)] \tag{9.326}$$

Iz (9.326) proizlazi da je matricu M_m moguće odmah odrediti na osnovi matrice $\underline{M}$, bez dodatne tranformacije $\underline{T}$.

U općem slučaju sistemi s konjugirano-kompleksnim i realnim karakterističnim vrijednostima imaju modificirane matrice $\underline{\Lambda}_m$, $\underline{B}_m$ i $\underline{C}_m$ oblika:

$$\underline{\Lambda}_m=\left[\begin{array}{cc|cc|ccc}\sigma_1 & \omega_1 & & & & & \\ -\omega_1 & \sigma_1 & & & & 0 & \\ \hline & & \sigma_2 & \omega_2 & & & \\ & & -\omega_2 & \sigma_2 & & & \\ \hline & & & & \lambda_5 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_n\end{array}\right] \tag{9.327}$$

$$\underline{B}_m=\underline{M}_m^{-1}\cdot\underline{B} \tag{9.328}$$

$$\underline{C}_m=\underline{C}\cdot\underline{M}_m \tag{9.329}$$

Modalna matrica $\underline{M}$ može se odrediti na jedan od izloženih načina. Njeni stupci, karakteristični vektori za pripadne konjugirane karakteristične vrednosti također su konjugirani:

$$\underline{M}=[\underline{m}_1\quad \underline{m}_1^*\quad \underline{m}_3\quad \underline{m}_3^*\quad \underline{m}_5\quad \ldots\quad \underline{m}_n] \tag{9.330}$$

Matrica $\underline{M}_m$ direktno proizlazi iz (9.330) i (9.326):

$$\underline{M}_m=[Re\,(\underline{m}_1)\quad Im\,(\underline{m}_1)\quad Re\,(\underline{m}_3)\quad Im\,(\underline{m}_3)\quad \underline{m}_5\ldots\underline{m}_n] \tag{9.331}$$

9.12. Upravljivost i osmotrivost sistema

Pri analizi ili sintezi sistema nameću se odgovori na pitanja:

1. Postoji li bilo koja komponenta unutrašnjeg stanja sistema koja se ne može pratiti na izlaznom signalu sistema?
2. Postoji li bilo koja komponenta unutrašnjeg stanja sistema koja nije pod utjecajem ulaznih (upravljačkih) signala u sistem?

Veza izlaza i stanja najčešće je prikazana relacijom $\underline{y}=\underline{C}\cdot\underline{x}$. U mnogim praktičnim problemima od osnovnog je značaja može li se na osnovi mjerenja signala na izlazu sistema zaključiti o svim pojedinačnim stanjima u sistemu. Taj problem naročito dolazi do izražaja kada je izlazni vektor $\underline{y}$ nižeg reda (manje izlaznih signala) od vektora stanja $\underline{x}$.

Sistem je osmotriv ako mjerenja izlaznih signala $\underline{y}$ daju dovoljno informacija da se u potpunosti identificira stanje sistema $\underline{x}$.

U sistemima koji nisu osmotrivi jedna ili nekoliko komponenata vektora stanja nepristupačna je za osmatranje ili praćenje.

Ako se sistem prikaže u kanonskom obliku, odziv sistema bit će rastavljen na karakteristična ponašanja (elemente matrice $e^{\underline{\Lambda} t}$) ovisna o pripadnim karakterističnim vrijednostima (λ). Za ispitivanje osmotrivosti sistema, a također i upravljivosti, kanonski oblik ima velik značaj. Da bi neki izlaz y sistema davao potrebne informacije o elementima vektora stanja, mora i sam u sebi sadržavati komponente svih elemenata vektora stanja, a time i sve karakteristične članove $e^{\underline{\Lambda} t}$. Iz kanonskog oblika jednadžbe izlaza:

$$\underline{y} = \underline{C}_n \cdot \underline{z} \tag{9.332}$$

pojedine komponente vektora izlaza određene su izrazima:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11} z_1 + c_{12} z_2 + \ldots + c_{1n} z_n \\ &\vdots \\ y_k &= c_{k1} z_1 + c_{k2} z_2 + \ldots + c_{k3} z_n \end{aligned} \tag{9.333}$$

Potreban i dovoljan uvjet za osmotrivost sistema jest da ni jedna komponenta stanja $\underline{z}$ ne nedostaje u (9.333). *Prema tome potpuna osmotrivost sistema zahtijeva da ni jedan stupac matrice $\underline{C}_n$ (često se zove i matrica osmotrivosti) ne bude* 0. Taj uvjet osmotrivosti vrijedi samo onda kada je na raspolaganju kanonski oblik jednadžbi stanja i izlaza, te kada su karakteristične vrijednosti sistema realne i različite. Uvjet osmotrivosti na osnovi kanonskog oblika jednadžbi prvi je predložio E. G. Gilbert – L [69]. Opći uvjet osmotrivosti multivarijabilnog sistema predložio je R. E. Kalman – L[57]:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} \tag{9.334}$$

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} \tag{9.335}$$

Prema Cayley-Hamiltonovu teoremu pokazano je da se $e^{\underline{A}t}$ može izraziti polinomom n-1 reda (9.193):

$$e^{\underline{A}t} = \sum_{k=0}^{n=1} \alpha_k(\tau)\,\underline{A}^k \tag{9.336}$$

Rješenje jednadžbe (9.335) je:

$$\underline{y}(t) = \underline{C} e^{\underline{A}_t} \cdot \underline{x}(0) \tag{9.337}$$

Ako se u (9.337) uvrsti (9.336) dobit će se:

$$\underline{y}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\, C A^k x(0) \tag{9.338}$$

Da bi sistem bio osmotriv svaki izlaz mora biti pod utjecajem svakog stanja x_i. Odavde proizlazi da matrica $C.\ A^k$ mora zadovoljavati određen uvjet. Taj uvjet ujedno je i opći uvjet osmotrivosti, koji kaže da će multivarijabilni sistem biti potpuno osmotriv ako je:

$$\text{rang matrice}\,[\underline{C}^T \mid \underline{A}^T \underline{C}^T \mid (A^T)^2 \underline{C}^T \mid \ldots \mid (\underline{A}^T)^{n-1} \cdot \underline{C}^T] = n \tag{9.339}$$

Za linearne sisteme s jednim ulazom i izlazom uvjet osmotrivosti (9.339) bit će zadovoljen ako je determinanta matrice iz (9.339) različita od nule:

$$|[\underline{C}^T \mid \underline{A}^T \underline{C}^T \mid (A^T)^2 \underline{C}^T \mid \ldots \mid (\underline{A}^T)^{n-1} \cdot \underline{C}^T]| \neq 0 \tag{9.340}$$

Kod sistema s jednim ulazom i jednim izlazom matrica iz (9.339) je $n \times n$ reda, te je dovoljno promatrati njenu determinantu. Kod multivarijabilnog sistema ova matrica je $n \times n \cdot k$ reda (gdje je k broj različitih izlaza), te je potrebno da rang te matrice bude n (tj. da postoji jedna $n \times n$ submatrica čija je determinanta različita od nule). Rang matrice iz (9.339) pokazuje broj osmotrivih stanja sistema. Ako je npr. rang $=n-1$ sistem je neosmotriv, jer se ne može pratiti jedna komponenta vektora stanja. Geometrijska interpretacija osmotrivosti za sistem s *jednim* izlazom svodi se na to da $\underline{C}$ ne smije biti okomit na bilo koji realni karakteristični vektor, tj.:

$$\underline{C} \cdot \underline{m}_j \neq 0 \quad \text{za svaki } j \tag{9.341}$$

To se može pokazati na primjeru 9.21.

Primjer 9.21.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{9.342}$$

Karakteristične vrijednosti su $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = -2$, a karakteristični su vektori:

$$\underline{m}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{m}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9.343}$$

Izlaz sistema (9.342) je:

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) = [k_1 \quad k_2] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{9.344}$$

Sistem će biti neosmotriv ako $\underline{C}$ ima smjer okomit na bilo koji od karakterističnih vektora $\underline{m}_1$ ili $\underline{m}_2$ – izraz (9.341). Na slici 9.23.a i b prikazani su slobodni odzivi sistema s početnim stanjem:

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ 50 \end{bmatrix} \tag{9.345}$$

a na slici 9.23.c prikazan je slobodan odziv sistema s početnim stanjem:

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \end{bmatrix} \tag{9.346}$$

Prve dvije krivulje na sl. 9.23.a prikazuju odziv varijabli stanja, a treća prikazuje odziv izlaza sistema uz $\underline{C} = [1 \quad 1]$. Budući da $\underline{C}$ nije okomit na ni jedan karakteristični vektor, tj.:

$$[1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{i} \quad [1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0,$$

za pretpostaviti je da će izlazni signal u sebi sadržavati informacije o varijablama stanja odnosno o karakterističnim ponašanjima $e^{\lambda_1 t}$ i $e^{\lambda_2 t}$, što se na slici i vidi.

Na slici 9.23.b početno stanje je isto, ali je $\underline{C}=[1 \quad -1]$. Kako je $\underline{C}\cdot m_1=0$, a $\underline{C}\cdot \underline{m}_2\neq 0$, tj. $\underline{C}$ je okomit na $\underline{m}_1$, to je u izlaznom signalu sadržan samo karakteristični član $e^{\lambda_2 t}$, dok člana $e^{\lambda_1 t}$ nema. Da bi se to bolje uočilo sa slike, promijenjeni su početni uvjeti sistema uz isti $\underline{C}$.

Uz $x_1(0)=50$ i $x_2(0)=50$ bit će:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 50e^{-t} \\ 50(e^{-t}-e^{-2t})+50e^{-2t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 50e^{-t} \\ 50e^{-t} \end{bmatrix} \tag{9.347}$$

Slobodni odzivi varijabli stanja (x_1, x_2) postoje i jednaki su.
Ako se sistem dovede na kanonski oblik da bi se uvidjela karakteristična ponašanja $e^{\lambda_1 t}$ i $e^{\lambda_2 t}$ dobit će se:

$$\underline{z}=e^{\Lambda t}\cdot \underline{z}(0) \tag{9.348}$$

Kako je $\underline{M}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, a $\underline{M}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

to će biti:

$$\begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix}=\underline{M}^{-1}\cdot \underline{x}(0)=\begin{bmatrix} x_1(0) \\ -x_1(0)+x_2(0) \end{bmatrix} \tag{9.349}$$

Kako je $x_1(0)=x_2(0)$ proizlazi:

$$\begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1(0) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.350}$$

Iz (9.348) i (9.350) proizlazi:

$$\begin{aligned} z_1(t)&=50e^{\lambda_1 t} \\ z_2(t)&=0\cdot e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \tag{9.351}$$

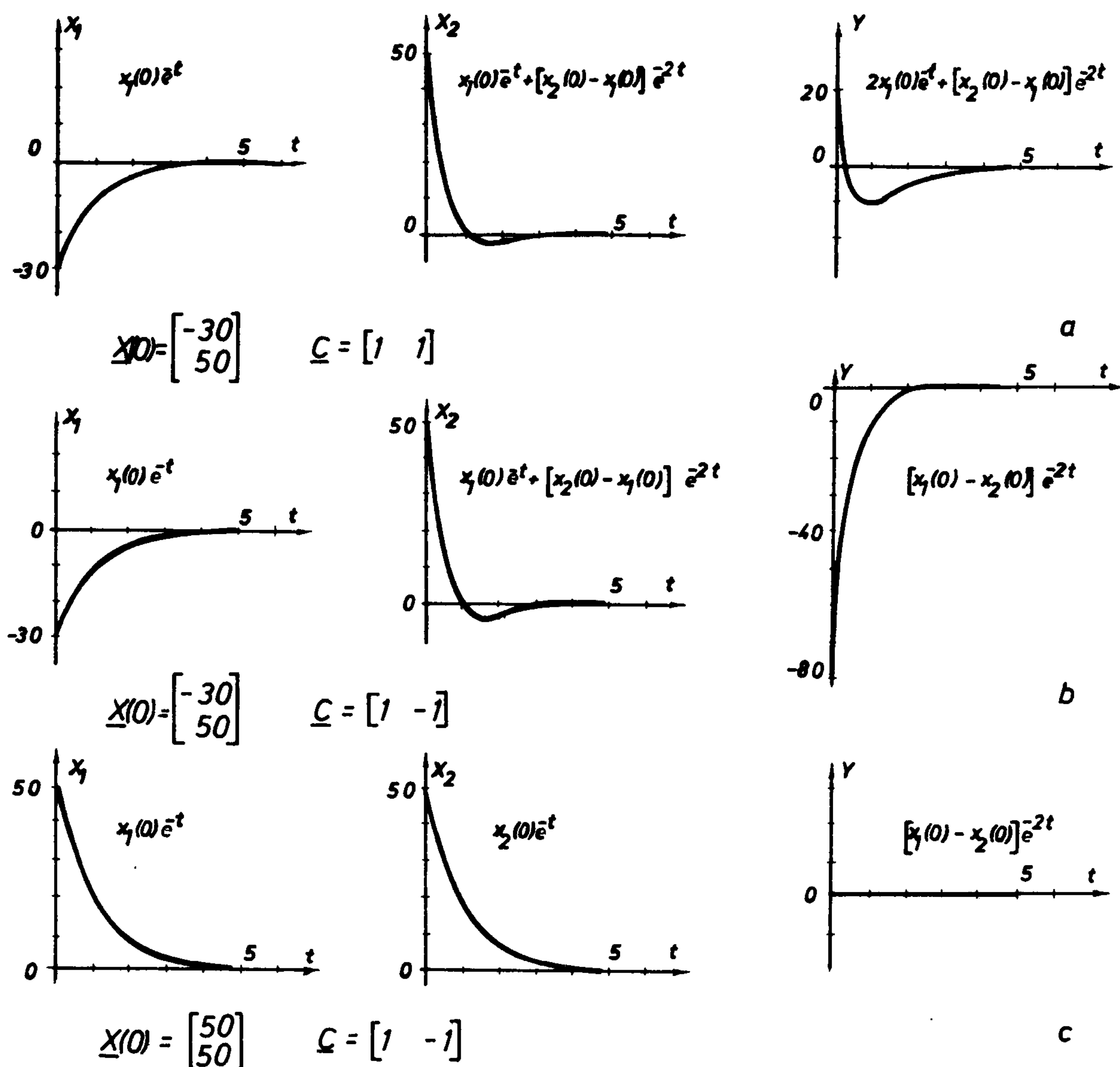
U kanonskom koordinatnom sistemu postoji samo odziv $z_1(t)$. Budući da izlazni signal u sebi sadrži karakteristična ponašanja $e^{\lambda_1 t}$ i $e^{\lambda_2 t}$, a u tom slučaju nema pobude ($z_2(0)=0$) člana $e^{\lambda_2 t}$, to je na izlazu sistema signal $y=0$, jer ne sadrži član $e^{\lambda_1 t}$, budući je $\underline{C}\cdot \underline{m}_1=0$. Iz izloženog je evidentno da je sistem (sl. 9.23.b,c) neosmotriv, dok je sistem na sl. 9.23.a osmotriv.

Treba naglasiti da se samim saznanjem da je sistem osmotriv nije riješilo i pitanje kako ga osmatrati. Osmotrivost samo pokazuje da je teoretski moguće rekonstruirati vektor stanja $\underline{x}$ na osnovi promatranja izlaznog vektora $\underline{y}$.

Kod složenijih sistema upravljanja često je potrebno upravljati čitavim stanjem sistema, ili barem s više komponenata stanja, nego što je moguće pratiti mjernim instrumentima. U takvim situacijama potrebno je na neki način rekonstruirati one komponente stanja koje se ne prate instrumentima. Uređaj ili sistem (obično je to digitalno računalo) projektiran u tu svrhu naziva se „observer" ili estimator.

Danas postoji nekoliko tipova takvih uređaja od kojih su najpoznatiji Luenbergerov observer L[38] i Kalmanov filter L[26]. Uglavnom se svi baziraju na postavljanju modela realnog sistema (najčešće na digitalnom računalu) i korištenju signala s ulaza i izlaza realnog sistema radi procjene stanja sistema. Model se uvijek može projektirati tako da sve varijable stanja budu dostupne mjerenju.

Metoda koja se također koristi u praksi rekonstrukcija je varijabli stanja pomoću derivativnog elementa. Budući da mnogi sistemi imaju manje izlaznih signala od varijabli stanja, ta metoda koristi derivaciju izlaznog signala za rekonstrukciju stanja sistema. Ako se kao primjer uzme sistem s dvije varijable stanja i



Slika 9.23.

jednim izlaznim signalom, tada je za proračun varijabli stanja dostupna jedna jednadžba s dvije nepoznanice. Takva situacija može se izbjeći ako se pretpostavi da je moguće odrediti kako izlazni signal $y(t)$ tako i njenu derivaciju $\dot{y}(t)=\frac{dy(t)}{dt}$. Deriviranjem jednadžbe izlaza (uz pretpostavku da je $\underline{D}=\underline{0}$) proizlazi:

$$\dot{\underline{y}}=\underline{C}\,\dot{\underline{x}} \tag{9.352}$$

Zbog jednostavnosti može se pretpostaviti da je $u=0$, tj. $\underline{B}=\underline{0}$, te ako se u (9.352) umjesto $\dot{\underline{x}}$ uvrsti homogena jednadžba stanja dobit će se:

$$\dot{\underline{y}}=\underline{C}\,\underline{A}\,\underline{x} \tag{9.353}$$

U procesu rekonstrukcije osnovni korak predstavlja tvorba vektora koji se sastoji iz $\underline{y}$ i $\dot{\underline{y}}$ tj.:

$$\begin{bmatrix} \underline{y} \\ \dot{\underline{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{C} & \\ \underline{C} & \underline{A} \end{bmatrix} \cdot \underline{x} \tag{9.354}$$

Iz (9.354) proizlazi:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{C} & \\ \underline{C} \cdot \underline{A} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \dot{\underline{y}} \end{bmatrix} \tag{9.355}$$

Jednadžba (9.355) pokazuje da je moguće rekonstruirati stanje sistema kada je matrica koeficijenata $\begin{bmatrix} \underline{C} & \\ \underline{C} & \underline{A} \end{bmatrix}$ nesingularna, tj. kada postoji njena inverzija. Ova matrica bit će nesingularna onda kada je sistem osmotriv. Osmotrivost sistema može se prema tome odrediti ispitivanjem nesingularnosti matrice $\begin{bmatrix} \underline{C} & \\ \underline{C} & \underline{A} \end{bmatrix}$ što je zapravo izraz (9.340). Uvjet (9.340) ili za multivarijabilne sisteme (9.339), povoljniji su za analizu osmotrivosti od izraza (9.341) koji zahtijeva poznavanje karakterističnih vrijednosti i karakterističnih vektora sistema. Metoda rekonstrukcije stanja sistema pomoću derivativnog elementa ima velik nedostatak. Budući da nije moguće konstruirati idealni derivativni element, unosi se pogreška procjene stanja koja je to veća što je realni derivativni element lošiji. S druge strane, ako je realni derivativni element bolji, povećava se osjetljivost sistema na smetnje.

Na sličan način (kao što je na jednostavan način moguće shvatiti osmotrivost sistema kada je sistem opisan kanonskim oblikom jednadžbi) i upravljivost se može vrlo jednostavno shvatiti i odrediti iz kanonskog oblika:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2m} \\ \dots & \dots\dots \\ b_{n1} & b_{n2} \dots b_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \tag{9.356}$$

Sistem je potpuno upravljiv ako je moguće odrediti signal upravljanja $\underline{u}(t)$, *koji će u konačnom vremenskom intervalu* (t_f) *dovesti sistem iz po volji odabranog stanja* $\underline{x}(0)$, *u po volji određeno stanje* $\underline{x}(t_f)$.

Drugim riječima, pravilnim izborom upravljajućeg signala moguće je sve elemente stanja (varijable stanja) dovesti u željeno stanje. Budući da u (9.356) nema međusobnog djelovanja kanonskih varijabli stanja proizlazi da je *dovoljan uvjet za upravljivost sistema da matrica* $\underline{B}_n$ *(često se još zove matrica upravljivosti) nema nul-redove*.

U slučaju kada su jedan ili više redova u matrici $\underline{B}_n$ jednaki nula, nije moguće utjecati na pripadne varijable stanja pomoću signala upravljanja, te će sistem biti neupravljiv.

Svaki sistem obilježavaju njegova unutrašnja *karakteristična ponašanja*. Tako, na primjer, sistem trećeg reda ima tri pola od kojih svaki rezultira sa članom $e^{\lambda_i t}$. Ovi članovi (karakteristični članovi) pojavljuju se i u svim varijablama stanja.

Izborom prikladnog signala upravljanja $\underline{u}(t)$ omogućuje se djelovanje na svaku od ovih komponenata. Ako je potrebno može se odabrati takav $\underline{u}(t)$ koji će odstraniti određenu „prirodnu" frekvenciju sistema (na primjer $e^{\lambda_1 t}$) iz svake varijable stanja. U općem slučaju moguće je djelovati na amplitude svakog karakterističnog člana u svakoj varijabli stanja. Kod neupravljivog sistema postoji barem jedna komponenta $e^{\lambda t}$ na koju upravljajući signali nemaju nikakva utjecaja. Činjenica da je u nekom sistemu moguće djelovanje upravljajućeg signala na svaku varijablu stanja, istovremeno ne garantira i mogućnost određivanja vektora upravljanja. Da bi sistem bio upravljiv osim mogućnosti djelovanja na svaku varijablu stanja potrebno je još odrediti i signal upravljanja, koji će moći izvršiti željena djelovanja da se postigne unaprijed odabrano stanje sistema.

Uvjet da matrica upravljivosti $\underline{B}_n$ nema nul-redova L[13], vrijedi kod kanonskih oblika jednadžbi i za sisteme s realnim jednoznačnim karakterističnim vrijednostima. Općenito uvjet upravljivosti dan je u L[29].

Varijable stanja pod utjecajem signala upravljanja i početnih uvjeta mogu se opisati s (9.220):

$$\underline{x}(t)=\underline{\Phi}(t-t_0)\,\underline{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\underline{\Phi}(t-\tau)\underline{B}\cdot\underline{u}(\tau)\,d\tau \tag{9.357}$$

Ako je $t_0=0$ i $\underline{x}(t_f)=\underline{0}$ proizlazi:

$$\underline{0}=e^{\underline{A}t_f}\cdot\underline{x}(0)+\int_0^{t_f}e^{\underline{A}(t_f-\tau)}\underline{B}\cdot\underline{u}(\tau)\,d\tau \tag{9.358}$$

odnosno:

$$\underline{x}(0)=-\int_0^{t_f}e^{-\underline{A}\tau}\underline{B}\cdot\underline{u}(\tau)\,d\tau \tag{9.359}$$

Kako je:

$$e^{-\underline{A}t}=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(\tau)\,\underline{A}^k \tag{9.360}$$

dobit će se:

$$\underline{x}(0)=-\sum_{k=0}^{n-1}\underline{A}^k\underline{B}\int_0^{t_f}\alpha_k(\tau)\,\underline{u}(\tau)\,d\tau \tag{9.361}$$

Uz $\underline{u}(t)$ dimenzije m, integral u (9.361) može se izraziti:

$$\int_0^{t_f}\alpha_k(\tau)\,\underline{u}(\tau)\,d\tau=\underline{\beta}_k \tag{9.362}$$

Jednadžba (9.361) sada glasi:

$$\underline{x}(0)=-\sum_{k=0}^{n-1}\underline{A}^k\cdot\underline{B}\beta_k=-[\underline{B}\,|\,\underline{A}\underline{B}\,|\ldots|\,\underline{A}^{n-1}\cdot\underline{B}]\cdot\begin{bmatrix}\underline{\beta}_0\\ \hdashline \beta_1\\ \hdashline \beta_{n-1}\end{bmatrix} \tag{9.363}$$

S obzirom da je kod upravljivog sistema moguće na svako početno stanje $x_i(0)$ djelovati s $\underline{u}(t)$, uvjet upravljivosti za multivarijabilne sisteme jest:

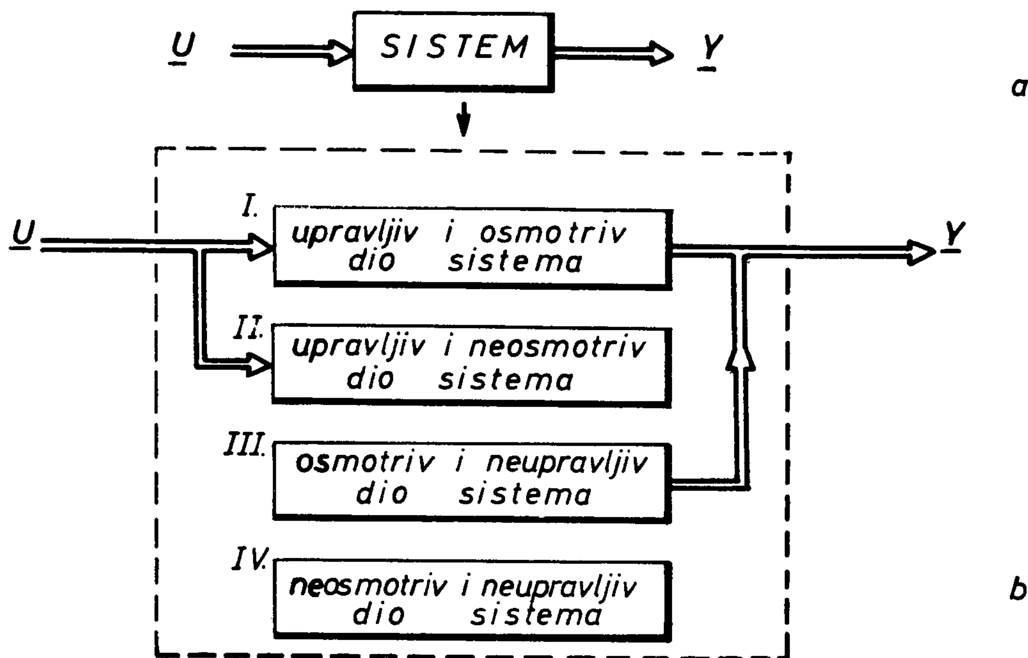
$$\text{rang matrice} \qquad [\underline{B} \,\vdots\, \underline{A}\,\underline{B} \,\vdots\, \underline{A}^2\,\underline{B} \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \underline{A}^{n-1}\cdot\underline{B}] = n \tag{9.364}$$

Za sistem s jednim ulazom uvjet (9.364) svodi se na

$$\left|[\underline{B} \,\vdots\, \underline{A}\cdot\underline{B} \,\vdots\, \underline{A}^2\cdot\underline{B} \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \underline{A}^{n-1}\cdot\underline{B}]\right| \neq 0 \tag{9.365}$$

U ovom slučaju matrica je $n\times n$ reda te je dovoljno promatrati determinantu matrice, dok je kod multivarijabilnog sistema matrica $n\times n\cdot m$ reda (m broj ulaznih signala), te se traži determinanta submatrice $n\times n$ reda različita od nule (što je zapravo ispitivanje ranga matrice).

Na osnovi do sada izloženog svaki sistem (sl. 9.24.a) općenito se može podijeliti na četiri grupe podsistema (sl. 9.24.b): upravljiv i osmotriv, upravljiv i neosmotriv, neupravljiv i osmotriv te neupravljiv i neosmotriv. Takva podjela poznata je kao Kalmanov teorem kanonske strukture (budući da ga je prvi puta izložio 1960. godine R. E. Kalman – L[27].



Slika 9.24.

Pojam podsistemi dan je u smislu predstavljanja karakterističnih članova $e^{\lambda_i t}$, tj. karakterističnih ponašanja sistema.

Na osnovi slike 9.24. vidljivo je da prijenosna funkcija ili prijenosna matrica sistema opisuje samo upravljivi i osmotrivi dio sistema, a o ostalim dijelovima sistema ne daje nikakvu informaciju. Osim toga preko prijenosne funkcije moguće je odrediti samo prinudni odziv sistema, dok se na osnovi matematičkog modela preko varijabli stanja može odrediti i prinudni i slobodni odziv. Takav opis sistema

mnogo je detaljniji, jer kao što se vidi i na sl. 9.24., mnogo dublje zalazi u samu strukturu sistema. U slučaju neosmotrivosti ili neupravljivosti sistema dolazi do kraćenja pola s nulom u prijenosnoj funkciji. Tako, na primjer, za sistem iz primjera 9.21. ako je $\underline{B}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ bit će prijenosna matrica dana sa:

$$\underline{G}_0(s)=\underline{C}[s\underline{I}-\underline{A}]^{-1}\cdot\underline{B}=[k_1\ \ k_2]\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0\\ \frac{1}{(s+1)(s+1)} & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{k_1(s+2)+k_2}{(s+1)(s+1)} \qquad (9.366)$$

Uz $k_1=1$ i $k_2=-1$ što je davalo neosmotrivost sistema, dobit će se prijenosna funkcija

$$G_0(s)=\frac{1}{s+2} \qquad (9.367)$$

Došlo je do kraćenja pola $s_1=-1$ s nulom, pa se može reći da *kraćenje pola i nule u prijenosnoj funkciji ukazuje na neupravljivost ili neosmotrivost sistema.*

Analiza upravljivosti i osmotrivosti sistema ima velik značaj u sintezi sistema, a također je važna za izbor i položaj mjernih instrumenata u sistemima automatskog upravljanja.

U slučajevima kada sistem ima višestruke karakteristične vrijednosti osmotrivost i upravljivost određuju se na osnovi Jordanove kanonske matrice (9.289).

Takav sistem bit će osmotriv ako:

1. ne postoje dva Jordanova bloka u matrici $\underline{J}$ koja su pridružena istim karakterističnim vrijednostima,
2. nema nul-stupaca u matrici $\underline{C}\cdot\underline{M}$ ($\underline{M}$ matrica transformacije u Jordanov oblik), koji odgovaraju prvom retku svakog Jordanovog bloka,
3. nema nul-stupaca u matrici $\underline{C}\cdot\underline{M}$ koji odgovaraju jednostrukim karakterističnim vrijednostima.

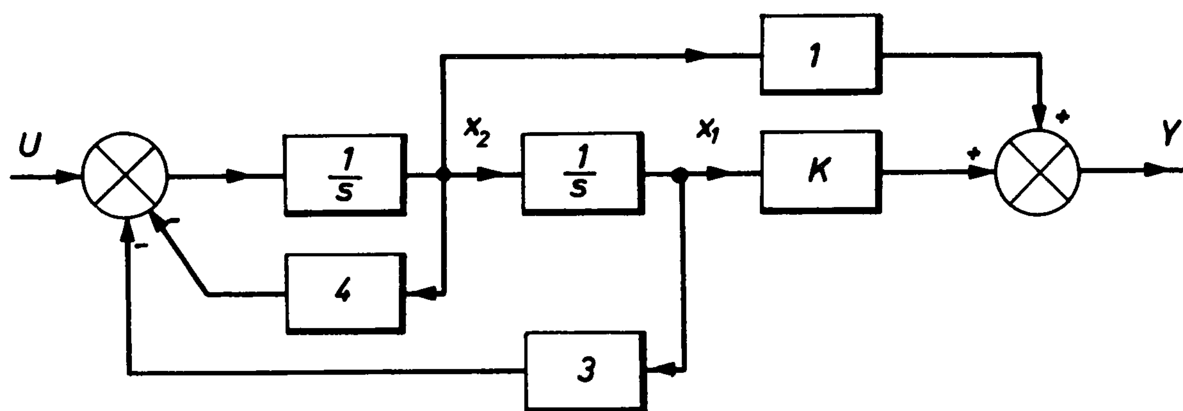
Sistem će biti upravljiv ako:

1. ne postoje dva Jordanova bloka u matrici $\underline{J}$ koja su pridružena istim karakterističnim vrijednostima,
2. nema nul-redaka matrice $\underline{M}^{-1}\cdot\underline{B}$ koji odgovaraju posljednjem retku svakog Jordanova bloka,
3. nema nul-redaka matrice $\underline{M}^{-1}\cdot\underline{B}$ koji odgovaraju jednostrukim korijenima.

Primjer 9.22.

Sistem je prikazan na sl. 9.25. Potrebno je odrediti je li sistem osmotriv. Matrica sistema i matrica izlaza jesu:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix},\qquad \underline{C}=[K\ \ 1]$$



Slika 9.25.

Transponirane matrice jesu:

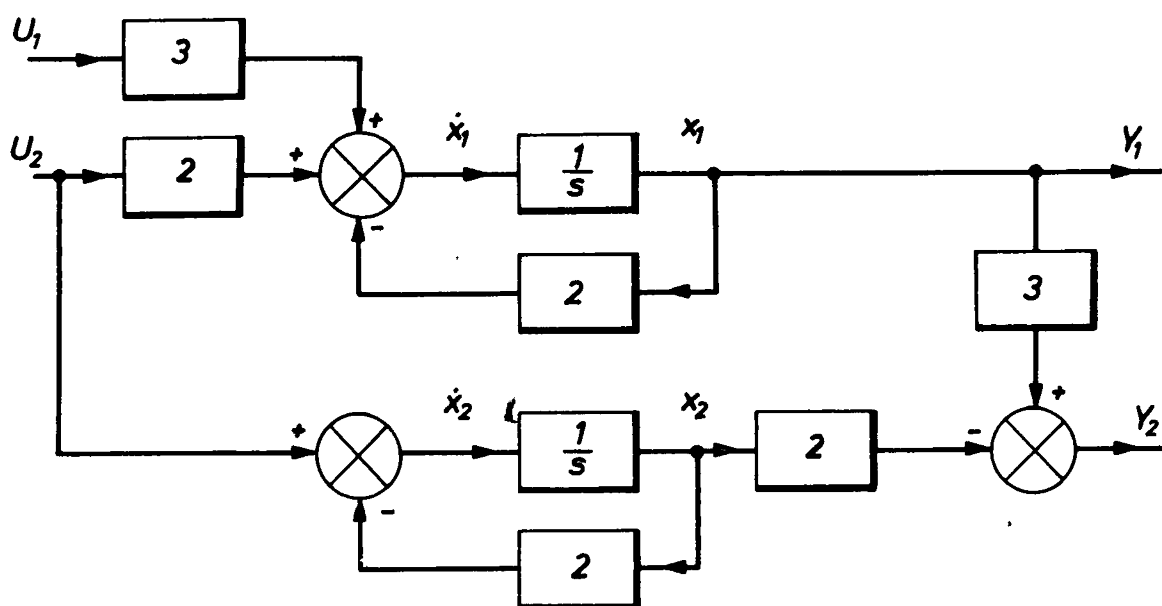
$$\underline{C}^T = \begin{bmatrix} K \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{A}^T \underline{C}^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ K-4 \end{bmatrix}$$

$$[\underline{C}^T \,\vdots\, \underline{A}^T \underline{C}^T] = \begin{bmatrix} K & -3 \\ 1 & K-4 \end{bmatrix} \tag{9.368}$$

Determinanta matrice (9.368) glasi:

$$|[\underline{C}^T \,\vdots\, \underline{A}^T \underline{C}^T]| = K^2 - 4K + 3 \tag{9.369}$$

Kalmanov uvjet osmotrivosti (9.340) pokazuje da će sistem biti neosmotriv ako je $K=1$ ili $K=3$ (determinanta (9.369) jednaka nuli). Uz te uvjete izlaz sistema y nema karakterističnog člana e^{-t} (za $K=1$) ili e^{-3t} (za $K=3$). Jedna od prirodnih frekvencija neće se nikad moći razlučiti iz signala y.



Slika 9.26.

Primjer 9.23.

Multivarijabilni sistem drugog reda prikazan blok-dijagramom na sl. 9.26. ima jednadžbe stanja i izlaza:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1+3u_1+2u_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2+u_2 \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= 3x_1-2x_2 \end{aligned} \tag{9.370}$$

Potrebno je odrediti upravljivost ovog sistema. Matrice sistema i upravljanja jesu:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \underline{B}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\underline{B} \mid \underline{A}\cdot\underline{B}]=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{9.371}$$

Rang-matrice (9.371) je 2, te je sistem upravljiv jer je i $n=2$ (uvjet (9.339)).

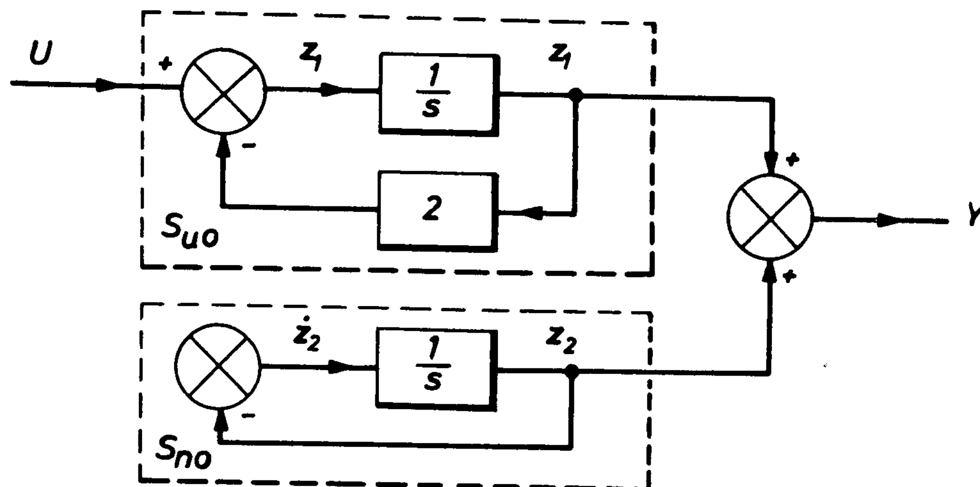
Primjer 9.24.

Za sistem zadan u kanonskom obliku jednadžbe (9.372) i (9.373), potrebno je odrediti upravljivost i osmotrivost.

$$\dot{\underline{z}}=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\cdot\underline{z}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u \tag{9.372}$$

$$\underline{y}=[1 \quad 1]\cdot z \tag{9.373}$$

Kako matrica $\underline{B}_n$ u (9.372) ima nul-red može se zaključiti da je sistem neupravljiv, a kako matrica $\underline{C}_n$ u (9.373) nema nul-stupaca, sistem je osmotriv. S blok-sheme sistema (sl. 9.27) može se razlučiti neupravljivi i osmotrivi (S_{no}) od upravljivog i osmotrivog dijela sistema (S_{uo}).



Slika 9.27.

Primjer 9.25.

Potrebno je odrediti osmotrivost sistema zadanog sa:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & & \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ \hline & & & -3 & 1 \\ & & & 0 & -3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \tag{9.374}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \tag{9.375}$$

Sistem ima višestruke karakteristične vrijednosti, pa Jordanova kanonska matrica daje $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ i $\lambda_4 = \lambda_5 = -3$. Matrica $\underline{C} \cdot \underline{M}$ u (9.375) ima crtkano označene stupce koji odgovaraju prvom retku u Jordanovim blokovima. Kako je jedan od stupaca nul-stupac, proizlazi da je sistem neosmotriv.

9.13. Promatranje sistema u prostoru stanja

Dinamiku sistema moguće je analizirati na osnovi grafičkog prikaza odziva sistema u prostoru stanja, u kojem varijable stanja tvore koordinatne osi. Slobodan odziv sistema iz početne točke u prostoru $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ giba se po putanji *trajektoriji stanja*. Vrijeme je implicitna varijabla duž trajektorije stanja. Kada su varijable stanja dane kao fazne varijable, prostor stanja zove se fazni prostor. Za sisteme drugog reda prostor stanja deformira se u ravninu, pa je grafički prikaz trajektorije prilično jednostavan. Za sisteme više od trećeg reda grafički prikaz nije moguć što ograničava samo grafičko predstavljanje rezultata, a ne i matematički aparat za analizu sistema. Trajektoriju stanja određuje se iz jednadžbi stanja eliminiranjem vremena kao eksplicitne funkcije. Skup svih mogućih trajektorija stanja ima naziv *portret stanja* (fazni portret, ako su varijable stanja fazne varijable).

Primjer 9.26.

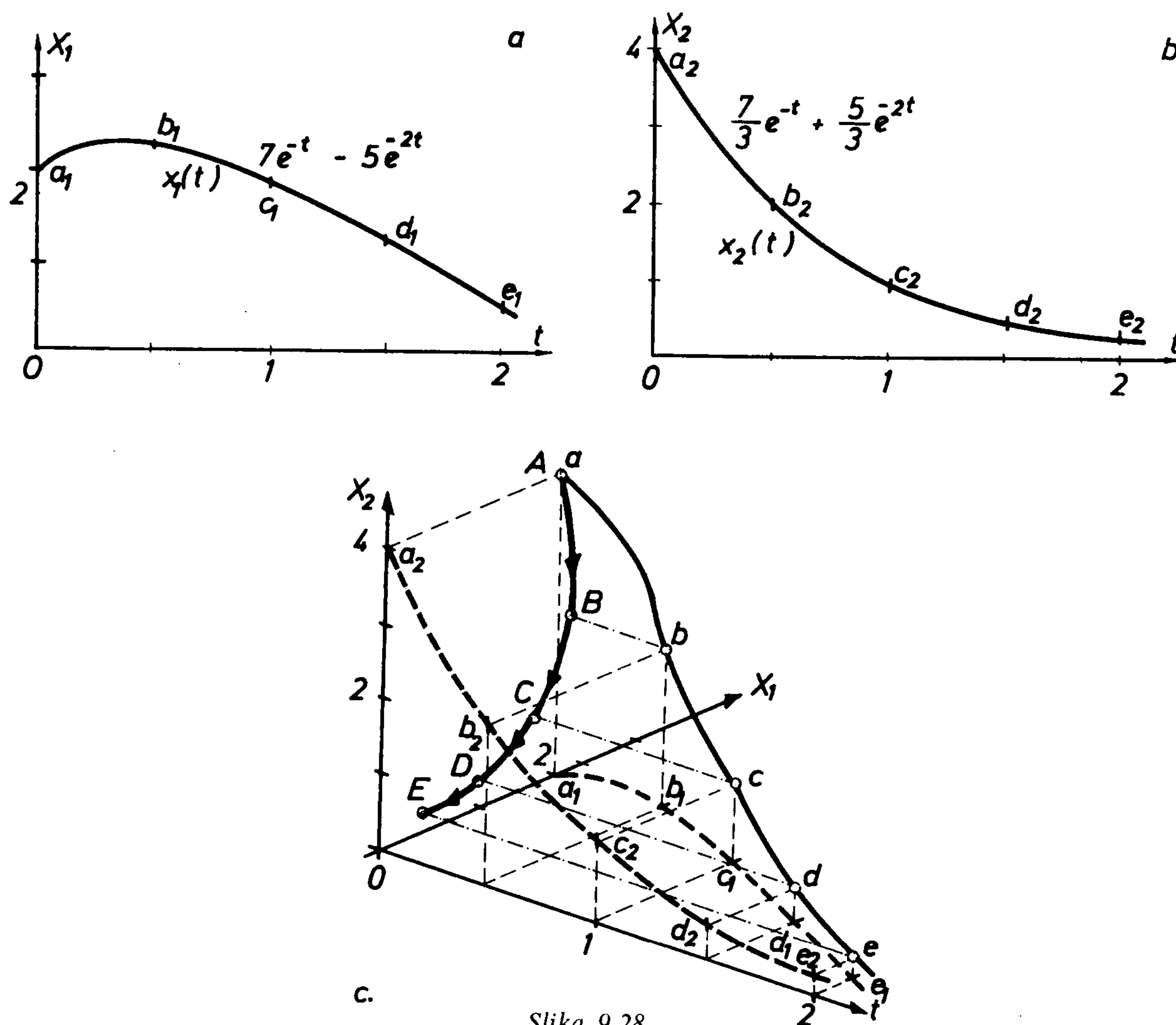
Slobodan odziv sistema L[64]:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -3/2 & -3/2 \\ 1/6 & -3/2 \end{bmatrix} \underline{x} \tag{9.376}$$

iz početnog stanja $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, glasi:

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t) \cdot \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 7e^{-t} - 5e^{-2t} \\ \frac{7}{3}e^{-t} + \frac{5}{3}e^{-2t} \end{bmatrix} \tag{9.377}$$

Pojedinačni odzivi dani su: $x_1(t)$ na sl. 9.28.a, te $x_2(t)$ na sl. 9.28.b. Ako se ovi odzivi spoje u krivulju u prostoru (x_1, x_2, t), dobit će se krivulja a, b, c, d, e (sl. 9.28.c). Preslikavanje te krivulje na ravninu (x_1, x_2) – (ravnina stanja), dobit će se krivulja A, B, C, D, E s parametrom t – trajektorija stanja. Strelica na trajektoriji stanja pokazuje u kojem smjeru se povećava vrijeme.



Slika 9.28.

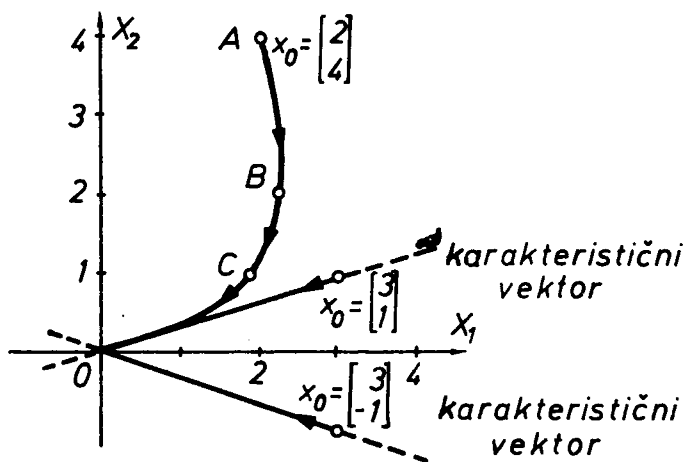
Za slučaj da su početna stanja

$$\underline{x}(0)=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \underline{x}(0)=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} \tag{9.378}$$

dobit će se:

$$\underline{x}(t)=\begin{bmatrix}3e^{-t}\\e^{-t}\end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \underline{x}(t)=\begin{bmatrix}3e^{-2t}\\-e^{-2t}\end{bmatrix} \tag{9.379}$$

Nagibi trajektorije stanja sistema u razmatranim slučajevima su konstantni; $\frac{x_1(t)}{x_2(t)}=3$, odnosno $\frac{x_1(t)}{x_2(t)}=-3$. Trajektorije stanja dane su pravcima kroz ishodište (sl. 9.29).



Slika 9.29.

Pravci na kojima se nalaze početni uvjeti (9.378) pokazuju smjer karakterističnih vektora $\underline{m}_1$ i $\underline{m}_2$ sistema. Naime, točka se može u prostoru stanja izraziti kao:

$$\underline{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=x_1\underline{i}_1+x_2\underline{i}_2+\ldots+x_n\underline{i}_n \tag{9.380}$$

gdje su $\underline{i}_j$ bazni vektori (tvore koordinatni sistem ili bazu prostora), tj. jedinični vektori u smjeru koordinatnih osi (ortovi):

$$\underline{i}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \underline{i}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\ldots\ \underline{i}_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix} \tag{9.381}$$

Skup ovih baznih vektora nije jedini skup; naime, bilo koji skup n linearno nezavisnih vektora također tvori skup baznih vektora. Kako su karakteristični vektori sistema, s različitim i realnim karakterističnim vrijednostima, također linearno nezavisni, i oni mogu tvoriti skup baznih vektora pomoću kojih se može odrediti točka u prostoru:

$$\underline{x}=z_1\cdot\underline{m}_1+z_2\cdot\underline{m}_2+\ldots+z_n\cdot\underline{m}_n \tag{9.382}$$

Ako se karakteristični vektori normalizacijom svedu na jedinične vektore, tj. $||\underline{m}_j||=1$, za $j=1, 2, \ldots, n$, homogena jednadžba stanja poprima oblik:

$$\dot{\underline{x}}=\underline{A}\cdot\underline{z}=z_1(t)\,\underline{A}\cdot\underline{m}_1+\ldots.+z_n(t)\,\underline{A}\cdot\underline{m}_n \tag{9.383}$$

Kako je:

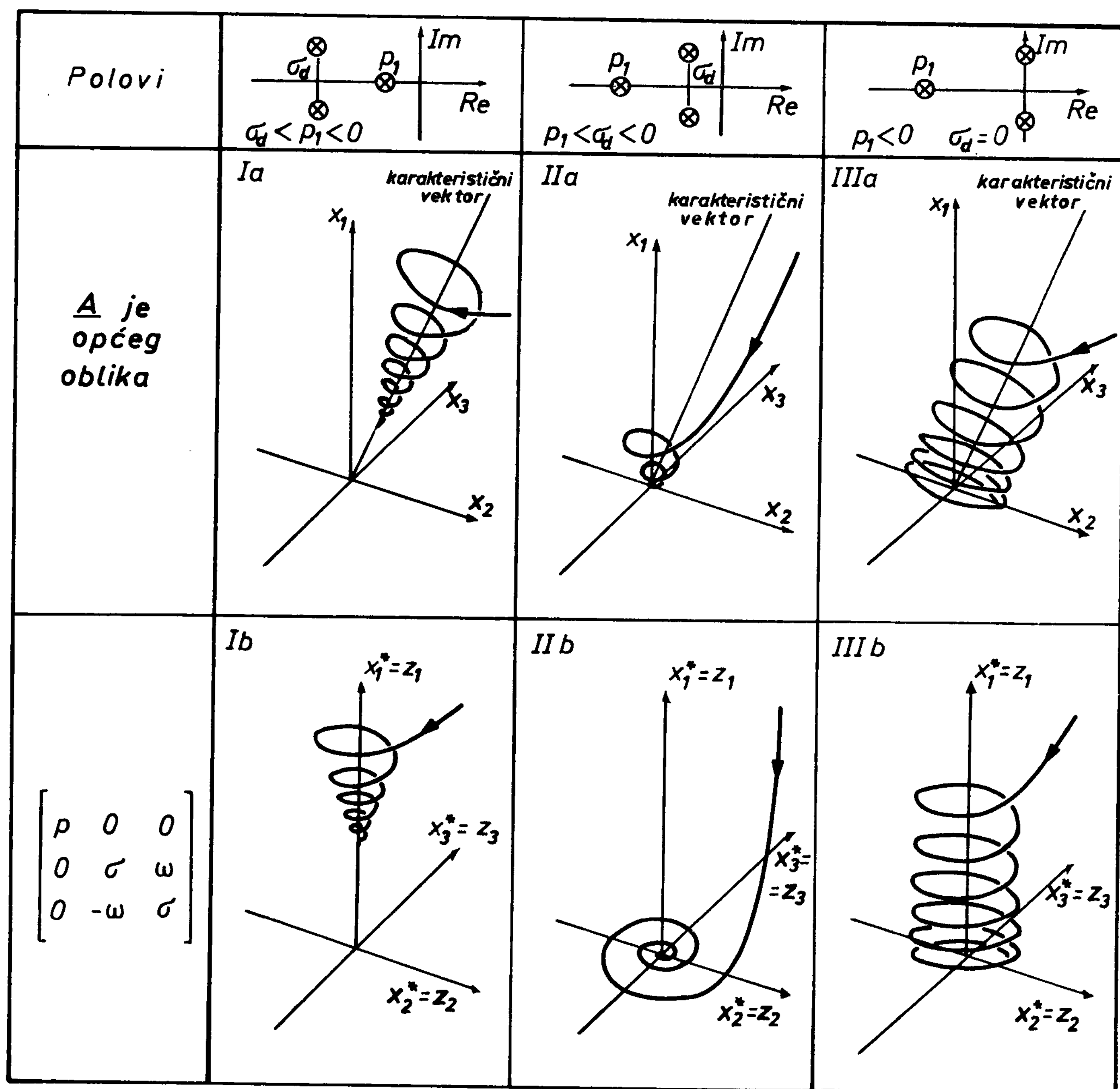
$$\underline{A}\cdot m_j=\lambda_j\underline{m}_j \tag{9.384}$$

to će (9.383) biti:

$$\dot{\underline{x}}=\lambda_j z_j\underline{m}_j \tag{9.385}$$

Iz (9.385) proizlazi da vektor brzine ima smjer karakterističnog vektora, tj. bilo koja trajektorija, koja započinje na karakterističnom vektoru, ostaje na tom vektoru s

konstantnim nagibom. Općenito trajektorija može prolaziti preko karakterističnog vektora. Pri $t \to \infty$ trajektorija stanja teži karakterističnom vektoru (sl. 9.30) L [64]:



Slika 9.30.

Na sl. 9.30. prikazane su neke trajektorije stanja za sistem trećeg reda, koji ima par konjugirano-kompleksnih polova i jedan realan pol. Ovisno o položaju i karakteru dominantnog pola trajektorija će imati različitu putanju. U slučaju kad je realni pol dominantan, u odzivu će prevladavati eksponencijalno ponašanje (jedno karakteristično ponašanje) nad oscilatornim (drugo karakteristično ponašanje sistema). U takvom slučaju (Ia, b na sl. 9.30) trajektorija će se s naglašenijim eksponencijalnim gušenjem nad oscilatornim ponašanjem, približavati karakterističnom vektoru da bi se poklopila s njim u ishodištu.

Kada je konjugirano-kompleksni pol dominantan, doći će do jačeg izražaja oscilatorno ponašanje, koje će to više prevladavati nad eksponencijalnim što je dominantan pol bliže imaginarnoj osi. Takva situacija dana je s IIa, b na sl. 9.30. Kada se konjugirano-kompleksni pol nalazi na imaginarnoj osi oscilatorno ponašanje potisne eksponencijalno, pa će trajektorija stanja opisivati cilindar (IIIa, b na sl. 9.30).

Ako se linearnom transformacijom jednadžbe sistema dovedu na modificirani kanonski oblik, tada će se koordinatne osi dobivenog kanonskog prostora poklopiti s karakterističnim vektorom. Trajektorija stanja u takvom prostoru simetrična je prema koordinantnim osima (Ib, IIb i IIIb na sl. 9.30).

Karakteristični vektor sa sl. 9.30. odgovara realnoj karakterističnoj vrijednosti, budući da karakteristični vektori koji odgovaraju konjugirano-kompleksnim polovima nisu pravci. U slučaju kad sistem ima tri realne i različite karakteristične vrijednosti, u prostoru stanja bi se moglo odrediti tri pravca (karakteristična vektora). Tada bi se trajektorije stanja samo eksponencijalno približavale karakterističnim vektorima (nema oscilatornih ponašanja – polovi realni), dok se konačno ne bi poklopile s njima. Svaki karakteristični vektor imao bi „svoju“ grupu trajektorija (ovisno o početnim uvjetima), koje bi se konačno poklopile s njim. Kao što je izneseno geometrijska interpretacija trajektorije stanja nemoguća je za sisteme reda $n>3$. Međutim, ako se polovi nekog sistema višeg reda nalaze daleko ($\alpha>8\alpha_d$; α_d je udaljenost dominantnog pola od imaginarne osi) od dominantnih polova, moguće ih je zanemariti i sistem promatrati u prostoru $n-l$ dimenzija (l je broj zanemarenih polova). Ovo je dozvoljeno, budući da se karakteristična ponašanja od tih polova brzo „istitraju“ u odzivu sistema.

Postupci koji se najčešće koriste za crtanje trajektorije stanja, a koji se neće detaljnije obrađivati jesu:

– analitički (bazira se na određivanju $x=f(\dot{x})$ iz jednadžbe stanja)
– grafoanalitički (poznatiji kao metoda izoklina)
– simulacijski.

Od gore navedenih postupaka najjednostavniji i najprikladniji je simulacijski postupak.

9.14. Diskretni linearni sistemi automatskog upravljanja opisani pomoću varijabli stanja

Kao što je već u 8. poglavlju izloženo, za razliku od kontinuiranih sistema koji se opisuju diferencijalnim jednadžbama, diskretni sistemi se opisuju jednadžbama diferencije. Za multivarijabilne diskretne sisteme umjesto skalarne jednadžbe diferencija koristi se vektorska jednadžba diferencija.

Stanje diskretnog sistema je skup vektora stanja u trenucima diskretiziranja $\underline{x}(T)$, $\underline{x}(2T)$, $\underline{x}(3T)$, ... Općenito se koristi indeks k za predstavljanje određenog trenutka diskretiziranja, tj. $\underline{x}(k)=\underline{x}(kT)$. T je period diskretiziranja. Jednadžba stanja linearnog diskretnog sistema je jednadžba koja daje stanje sistema u $t=(k+1)T$, kao funkciju stanja u prethodnom trenutku $t=kT$. Vektorske jednadžbe diferencija stacionarnog diskretnog sistema jesu:

$$\underline{x}(k+1)=\underline{P}\underline{x}(k)+\underline{Q}\cdot\underline{u}(k) \tag{9.386}$$

$$\underline{y}(k)=\underline{C}\underline{x}(k)+\underline{D}\cdot\underline{u}(k) \tag{9.387}$$

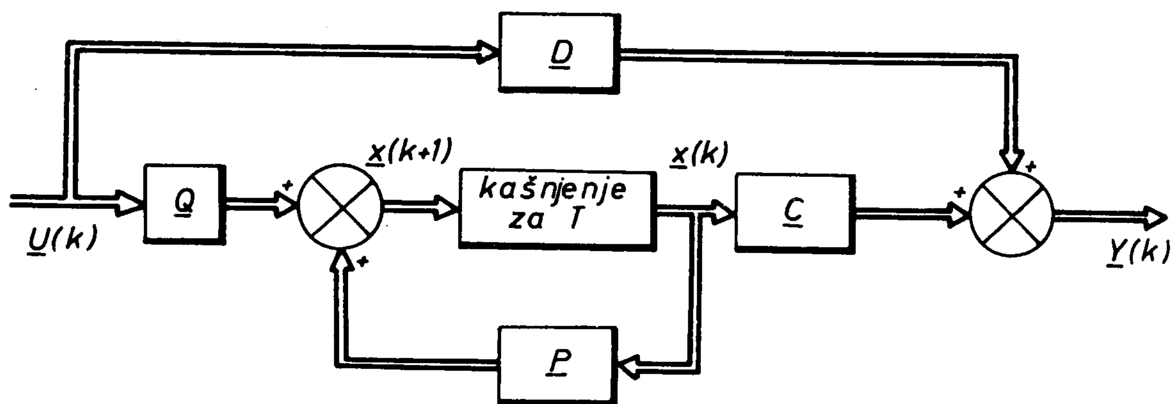
gdje su:

$$\underline{x}(k)=\begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ \vdots \\ x_n(kT) \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots \text{ vektor stanja}$$

$$\underline{y}(k)=\begin{bmatrix} y_1(kT) \\ y_2(kT) \\ \vdots \\ y_r(kT) \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots \text{ vektor izlaza}$$

$$\underline{u}(k)=\begin{bmatrix} u_1(kT) \\ u_2(kT) \\ \vdots \\ u_m(kT) \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots \text{ vektor upravljanja}$$

Ako se usporede jednadžbe stanja i izlaza diskretnog sistema s jednadžbama stanja i izlaza kontinuiranog sistema, uočit će se razlika u tome što je kontinuirana nezavisna varijabla t zamijenjena s varijablom k koja može poprimiti cjelobrojne iznose. Matrice $\underline{P}$ i $\underline{Q}$ imaju istu dimenziju kao i matrice $\underline{A}$ i $\underline{B}$, funkcije su periode diskretiziranja. Za određeni T, matrice $\underline{P}$ i $\underline{Q}$ konstantne su za stacionarni diskretni sistem.



Slika 9.31.

Pri analizi i sintezi kontinuiranih sistema primjenom digitalnog računala, umjesto diferencijalnih jednadžbi svrsishodnija je upotreba jednadžbi diferencija. Po prirodi samog digitalnog računala (diskretni sistem) rješenje u vremenskoj domeni mora se tražiti korak po korak, pa je za takav način rada jedino moguć diskretni matematički model sistema.

Izvod jednadžbe linearnog stacionarnog diskretnog sistema (9.386) može se izvršiti tako da se rješenje kontinuiranog sistema danog izrazom (9.220):

$$\underline{x}(t_f)=e^{\underline{A}(t_f-t_0)}\cdot\underline{x}(t_0)+\int_{\tau=t_0}^{t_f} e^{\underline{A}(t_f-\tau)}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u}(\tau)\,d\tau \tag{9.388}$$

promatra u intervalu $kT<t<(k+1)T$, uz $t_0=kT$, $t_f=(k+1)T$, te konstantan vektor upravljanja $u(t)=u(kT)$. Uz navedene uvjete proizlazi:

$$\underline{x}[(k+1)T]=e^{\underline{A}T}\cdot\underline{x}(kT)+\int_{\tau=kT}^{(k+1)T}e^{\underline{A}(kT+T-\tau)}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u}(kT)\,d\tau \tag{9.389}$$

Supstitucija varijable integracije $\eta=\tau-kT$ omogućuje da se (9.389) napiše u obliku (9.386), tj.:

$$\underline{x}[(k+1)T]=\underline{P}\cdot\underline{x}(kT)+\underline{Q}\cdot u(kT) \tag{9.390}$$

gdje su:

$$\underline{P}=\underline{P}(T)=e^{\underline{A}T} \tag{9.391}$$

$$\underline{Q}=\underline{Q}(T)=e^{\underline{A}T}\cdot\int_0^T e^{-\underline{A}\eta}\cdot\underline{B}\,d\eta \tag{9.392}$$

Integral (9.392) može se još pojednostavniti ako se uzme nova varijabla $\delta=T-\eta$ uz $T=$konst., $d\delta=-d\eta$, te je:

$$\underline{Q}=\int_0^T e^{\underline{A}\delta}\cdot\underline{B}\,d\delta \tag{9.393}$$

Matrice $\underline{P}$ i $\underline{Q}$ mogu se izračunati na digitalnom računalu ako su poznate matrice kontinuiranog sistema $\underline{A}$, $\underline{B}$ i $\underline{C}$.

Za linearne stacionarne diskretne sisteme rješenje jednadžbe (9.389) jest:

$$\begin{aligned}\underline{x}[(k+1)T]&=e^{\underline{A}T}\cdot\underline{x}(kT)+e^{\underline{A}T}(\underline{I}-e^{-\underline{A}T})\cdot\underline{A}^{-1}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u}(kT)\\&=e^{\underline{A}T}\cdot\underline{x}(kT)+(e^{\underline{A}T}-\underline{I})\cdot\underline{A}^{-1}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u}(kT)\end{aligned} \tag{9.394}$$

Jednadžba (9.394) može se napisati u obliku ekvivalentnom (9.386) ili (9.390), tj.:

$$\underline{x}[(k+1)T]=\underline{P}\cdot\underline{x}(kT)+\underline{Q}\cdot\underline{u}(kT) \tag{9.395}$$

gdje su:

$$\underline{P}=e^{\underline{A}T} \tag{9.396}$$

$$\underline{Q}=(e^{\underline{A}T}-\underline{I})\cdot\underline{A}^{-1}\cdot\underline{B} \tag{9.397}$$

Rješavanje vektorskih jednadžbi diferencija mnogo je jednostavnije od rješavanja diferencijalnih jednadžbi. To je rekurzioni postupak u skladu s iterativnim radom digitalnog računala.

Uz $k=1$ jednadžba diferencije (9.386) glasi:

$$\underline{x}(1)=\underline{P}\underline{x}(0)+\underline{Q}\cdot\underline{u}(0) \tag{9.398}$$

Za $k=2$, bit će:

$$\begin{aligned}\underline{x}(2)&=\underline{P}\cdot\underline{x}(1)+\underline{Q}\cdot\underline{u}(1)=\underline{P}[\underline{P}\underline{x}(0)+\underline{Q}\cdot\underline{u}(0)]+\underline{Q}\cdot\underline{u}(1)=\\&=\underline{P}^2\cdot\underline{x}(0)+[\underline{P}\cdot\underline{Q}\cdot\underline{u}(0)+\underline{Q}\cdot\underline{u}(1)]\end{aligned} \tag{9.399}$$

Gornji postupak nastavlja se za $k=3, 4, \ldots$

Opći oblik rješenja za $\underline{x}(k)$, $k=1, 2, 3, \ldots$ glasi:

$$\underline{x}(k)=\underline{P}^k \cdot \underline{x}(0)+\sum_{i=0}^{k-1} \underline{P}^{k-1-i} \cdot \underline{Q} \cdot \underline{u}(i) \tag{9.400}$$

U tablici 9.2. dani su izrazi za slobodni i prinudni odziv kontinuiranog i odgovarajućeg diskretnog sistema.

Tablica 9.2.

Odziv	Kontinuirani sistem	Diskretni sistem
slobodni	$e^{\underline{A}t} \cdot \underline{x}(0)$	$\underline{P}^k \cdot x(0)$
prinudni	$\int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau)\, d\tau$	$\sum_{i=0}^{k-1} \underline{P}^{k-1-i} \cdot \underline{Q} \cdot \underline{u}(i)$

Rješenje jednadžbe (9.386) diskretnog sisema dano izrazom (9.400) poklapa se s diskretnim rješenjem (9.389) kontinuiranog sistema samo u slučaju kada se matrice $\underline{P}$ i $\underline{Q}$ izračunaju preko (9.391) i (9.392), te da je vektor upravljanja konstantan unutar intervala diskretizacije. U slučaju kada $\underline{u}(t)$ nije konstantan, točnost rješenja (9.389) ovisit će o funkciji $\underline{u}(t)$ unutar $kT<t<(k+1)\,T$, i bit će veća uz manji period T.

Jedan od postupaka rješavanja (9.400) pomoću digitalnog računala dao je H. M. Paynter. Da bi se mogla koristiti jednadžba (9.400) potrebno je najprije izračunati matrice $\underline{P}$ i $\underline{Q}$, koje ovise o $\underline{A}$ i $\underline{B}$. Kako i T igra važnu ulogu za izračunavanje $\underline{P}$ i $\underline{Q}$ zato ga je potrebno odrediti. Pri analizi matematičkog modela diskretnog sistema primjenom digitalnog računala, perioda diskretizacije T (korak integracije) određuje se prema zahtjevima na točnost matematičkog modela. U većini slučajeva moguće je odabrati T prema karakteristikama sistema, izraz (8.22). Kada se računalo koristi za određivanje matrica $\underline{P}$ i $\underline{Q}$, prikladan postupak jest da se one prikažu Taylorovim redom:

$$\underline{P}=e^{\underline{A}T}=\underline{I}+\underline{A}T+\frac{1}{2!}(\underline{A}T)^2+\ldots \tag{9.401}$$

Da bi se izbjegla inverzija matrice $\underline{A}$ u izrazu za $\underline{Q}$ potrebno je:

$$(e^{\underline{A}T}-\underline{I})=\left(\underline{I}+\underline{A}T+\frac{1}{2!}(\underline{A}T)^2+\ldots\right)-\underline{I}$$

$$=\underline{A}T+\frac{1}{2!}(\underline{A}T)^2+\ldots \tag{9.402}$$

$$(e^{\underline{A}T}-\underline{I})\cdot\underline{A}^{-1}=T\left(\underline{I}+\frac{1}{2!}\underline{A}T+\frac{1}{3!}(\underline{A}T)^2+\ldots\right) \tag{9.403}$$

$$\underline{Q}=T\left(\underline{I}+\frac{1}{2!}\underline{A}T+\frac{1}{3!}(\underline{A}T)^2+\ldots\right)\cdot\underline{B} \tag{9.404}$$

Za proračun na digitalnom računalu nužno je definirati do kojeg člana reda će se računati $\underline{P}$ i $\underline{Q}$. H. M. Paynter daje preporuku L [64]:

1. Odrediti $q = max\,|A_{ij}T|$; A_{ij} je element matrice $\underline{A}$.
2. Odrediti „p" koji približno zadovoljava jednadžbu

$$\frac{1}{p!}(nq)^p \cdot e^{nq} = 0.001$$

n je red sistema.

3. Izračunati $\underline{P}$ iz (9.401) odbacivši članove reda više od „p"-tog člana.
4. Izračunati $\underline{Q}$ iz (9.404) odbacivši članove reda više od „p"-tog člana.
5. Proračunati odziv iz (9.400).

Na sl. 9.32. L[64] prikazan je dijagram toka programa za proračun diskretnog modela sistema i njegova odziva na bazi Paynterovih preporuka.

U slučaju kada je T vrlo mali mogu se koristiti približne relacije:

$$\underline{P} = e^{\underline{A}T} \approx \underline{I} + \underline{A}T \tag{9.405}$$

$$\underline{Q} \approx \underline{B} \cdot T \tag{9.406}$$

Jednadžbu stanja diskretnog sistema moguće je rješavati primjenom Z-transformacije.

Kako je $z = e^{sT}$, moguće je definirati vektor stanja:

$$\underline{X}(z) \overset{\text{def}}{=} Z\{\underline{x}(k)\} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \underline{x}(k)\, z^{-k} \tag{9.407}$$

Uz:

$$Z\{\underline{x}(k+1)\,T\} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underline{x}[(k+1)\,T]}{z^k} = z\underline{X}(z) - z\underline{x}(0) \tag{9.408}$$

$$Z\{\underline{u}(kT)\} = \underline{U}(z) \tag{9.409}$$

proizlazi da je vektorska jednadžba diferencija (9.386) u z-području dana sa:

$$z\underline{X}(z) - z\,\underline{x}(0) = \underline{P}\,\underline{X}(z) + \underline{Q}\cdot\underline{U}(z) \tag{9.410}$$

Iz (9.410) će biti:

$$\underline{X}(z) = (z\underline{I} - \underline{P})^{-1}\cdot z\cdot\underline{x}(0) + (z\underline{I} - \underline{P})^{-1}\cdot\underline{Q}\cdot\underline{U}(z) \tag{9.411}$$

odnosno:

$$\underline{x}(k) = Z^{-1}\{(z\underline{I} - \underline{P})^{-1}\cdot z\}\cdot\underline{x}(0) + Z^{-1}\{(z\underline{I} - \underline{P})^{-1}\cdot Q\cdot\underline{U}(z)\} \tag{9.412}$$

Prijelazna matrica stanja diskretnog sistema je:

$$\underline{\Phi}(k) = \underline{P}^k = Z^{-1}\{(z\underline{I} - \underline{P})^{-1}\cdot z\} \tag{9.413}$$

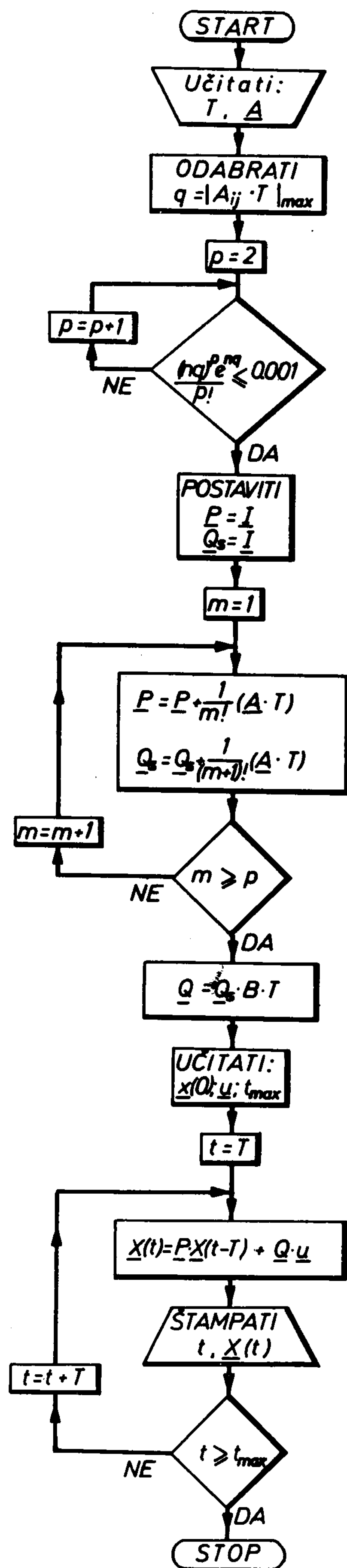
Ova matrica zadovoljava:

$$\underline{\Phi}(k+1) = \underline{P}\cdot\underline{Q}(k) \tag{9.414}$$

$$\underline{\Phi}(0) = \underline{I}$$

pa se (9.400) može izraziti:

$$\underline{x}(k) = \underline{\Phi}(k)\cdot\underline{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \underline{\Phi}(k-i-1)\cdot\underline{Q}\cdot\underline{u}(i) \tag{9.415}$$



$$\frac{(nq)^p e^{nq}}{p!} \leqslant 0.001$$

$$P = P + \frac{1}{m!}(A \cdot T)$$

$$Q_s = Q_s + \frac{1}{(m+1)!}(A \cdot T)$$

1.

2.

3.

4.

5.

Slika 9.32.

Izlazni signal sistema je:

$$\underline{y}(k)=\underline{C}\,\underline{\Phi}(k)\cdot\underline{x}(0)+\underline{C}\cdot\sum_{i=0}^{k-1}\underline{\Phi}(k-i-1)\cdot\underline{Q}\cdot\underline{u}(i)+\underline{D}\,\underline{u}(k) \qquad (9.416)$$

Karakteristična jednadžba diskretnog sistema glasi:

$$|z\underline{I}-\underline{P}|=0 \qquad (9.417)$$

Ako su korijeni karakteristične jednadžbe (karakteristične vrijednosti) različiti z_1, $z_2, \ldots, z_n$, tada je moguće svaki element matrice $(z\underline{I}-\underline{P})^{-1}\cdot z$ rastaviti na parcijalne razlomke:

$$\frac{k_1 z}{z-z_1}+\ldots+\frac{k_n z}{z-z_n}$$

te inverznom Z-transformacijom

$$Z^{-1}\left\{\frac{k_i z}{z-z_i}\right\}=k_i\cdot z_i^k$$

odrediti elemente prijelazne matrice $\underline{\Phi}(k)$. Analogno kontinuiranim sistemima moguće je dijagonalizirati matricu $\underline{P}$, samo ako su karakteristične vrijednosti realne i različite. Modalna matrica tada je matrica s karakterističnim vektorima kao stupcima $\underline{m}_j$:

$$\underline{M}=[\underline{m}_1 \quad \underline{m}_2 \ldots\ldots \underline{m}_n] \qquad (9.418)$$

Karakteristični vektori mogu se odrediti iz:

$$(z_j\underline{I}-\underline{P})\cdot\underline{m}_j=\underline{0} \qquad j=1, 2, \ldots n \qquad (9.419)$$

Jednadžba diferencije stanja sistema u kanonskom obliku glasi:

$$\underline{x}^*(k+1)=\underline{\Lambda}\,\underline{x}^*(k)+\underline{Q}_n\cdot\underline{u}(k) \qquad (9.420)$$

Za razliku od kontinuiranih sistema kod kojih se varijable stanja kanonskih modela označavaju sa $\underline{z}$, kod diskretnih sistema one su označene sa $\underline{x}^*(k)$ kako bi se razlikovale od varijable Z-transformacije. Kanonska matrica stanja diskretnog sistema jest:

$$\underline{\Lambda}=\begin{bmatrix} z_1 & & 0 \\ & z_2 & \\ 0 & & \ddots\, z_n \end{bmatrix} \qquad (9.421)$$

$$\underline{Q}_n=\underline{M}^{-1}\cdot\underline{Q} \qquad (9.422)$$

Prijelazna matrica u kanonskom obliku također je dijagonalna matrica dana sa:

$$\underline{\Phi}_n(k)=\begin{bmatrix} z_1^k & & 0 \\ & z_2^k & \\ & & \ddots \\ 0 & & z_n^k \end{bmatrix} \qquad (9.423)$$

$$\underline{\Phi}(k)=\underline{M}\cdot\underline{\Phi}_n(k)\cdot\underline{M}^{-1} \qquad (9.424)$$

Kada diskretni sistem ima konjugirano-kompleksne karakteristične vrijednosti, matrica sistema svodi se na modificirani kanonski oblik (9.327), da bi se eliminirale

imaginarne veličine u matricama $\underline{\Lambda}$, $\underline{Q}$, $\underline{C}$ i $\underline{D}$. Matrica sistema neće više biti dijagonalna, već će imati Jordanov kanonski oblik.

Prijenosna matrica diskretnog sistema određuje se istim postupkom kao i kod kontinuiranih sistema. Ako je:

$$\underline{Y}(z)=\underline{C}\cdot\underline{X}(z)+\underline{D}\cdot\underline{U}(z) \tag{9.425}$$

te ako se (9.411) uvrsti u (9.425) i pretpostavi da je $\underline{x}(0)=0$, dobit će se nakon sređenja:

$$\underline{G}_0(z)=\frac{\underline{Y}(z)}{\underline{U}(z)}=\underline{C}(z\underline{I}-\underline{P})^{-1}\cdot\underline{Q}+\underline{D} \tag{9.426}$$

Izraz (9.426) je *diskretna prijenosna matrica sistema*. Postupci određivanja matematičkog modela stanja iz prijenosne funkcije sistema vrijede i za diskretni sistem ako je poznata njegova prijenosna funkcija $G(z)$.

Osmotrivost i upravljivost diskretnog sistema ispituju se po analogiji s kontinuiranim sistemima, tj. u izrazima (9.339) i (9.364) matrice $\underline{A}$ i $\underline{B}$ su zamijenjene sa $\underline{P}$ i $\underline{Q}$. Pri tome treba paziti da uvjeti (9.339) i (9.364) vrijede za diskretne sisteme samo u slučaju da je matrica $\underline{P}$ nesingularna L [49, 51].

Primjer 9.27.

Potrebno je odrediti prijelaznu matricu stanja i odziv diskretnog sistema na $u(k)=1$, za $k=1, 2, \ldots$ sistem je prema (9.390) određen izrazom:

$$\underline{x}(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}\cdot\underline{x}(k)+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u(k) \tag{9.427}$$

$$\underline{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} \tag{9.428}$$

Iz (9.413) proizlazi:

$$\underline{\Phi}(k)=\underline{P}^k=Z^{-1}\{(z\underline{I}-\underline{P})^{-1}\cdot z\} \tag{9.429}$$

Kako je:

$$(z\underline{I}-\underline{P})^{-1}=\begin{bmatrix}z & -1\\ 0{,}16 & z+1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{z+1}{(z+0{,}2)(z+0{,}8)} & \frac{1}{(z+0{,}2)(z+0{,}8)}\\ \frac{-0{,}16}{(z+0{,}2)(z+0{,}8)} & \frac{z}{(z+0{,}2)(z+0{,}8)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\frac{4}{3}}{z+0{,}2}+\frac{-\frac{1}{3}}{z+0{,}8} & \frac{\frac{5}{3}}{z+0{,}2}+\frac{-\frac{5}{3}}{z+0{,}8}\\ \frac{-\frac{0{,}8}{3}}{z+0{,}2}+\frac{\frac{0{,}8}{3}}{z+0{,}8} & \frac{-\frac{1}{3}}{z+0{,}2}+\frac{\frac{4}{3}}{z+0{,}8}\end{bmatrix} \tag{9.430}$$

Prijelazna matrica je:

$$\underline{\Phi}(k)=\begin{bmatrix} \frac{4}{3}(-0{,}2)^k-\frac{1}{3}(-0{,}8)^k & \frac{5}{3}(-0{,}2)^k-\frac{5}{3}(-0{,}8)^k \\ -\frac{0{,}8}{3}(-0{,}2)^k+\frac{0{,}8}{3}(-0{,}8)^k & -\frac{1}{3}(-0{,}2)^k+\frac{4}{3}(-0{,}8)^k \end{bmatrix} \tag{9.431}$$

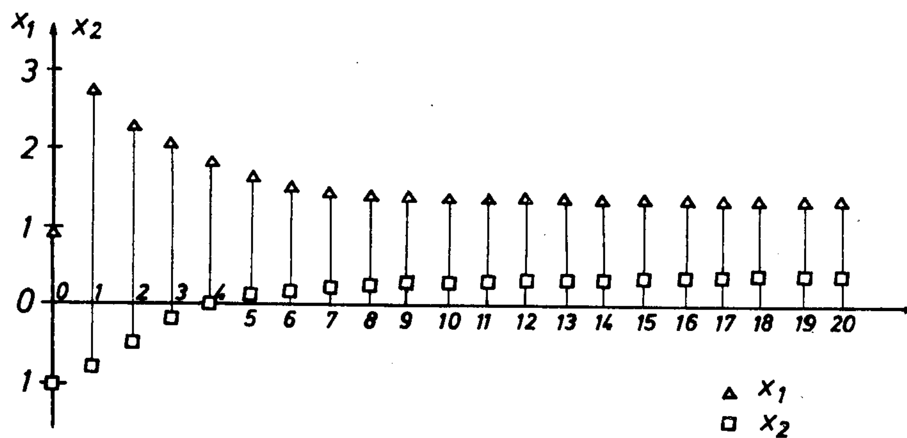
odziv sistema bit će:

$$\underline{X}(z)=(z\underline{I}-\underline{P})^{-1}\cdot z\cdot \underline{x}(0)+(z\underline{I}-\underline{P})^{-1}\cdot Q\cdot U(z) \tag{9.432}$$

Kako je $U(z)=\frac{z}{z-1}$, bit će:

$$\underline{X}(z)=\begin{bmatrix} \frac{-\frac{17}{6}\cdot z}{z+0{,}2}+\frac{\frac{22}{9}\cdot z}{z+0{,}8}+\frac{\frac{25}{18}\cdot z}{z-1} \\ \frac{\frac{3{,}4}{6}\cdot z}{z+0{,}2}+\frac{-\frac{17{,}6}{9}\cdot z}{z+0{,}8}+\frac{\frac{7}{18}\cdot z}{z-1} \end{bmatrix} \tag{9.433}$$

$$\underline{x}(k)=Z^{-1}\{\underline{X}(z)\}=\begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0{,}2)^k+\frac{22}{9}(-0{,}8)^k+\frac{25}{18} \\ \frac{3{,}4}{6}(-0{,}2)^k-\frac{17{,}6}{9}(-0{,}8)^k+\frac{7}{18} \end{bmatrix} \tag{9.434}$$



Slika 9.33.

Primjer 9.28.

Potrebno je diskretizirati kontinuirani sistem opisan sa:

$$\dot{\underline{x}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \tag{9.435}$$

Diskretizirani sistem treba imati jednadžbu stanja oblika:

$$\underline{x}[(k+1)T]=\underline{P}(T)\cdot\underline{x}(kT)+\underline{Q}(T)\cdot u(kT) \qquad (9.436)$$

Kako je:

$$\underline{P}(T)=e^{\underline{A}T}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2T})\\ 0 & e^{-2T}\end{bmatrix} \qquad (9.437)$$

$$\underline{Q}(T)=\left(\int_0^T e^{\underline{A}\delta}\,d\delta\right)\underline{B}=\left\{\int_0^T\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2\delta})\\ 0 & e^{-2\delta}\end{bmatrix}d\delta\right\}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}T+\frac{e^{-2T}-1}{4}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2T}\end{bmatrix} \qquad (9.438)$$

$$\begin{bmatrix}x_1[(k+1)T]\\ x_2[(k+1)T]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2T})\\ 0 & e^{-2T}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1(kT)\\ x_2(kT)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}T+\frac{e^{-2T}-1}{4}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2T}\end{bmatrix}\cdot u(kT)$$

Ako je $T=1[\text{sek}]$: (9.439)

$$\underline{x}[(k+1)T]=\begin{bmatrix}1 & 0{,}432\\ 0 & 0{,}135\end{bmatrix}\cdot\underline{x}(kT)+\begin{bmatrix}0{,}285\\ 0{,}432\end{bmatrix}\cdot u(kT) \qquad (9.440)$$

U praksi se vrlo često susreće potreba da se kontinuirani sistem aproksimira s diskretnim matematičkim modelom. Rješenja se tada dobivaju na digitalnom računalu koje može rješavati i mnogo složenije probleme, kao npr. nelinearne sisteme, nestacionarne sisteme itd. Varijable stanja se unutar perioda diskretiziranja ne mijenjaju (ostaju na nivou izračunate vrijednosti u $t=kT$). Što je T manji, to je točnija aproksimacija.

Primjer 9.29.

Pretpostavlja se da u 1980. godini u državi A ima 25 milijuna, a u gradu B 1 000 000 stanovnika. Ako se pretpostavi da svake godine napusti grad B 2% od njegova stanovništva, a da istovremeno dođe u grad B, 0,2% preostalog stanovništva države A, te ako se pretpostavi da je prosječni prirodni priraštaj stanovništva 1% godišnje, potrebno je odrediti koliko bi prema ovako pretpostavljenim statističkim podacima grad B imao stanovnika u 1990. godini?

Ako se 1980. godina uzme kao 0-ta, te ako se broj stanovnika grada B u k-toj godini označi s $x_1(k)$, a broj stanovnika države bez grada B sa $x_2(k)$, tada će vrijediti sljedeći matematički model:

$$\begin{aligned}x_1(k+1)&=1{,}01[(1-0{,}02)\,x_1(k)+0{,}002\,x_2(k)]\\ x_2(k+1)&=1{,}01[0{,}02\,x_1(k)+(1-0{,}002)\,x_2(k)]\end{aligned} \qquad (9.441)$$

Početni uvjeti jesu:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 10^6 \\ x_2(0) &= 24 \cdot 10^6 \end{aligned} \tag{9.442}$$

Jednadžbe (9.441) u matričnom su obliku:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{P} \cdot \underline{x}(k) \tag{9.443}$$

Kako je:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 1{,}01 \cdot (1-0{,}02) & 1{,}01 \cdot 0{,}002 \\ 1{,}01 \cdot 0{,}02 & 1{,}01 \cdot (1-0{,}002) \end{bmatrix} \tag{9.444}$$

rješenje (9.441) glasi:

$$\underline{x}(k) = \underline{P}^k \cdot \underline{x}(0) \tag{9.445}$$

Prema (9.413) bit će:

$$\underline{\Phi}(k) = \underline{P}^k = Z^{-1}\{(z\underline{I} - \underline{P})^{-1} \cdot z\} \tag{9.446}$$

$$\begin{aligned}
(z\underline{I} - \underline{P})^{-1} &= \begin{bmatrix} z-0{,}9898 & -0{,}00202 \\ -0{,}0202 & z-1{,}00798 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{z-1{,}00798}{(z-1{,}01)(z-0{,}988)} & \dfrac{0{,}00202}{(z-1{,}01)(z-0{,}988)} \\ \dfrac{0{,}0202}{(z-1{,}01)(z-0{,}988)} & \dfrac{z-0{,}9898}{(z-1{,}01)(z-0{,}988)} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{0{,}092}{z-1{,}01} + \dfrac{0{,}908}{z-0{,}988} & \dfrac{0{,}0918}{z-1{,}01} - \dfrac{0{,}0918}{z-0{,}988} \\ \dfrac{0{,}918}{z-1{,}01} - \dfrac{0{,}918}{z-0{,}988} & \dfrac{0{,}918}{z-1{,}01} + \dfrac{0{,}082}{z-0{,}988} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{9.447}$$

Iz (9.446) proizlazi:

$$\begin{aligned}
\underline{P}^k &= Z^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \dfrac{0{,}092z}{z-1{,}01} + \dfrac{0{,}908z}{z-0{,}988} & \dfrac{0{,}0918z}{z-1{,}01} - \dfrac{0{,}0918z}{z-0{,}988} \\ \dfrac{0{,}918z}{z-1{,}01} - \dfrac{0{,}918z}{z-0{,}988} & \dfrac{0{,}918z}{z-1{,}01} + \dfrac{0{,}082z}{z-0{,}988} \end{bmatrix}\right\} \\
&= \begin{bmatrix} 0{,}092 \cdot (1{,}01)^k + 0{,}908 \cdot (0{,}988)^k & 0{,}0918[(1{,}01)^k - (0{,}988)^k] \\ 0{,}918 \cdot [(1{,}01)^k - (0{,}988)^k] & 0{,}918 \cdot (1{,}01)^k + 0{,}082 \cdot (0{,}988)^k \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{9.448}$$

Iz (9.445) proizlazi:

$$\underline{x}(k) = \underline{P}^k \cdot \underline{x}(0) = 10^6 \cdot \begin{bmatrix} 22{,}124 \cdot (1{,}01)^k - 21{,}124\,(0{,}988)^k \\ 22{,}95 \cdot (1{,}01)^k + 1{,}05 \cdot (0{,}988)^k \end{bmatrix} \tag{9.449}$$

Za 1990. godinu $k=10$, te je:

$$\underline{x}(10) = \begin{bmatrix} 5{,}717 \cdot 10^6 \\ 26{,}282 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \tag{9.450}$$

Prema pretpostavljenim podacima izlazi da će grad B 1900. godine imati 5 717 000 stanovnika, a država će imati 32 000 000 stanovnika. Tako velik priliv stanovništva moguć je zbog toga, jer u matematičkom modelu nisu uzeti u razmatranje mortalitet i druga migracijska kretanja koja mnogo utječu na statističku sliku populacije, a pored toga su i postoci odabrani sasvim proizvoljno.

Takve sisteme moguće je jedino opisati diskretnim modelom, budući da je stanje poznato samo u određenom trenutku (popisi stanovništva obavljaju se obično svake desete godine).

9.15. Stabilnost sistema primjenom varijabli stanja

Kao što je prikazano u prethodnim poglavljima stabilnost linearnog kontinuiranog sistema ovisi o korijenima karakteristične jednadžbe. Za kontinuirane sisteme to znači da karakteristična jednadžba:

$$|\lambda \underline{I} - \underline{A}| = 0 \qquad (9.451)$$

mora imati korijene u lijevoj poluravnini, a za diskretne sisteme karakteristična jednadžba:

$$|z \underline{I} - \underline{P}| = 0 \qquad (9.452)$$

mora imati korijene unutar jedinične kružnice.

Kriteriji stabilnosti odabiru se prema svrsishodnosti. Tako npr. ako se razmatraju jednadžbe stanja sistema $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$ ili $\underline{x}[(k+1)\,T] = \underline{P} \cdot \underline{x}\,(k) + \underline{Q} \cdot \underline{u}\,(k)$, te ako se želi odrediti njegova stabilnost, bez rješavanja karakteristične jednadžbe sistema, koristit će se teoremi A. M. Ljapunova (1857 – 1918). S druge strane, ako je poznat karakteristični polinom sistema ili je on dobiven manipulacijama prijenosne funkcije podsistema u blok-dijagramu ili dijagramu toka signala, tada će biti prikladniji kriteriji E. J. Routha (1831 – 1907), E. I. Juryja, Schur – Cohna i drugih. U situacijama kada se dinamika sistema određuje eksperimentalno, stabilnost sistema je najprikladnije određivati primjenom kriterija H. Nyquista. Kod multivarijabilnih sistema dolazi do međudjelovanja ulaza na ostale izlaze preko podsistema (sl. 9.19), pa je eksperimentalno određivanje frekvencijske karakteristike nemoguće, osim u slučaju kada se sistem može rastaviti na neinterakcijske podsisteme L[12]. Za multivarijabilne sisteme navedeni kriteriji, s izuzetkom kriterija Ljapunova, ne daju prave odgovore. Na bazi grafičke metode Nyquista (za sisteme s jednim ulazom i izlazom), H. H. Rosenbrock L[54] je razvio metodu inverznog Nyquistova slijeda (Inverse Nyquist Array) – INA, za multivarijabilne sisteme, koja se osniva na teoriji dijagonalno dominantnih matrica, te se neće ovdje izlagati.

Iako je kriterij Ljapunova najopćenitiji i danas se najčešće susreće u teoretskim radovima i stručnoj literaturi, on je za inženjersku praksu nepogodan, ako se sistem promatra kao nelinearan. Za razliku od ostalih on vrijedi kako za linearne, tako i za nelinearne stacionarne ili nestacionarne sisteme, za sisteme s jednim ulazom i izlazom ili za multivarijabilne sisteme, te će se zbog toga izložiti. Osim toga, razumijevanje stabilnosti u smislu Ljapunova ima velik značaj, jer se takva logika razmišljanja o stabilnosti može primijeniti na sve poznate sisteme.

Godine 1892. A. M. Ljapunov (profesor matematike u Harkovu) izložio je L[37] dvije metode za određivanje stabilnosti dinamičkih sistema opisanih običnim diferencijalnim jednadžbama.

Prva metoda sastoji se u postupku rješavanja diferencijalnih jednadžbi eksplicitnog izražavanja rješenja i zaključivanja o stabilnosti na osnovi ponašanja rješenja.

Druga metoda je prikladnija, budući da ne zahtijeva poznavanje rješenja. Ona se često susreće pod imenom direktne metode Ljapunova (5.1). To je algebarska metoda koja ne zahtijeva poznavanje karakterističnih vrijednosti sistema. Ona se može iskoristiti pri procjeni prijelaznog stanja sistema te za sintezu sistema.

Stabilnost sistema u smislu Ljapunova

Kako je već u glavi V. izloženo, stabilnost linearnih sistema ovisi isključivo o parametrima sistema, a stabilnost nelinearnih sistema ovisi i o vanjskim djelovanjima na sistem. Za opću analizu stabilnosti potrebno je u matematički model sistema (jednadžbu stanja) uključiti i vanjska djelovanja:

$$\underline{\dot{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}, t) \tag{9.453}$$

Budući da ne postoji opća teorija stabilnosti sistema kada na sistem djeluju promjenljivi signali, pretpostavlja se da ako ulazni signal postoji, on može biti samo konstantan. U protivnom definicija stabilnosti glasi: sistem je stabilan ako ograničeni ulazni signali rezultiraju u ograničenim izlaznim signalima.

Stabilnost u smislu Ljapunova temelji se na promatranju poremećenog stanja sistema $\underline{x}(t)$, u odnosu na ravnotežno stanje sistema $\underline{x}_r$, opisanog homogenom diferencijalnom jednadžbom:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} \tag{9.454}$$

Sistem s konstantnim ulaznim signalom $\underline{u}$, uvijek se može opisati s homogenom diferencijalnom jednadžbom oblika (9.454).

Ravnotežno stanje sistema $\underline{x}_r$, je točka u prostoru stanja u kojoj nema promjene stanja, tj. $\underline{\dot{x}} = \underline{0}$. Ako se za bilo koji konstantni vektor upravljanja $\underline{u}(t) = \underline{U}$ može u prostoru stanja naći točka $\underline{x}(t) = \underline{x}_r = konst$, takva da je u njoj $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{0}$ za svaki t, tada je takva točka ravnotežno stanje sistema koje odgovara narinutom signalu $\underline{U}$. Ako se ova definicija primijeni na linearni sistem:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{u} \tag{9.455}$$

onda mora biti:

$$\underline{A} \cdot \underline{x}_r + \underline{B} \cdot \underline{U} = \underline{0} \tag{9.456}$$

odnosno, uz pretpostavku nesingularne matrice $\underline{A}$:

$$\underline{x}_r = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{B} \cdot \underline{U} \tag{9.457}$$

Za linearan i nelinearan sistem ravnotežno stanje mora zadovoljavati jednadžbu:

$$f(\underline{x}_r, \underline{U}, t) = \underline{0} \qquad \text{za sve } t \tag{9.458}$$

Linearni sistemi imaju samo jedno ravnotežno stanje, a nelinearni ih mogu imati više. Pri analizi stabilnosti sistema u odnosu na jedno ravnotežno stanje pogodno je pomaknuti ishodište prostora stanja u točku ravnotežnog stanja, tj.:

$$\underline{w} = \underline{x} - \underline{x}_r \qquad \text{te} \qquad \underline{\dot{w}} = \underline{\dot{x}}$$

Za linearne sisteme proizlazi:

$$\underline{\dot{w}} = A \cdot (\underline{w} + \underline{x}_r) + \underline{B} \cdot \underline{U} \tag{9.459}$$

Ako se (9.456) uvrsti u (9.459) proizlazi:

$$\underline{\dot{w}} = \underline{A} \cdot \underline{w} \tag{9.460}$$

Jednadžba (9.460) je homogena diferencijalna jednadžba.

Ako je stanje sistema $\underline{x} = \underline{x}_r$, tada će sistem ostati u tom stanju beskonačno dugo budući je $\underline{\dot{x}} = \underline{0}$, za svaki t. Ako se, međutim, sistem pomakne iz tog stanja (zbog malog poremećaja), vektor stanja općenito će se mijenjati s vremenom. Točka $\underline{x}\,(t)$ opisivat će trajektoriju u prostoru stanja. Priroda ova trajektorije, tj. priroda ponašanja sistema poremećenog iz ravnotežnog stanja, određuje stabilnost ili nestabilnost ravnotežnog stanja, (odnosno sistema, ako se radi o linearnom sistemu).

Stabilnost u smislu Ljapunova promatra se unutar područja $S\,(R)$ (kružnica za $n=2$, kugla za $n=3$ i hipersfera za $n \geq 4$) (sl. 9.34).

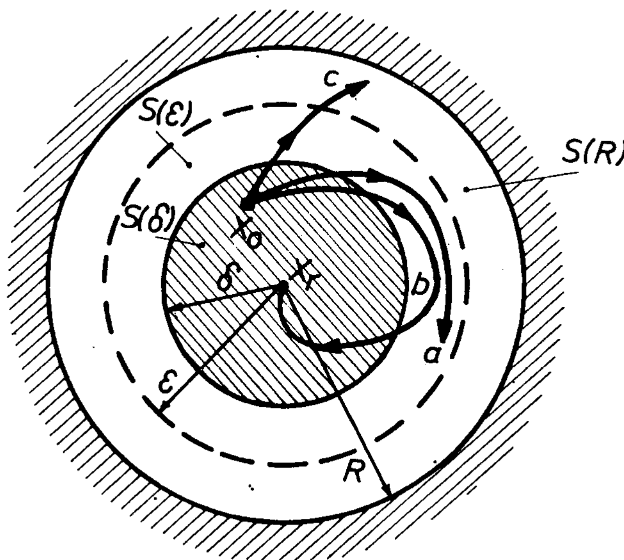
$$||\underline{x} - \underline{x}_r|| = ||w|| \leq R \tag{9.461}$$

Norma $||\underline{x} - \underline{x}_r|| = [(x_1 - x_{1r})^2 + (x_2 - x_{2r})^2 + \ldots + (x_n - x_{nr})^2]$ naziva se Euklidska norma. Za linearne sisteme uvjet (9.461) nije neophodan, jer se stabilnost promatra u čitavom prostoru stanja (tzv. stabilnost u cijelom ili globalna stabilnost).

Ako se unutar hipersfere $S\,(R)$ odrede dvije hipersfere $S\,(\delta)$ i $S\,(\varepsilon)$ tako da vrijedi:

$$\delta \leq \varepsilon < R \tag{9.462}$$

tada će sistem biti stabilan u smislu Ljapunova ako za svaki „radijus" ε postoji „radijus" δ takav da trajektorija, koja počinje sa $\underline{x}_0$ unutar ili na hipersferi $S\,(\delta)$, završi $(t \rightarrow \infty)$ unutar hipersfere $S\,(\varepsilon)$ (sl. 9.34).



Slika 9.34.

Takva matematička definicija stabilnosti, koja vrijedi za sve sisteme, može se učiniti pristupačnijom ako se hipersfera $S\,(\delta)$ promatra kao područje početnih uvjeta

sistema, a $S(\varepsilon)$ kao područje konačnih stanja sistema. Ovisno o veličini prostora u kojem se promatra stabilnost (hipersfera $S(R)$), stabilnost se može dijeliti na:

a) stabilnost u malom (δ malo)
b) stabilnost u velikom (δ veliko)
c) stabilnost u cijelom ($\delta \to \infty$).

Na taj način stabilnost sistema prilično je rastezljiv pojam. Čak se ne zahtijeva da konačno stanje sistema dođe u ravnotežno stanje nakon djelovanja malog poremećaja. Definicija zapravo sprečava da se odziv sistema raspiruje u neizmjernost ili u drugo ravnotežno stanje nakon poremećaja.

Obično je mnogo interesantniji slučaj kada se sistem vrati u ravnotežno stanje. Ravnotežno stanje bit će *asimptotski stabilno*, ako je stabilno u smislu Ljapunova, te ako je:

$$\lim_{t \to \infty} \underline{x}(t) = \underline{x}_r \qquad \text{za} \quad \|\underline{x}_0 - \underline{x}_r\| < \delta \tag{9.463}$$

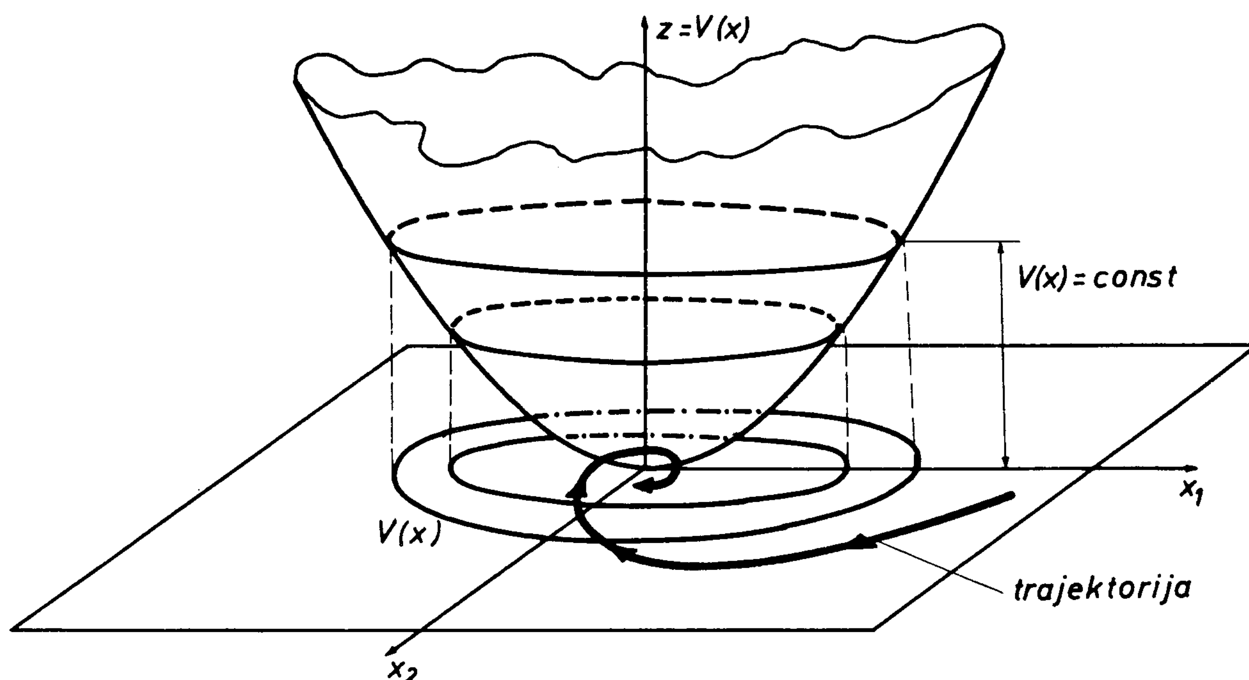
Asimptotska stabilnost dodatno je ograničenje stabilnosti u smislu Ljapunova, jer zahtijeva da stanje sistema, uzrokovano poremećajem unutar $S(\delta)$, dođe u stanje koje nije samo unutar $S(\varepsilon)$, već je i ravnotežno stanje sistema.

Linearni sistemi s karakterističnim vrijednostima u lijevoj poluravnini asimptotski su stabilni u cijelom.

Budući da je za sada interesantna takva stabilnost, bit će dalje govora o njoj.

Direktna metoda Ljapunova

Asimptotski stabilan sistem imat će rješenje homogene diferencijalne jednadžbe (9.454), koje će pri $t \to \infty$, težiti nuli, bez obzira na početno stanje $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ sistema. Pristup takvom problemu zahtijevao je da se vektoru stanja $\underline{x}(t)$, koji definira



Slika 9.35.

koordinatu točke u prostoru stanja, pridruži neka funkcija koja će matematički opisivati svojstvo da se kod asimptotski stabilnog sistema $\underline{x}(t)$ giba prema ishodištu. S energetskog stajališta gledano, to bi značilo: ako sistem ima asimptotski stabilno ravnotežno stanje, tada se energija spremljena u sistemu smanjuje s vremenom, dok konačno ne poprimi svoj minimum u ravnotežnom stanju. Prema tome, energetski tip funkcije nameće se kao rješenje problema. Ljapunov je definirao funkciju koja ima svojstva energije u sistemu – *funkcija Ljapunova* $V(\underline{x})$ pomoću koje je moguće odrediti stabilnost sistema. Ta funkcija (skalarna funkcija) ima oblik:

$$V(\underline{x}) = K \qquad (K \geq 0)$$

Funkcija $V(\underline{x})$ opisuje koncentrične hipersfere u prostoru stanja koje se smanjuju prema ishodištu, tj. za $K=0$ funkcija $V(\underline{x})=0$. Funkcija $V(\underline{x})$ općeg je karaktera i znatno je složenija od funkcije koja opisuje realno energetsko stanje sistema.

Teorem 1. Asimptotske stabilnosti Ljapunova:

Sistem je asimptotski stabilan u okolišu ravnotežnog stanja (ishodište) ako postoji skalarna kontinuirana funkcija $V(\underline{x})$, koja ima kontinuirane prve parcijalne derivacije u čitavom prostoru stanja i koja zadovoljava uvjete:

1. $V(\underline{x})$ je pozitivno određena,
2. $\dot{V}(\underline{x})$ je negativno određena.

Izloženi teorem osnovni je teorem druge metode Ljapunova. Funkcija $V(\underline{x})$ može se promatrati kao udaljenost od ishodišta u prostoru stanja, dok funkcija $\dot{V}(\underline{x})$ daje kvantitativnu ocjenu o brzini približavanja ishodištu.

Iz teorema 1. proizlazi: razmatrani sistem bit će *asimptotski stabilan u cijelom*, kad sve trajektorije stanja $\underline{x}(t)$ uz $t \to \infty$ teže koordinatnom početku u kojem je $\dot{V}(\underline{x})=0$.

Teorem 2. Asimptotske stabilnosti u cijelom:

Sistem je globalno asimptotski stabilan ako postoji kontinuirana skalarna funkcija $V(\underline{x})$, koja ima kontinuirane prve parcijalne derivacije u čitavom prostoru stanja i koja zadovoljava sljedeće uvjete:

1. $V(\underline{x})$ je pozitivno određena,
2. $\dot{V}(\underline{x})$ je negativno poluodređena.

Prema direktnoj metodi Ljapunova potrebno je odrediti skalarnu funkciju $V(\underline{x})$ s gore navedenim svojstvima. Za linearne sisteme nalaženje funkcije Ljapunova jednostavnije je nego za nelinearne sisteme, za koje ne postoji neka opća preporuka za funkciju $V(\underline{x})$. Za linearne sisteme funkcija Ljapunova pripada u klasu *pozitivno određenih kvadratičnih funkcija*. Glavna poteškoća u primjenjivosti ovog postupka nalazi se u činjenici ako funkcija nije nađena, to ne znači da ona i ne postoji za neki sistem. Po tome postupku trebalo bi uporno tražiti funkcije sa svojstvima funkcije Ljapunova, dok se konačno ne bi odredila prava, pa bi se tek tada moglo reći da je sistem stabilan. Naravno, ovo za inženjersku praksu nije prikladna metoda.

Za linearne sisteme metoda ipak nije toliko nepristupačna kao što se na prvi pogled čini. Ako je sistem opisan homogenom diferencijalnom jednadžbom (9.454), tada se moguća funkcija Ljapunova može odabrati u obliku:

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot \underline{L} \cdot \underline{x} = K \tag{9.464}$$

$\underline{x}^T \cdot \underline{L} \cdot \underline{x}$ pripada u klasu pozitivno određenih kvadratnih funkcija ako je $\underline{L}$ pozitivno

određena Hermitska matrica. Kada je $\underline{x}$ realan vektor, tada je $\underline{L}$ pozitivno određena realna *simetrična* matrica.

$$\frac{dV(\underline{x})}{dt} = \dot{V} = \frac{dK}{dt} = \frac{d\underline{x}^T}{dt} \cdot \underline{L} \cdot \underline{x} + \underline{x}^T \cdot \underline{L} \cdot \frac{d\underline{x}}{dt}$$

$$= \underline{x}^T \cdot \underline{A}^T \cdot \underline{L} \cdot \underline{x} + \underline{x}^T \cdot \underline{L} \cdot \underline{A} \cdot \underline{x} \tag{9.465}$$

$$= \underline{x}^T \cdot (\underline{A}^T \cdot \underline{L} + \underline{L} \cdot \underline{A}) \cdot \underline{x}$$

$V(\underline{x})$ pozitivno je određena ($\underline{x}^T \cdot \underline{L} \cdot \underline{x}$ pozitivno je određena kvadratna forma). Za asimptotsku stabilnost potrebno je da $\dot{V}(\underline{x})$ bude negativno određena, tj.:

$$\dot{V}(\underline{x}) = -\underline{x}^T \cdot \underline{H} \cdot \underline{x} \tag{9.466}$$

Iz (9.466) proizlazi da matrica:

$$-\underline{H} = \underline{A}^T \cdot \underline{L} + \underline{L} \cdot \underline{A} \tag{9.467}$$

treba biti pozitivno određena. Jednadžba (9.467) vodi na algebarsko izražavanje teorema Ljapunova, tj.: *ako je dana bilo koja simetrična pozitivno određena matrica* $\underline{H}$, *neophodan i dovoljan uvjet da sve karakteristične vrijednosti matrice* $\underline{A}$ *leže u lijevoj poluravnini jest da simetrično rješenje* $\underline{L}$, *jednadžbe* (9.467), *bude pozitivno određena matrica.*

Matrica $\underline{H}$ mora se odabrati tako da bude pozitivno određena. Najjednostavnije je odabrati $\underline{H}$ kao jediničnu matricu $\underline{H} = \underline{I}$ ili kao matricu:

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} 0 \ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots\ldots 1 \end{bmatrix} \tag{9.468}$$

Analiza stabilnosti sistema svodi se na analizu pozitivne određenosti simetrične matrice $\underline{L}$ iz (9.467), ako je prethodna matrica $\underline{H}$ odabrana tako da bude pozitivno određena.

Za testiranje pozitivne određenosti matrice koristi se *kriterij J. J. Sylvestera (1814 – 1897), koji postavlja da će matrica n × n-tog reda biti pozitivno određena ako su sve determinante glavnih minora matrice pozitivne.*

Primjer 9.30.

Potrebno je odrediti je li matrica $\underline{L}$ pozitivno određena:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Prema Sylvesterovu kriteriju potrebno je odrediti determinante glavnih minora:

$$L_1 = 3 > 0$$

$$L_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

$$L_3=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1>0$$

Budući da su sve determinante pozitivno određene, matrica $\underline{L}$ je pozitivno određena.

Primjer 9.31.

Za sistem opisan sa:

$$\dot{\underline{x}}=\begin{bmatrix} -3 & -7 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\cdot\underline{x}$$

potrebno je odrediti stabilnost.
Jednadžba (9.467) glasi:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -3 & -7 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad (9.469)$$

odnosno iz (9.469):

$$-3l_{11}=-\frac{1}{2}$$

$$-3l_{12}-7l_{11}-4l_{12}=0$$

$$-7l_{12}-4l_{22}=-\frac{1}{2}$$

$$l_{11}=\frac{1}{6}, \qquad l_{12}=-\frac{1}{6}, \qquad l_{22}=\frac{5}{12}$$

Matrica $\underline{L}$ glasi:

$$\underline{L}=\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/6 & -1/6 \\ -1/6 & 5/12 \end{bmatrix} \qquad (9.470)$$

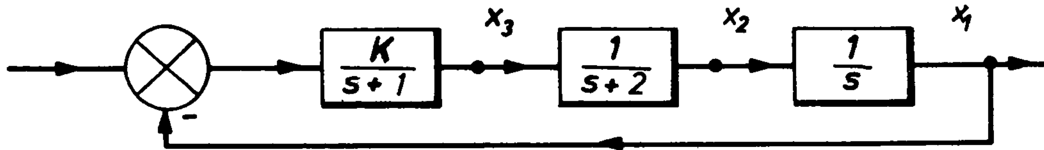
$$\left.\begin{aligned} L_1&=l_{11}=\frac{1}{6}>0 \\ L_2&=\begin{bmatrix} 1/6 & -1/6 \\ -1/6 & 5/12 \end{bmatrix}=7/72>0 \end{aligned}\right\} \qquad (9.471)$$

Budući da je matrica $\underline{H}=\underline{I}$ pozitivno određena prema Sylvesterovu kriteriju (9.471), matrica $\underline{L}$ također je pozitivno određena, a razmatrani sistem je stabilan.

Primjer 9.32.

Jednadžba stanja sistema na slici 9.36. glasi:

$$\dot{\underline{x}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} u$$



Slika 9.36.

Potrebno je odrediti unutar kojih vrijednosti treba biti K da bi sistem bio stabilan.

Ako se odabere realna simetrična matrica $\underline{H}$ u obliku (9.468), te uvrsti u (9.467) dobit će se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -K \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \underline{L} + \underline{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ K & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{9.472}$$

Matrica $\underline{L}$ će iz (9.472) biti:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \frac{K^2+12K}{12-2K} & \frac{6K}{12-2K} & 0 \\ \frac{6K}{12-2K} & \frac{3K}{12-2K} & \frac{K}{12-2K} \\ 0 & \frac{K}{12-2K} & \frac{6}{12-2K} \end{bmatrix} \tag{9.473}$$

Iz uvjeta da matrica $\underline{L}$ bude pozitivno određena, proizlaze uvjeti stabilnosti:

$$12-2K>0$$

$$K>0$$

odnosno:

$$0<K<6 \tag{9.474}$$

Matrica $\underline{L}$ mora biti simetrična ako se želi na nju primijeniti kriterij Sylvestera. U slučaju da matrica $\underline{L}$ nije simetrična, mora se određenim postupkom pretvoriti u simetričnu matricu. Taj postupak zahtijeva da se elementi l_{ij} i l_{ji} zamijene s $\frac{1}{2}(l_{ij}+l_{ij})$, prije nego se primijeni kriterij Sylvestera. Ako se to ne učini, dobit će se nepouzdani zaključci o stabilnosti sistema. L [30]

Analiza stabilnosti diskretnih sistema po direktnoj metodi Ljapunova

Analiza stabilnosti diskretnih sistema provodi se analogno analizi kontinuiranih sistema. Homogena jednadžba diferencija diskretnog sistema jest:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{P}\,\underline{x}(k) \tag{9.475}$$

Funkcija Ljapunova $V[\underline{x}(k)]$ bit će pozitivno određena ako zadovoljava uvjet (9.464).

$V[\underline{x}(k)]$ prikazuje se prvom diferencijom funkcije $V[\underline{x}(k)]$ i glasi:

$$\frac{\Delta V[\underline{x}(k)]}{\Delta t}=\frac{V[\underline{x}(k+1)]-V[\underline{x}(k)]}{T} \tag{9.476}$$

Budući da je za stabilnost sistema bitan samo predznak od $\frac{\Delta V[\underline{x}(k)]}{\Delta t}$ to se zbog jednostavnosti može uzeti $T=1$. Prema (9.464) proizlazi:

$$V[\underline{x}(k)]=\underline{x}^T(k)\cdot\underline{L}\cdot\underline{x}(k) \tag{9.477}$$

Funkcija $V[\underline{x}(k)]$ pozitivno je određena ako *simetrična* matrica $\underline{L}$ zadovoljava Sylvesterov kriterij. Jednadžba (9.465) za diskretni sistem glasi:

$$\begin{aligned}\Delta V[\underline{x}(k)]&=V[\underline{x}(k+1)]-V[\underline{x}(k)]\\ &=\underline{x}^T(k+1)\cdot\underline{L}\cdot\underline{x}(k+1)-\underline{x}^T(k)\cdot\underline{L}\cdot\underline{x}(k)\\ &=[\underline{P}\cdot\underline{x}(k)]^T\cdot\underline{L}\cdot[\underline{P}\cdot\underline{x}(k)]-\underline{x}^T(k)\cdot\underline{L}\cdot\underline{x}(k)\\ &=\underline{x}^T(k)\cdot\underline{P}^T\cdot\underline{L}\cdot\underline{P}\cdot\underline{x}(k)-\underline{x}^T(k)\cdot\underline{L}\cdot\underline{x}(k)\\ &=\underline{x}^T(k)[\underline{P}^T\cdot\underline{L}\cdot\underline{P}-\underline{L}]\cdot\underline{x}(k)\end{aligned} \tag{9.478}$$

Kako je $V[\underline{x}(k)]$ odabrana da bude pozitivno određena, potrebno je za asimptotsku stabilnost da funkcija $\Delta V[\underline{x}(k)]$ bude negativno određena, tj.:

$$\Delta V[\underline{x}(k)]=-\underline{x}^T(k)\cdot\underline{H}\cdot\underline{x}(k) \tag{9.479}$$

Iz (9.479) proizlazi da matrica $\underline{H}$ mora biti pozitivno određena.

$$-\underline{H}=\underline{P}^T\cdot\underline{L}\cdot\underline{P}-\underline{L} \tag{9.480}$$

Za analizu asimptotske stabilnosti diskretnog sistema potrebno je matricu $\underline{H}$ odabrati tako da bude pozitivno određena, te iz (9.480) odrediti matricu $\underline{L}$. Primjena Sylvesterova kriterija na matricu $\underline{L}$ daje odgovor je li sistem stabilan. Kao što se vidi, postupak je analogan postupku za kontinuirane sisteme, kod kojih je izraz (9.467) osnova za određivanje matrice $\underline{L}$.

Juryjev test stabilnosti

Često se koristi metoda za analizu diskretnih sistema L[21, 23, 24], a potječe od E. I. Juryja.

Karakteristična jednadžba zatvorenog diskretnog sistema opisana linearnom jednadžbom stanja glasi:

$$|z\underline{I}-\underline{P}|=0 \tag{9.481}$$

Razvojem u polinom (9.481) proizlazi:

$$N(z)=1+G_0(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0=0 \tag{9.482}$$

gdje je a_n pozitivan. Sistem će biti stabilan ako korijeni leže unutar jedinične kružnice. Juryjev test sastoji se od dva dijela: prvi za potrebne uvjete i drugi za dovoljne uvjete.

Prvi dio testa glasi:

$$N(1)>0$$
$$(-1)^n N(-1)>0 \qquad (9.483)$$

Za drugi dio testa potrebno je formirati matrice od koeficijenata karakterističnog polinoma u općem obliku:

$$\underline{X}=\begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} \cdots\cdots & a_2 \\ 0 & a_n \cdots\cdots\cdots & a_3 \\ 0 & 0 \quad a_n \cdots\cdots & a_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots\cdots & a_n \end{bmatrix} \qquad (9.484)$$

$$\underline{Y}=\begin{bmatrix} a_{n-2} & a_{n-3} \cdots\cdots & a_1 & a_0 \\ a_{n-3} & a_{n-4} & a_0 & 0 \\ a_{n-4} \cdots\cdots & a_0 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots \\ a_0 \cdots\cdots\cdots & & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (9.485)$$

Matrice $\underline{X}$ i $\underline{Y}$ su $(n-1)\times(n-1)$ reda za sistem n-tog reda. Pomoću matrica $\underline{X}$ i $\underline{Y}$ određuju se matrice:

$$\underline{R}_1=\underline{X}+\underline{Y}, \qquad \underline{R}_2=\underline{X}-\underline{Y} \qquad (9.486)$$

gdje matrice $\underline{R}_1$ i $\underline{R}_2$ moraju biti pozitivno inerne da bi sistem bio asimptotski stabilan. Za kvadratnu matricu $\underline{R}$ kaže se da je *pozitivno inerna* kada su sve njezine determinante, od centralnog elementa prema krajevima do čitave matrice, pozitivne. Sistem šestog reda, za koje su $\underline{R}_1$ i $\underline{R}_2$ matrice, 5×5 reda, ima npr. opći oblik matrice $\underline{R}$.

$$\underline{R}=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \end{bmatrix} \qquad (9.487)$$

Crtkano su u (9.487) označene determinante kojima se ocjenjuje je li matrica $\underline{R}$ pozitivno-inerna.

Primjer 9.33.

Ako je:

$$N(z)=a_5 z^5+a_4 z^4+a_3 z^3+a_2 z^2+a_1 z+a_0 \qquad (9.488)$$

$a_5>0$. Odredite stabilnost sistema:

Prvi test:

$$N(1)=a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0>0$$
$$(-1)^5\cdot N(-1)=a_5-a_4+a_3-a_2+a_1-a_0>0 \qquad (9.489)$$

Drugi test:

$$\underline{X}=\begin{bmatrix} a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 \end{bmatrix}; \quad \underline{Y}=\begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}_1=\begin{bmatrix} a_5+a_3 & a_4+a_2 & a_3+a_1 & a_2+a_0 \\ a_2 & a_5+a_1 & a_4+a_0 & a_3 \\ a_1 & a_0 & a_5 & a_4 \\ a_0 & 0 & 0 & a_5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}_2=\begin{bmatrix} a_5-a_3 & a_4-a_2 & a_3-a_1 & a_2-a_0 \\ -a_2 & a_5-a_1 & a_4-a_0 & a_3 \\ -a_1 & -a_0 & a_5 & a_4 \\ -a_5 & 0 & 0 & a_5 \end{bmatrix}$$

$\underline{R}_1$ i $\underline{R}_2$ su pozitivno inerne kada je:

$$\begin{vmatrix} a_5+a_1 & a_4+a_0 \\ a_0 & a_5 \end{vmatrix}>0$$
$$|\underline{R}_1|>0 \qquad (9.490)$$
$$\begin{vmatrix} a_5-a_1 & a_4-a_0 \\ -a_0 & a_5 \end{vmatrix}>0$$
$$|\underline{R}_2|>0.$$

Nejednadžbe (9.489) i (9.490) predstavljaju potpune uvjete za stabilnost diskretnog sistema opisanog karakterističnim polinomom (9.488).

PRILOG I

TABLICA LAPLACEOVE TRANSFORMACIJE

Osnovna svojstva (teoremi) L-transformacije
(a, b, c, n-konstante)

Tablica 1.a

Naziv	Original	L-transformacija
svojstvo linearnosti	$c\,f(t)$ $f_1(t)+f_2(t)$	$c\,F(s)$ $F_1(s)+F_2(s)$
diferenciranje originala	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s)-s^{n-1}f(0)-$ $-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$
integriranje originala	$\int f(t)\,dt$	$\frac{1}{s}F(s)$
teorem sličnosti	$f(at); \quad a>0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
teorem kašnjenja	$f(t-b); \quad b>0$	$e^{-bs}F(s)$
teorem pomaka	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
diferenciranje slike	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
integriranje slike	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} F(\xi)\,d\xi$

Tablica 1.a

Naziv	Original	L-transformacija
teorem o konvoluciji (produktu slika)	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
teorem o konačnoj vrijednosti	$f(\infty)$	$\lim_{s \to 0} sF(s)$
teorem o početnoj vrijednosti	$f(0)$	$\lim_{s \to 0} sF(s)$

TABLICA LAPLACEOVE TRANSFORMACIJE

L-transformacije nekih funkcija
(a, ω, α, n-konstante)

Tablica 1.b

Original ($t \geq 0$)	L-transformacija
$S(t)$	$\frac{1}{s}$
$\delta(t)$	1
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^2 e^{-at}$	$\frac{2}{(s+a)^3}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Original $(t \geq 0)$	L-transformacija
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$te^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{2\omega(s+\alpha)}{[(s+\alpha)^2+\omega^2]^2}$
$te^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{(s+\alpha)^2-\omega^2}{[(s+\alpha)^2+\omega^2]^2}$
$sh\, \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$
$ch\, \alpha t$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$
$\frac{\sin t}{t}$	$\frac{\pi}{2}-\text{arctg}\,\frac{s}{\omega}$
$si\,(t)$	$\frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2}-\text{arctg}\, s\right)$

TABLICA LAPLACEOVE TRANSFORMACIJE

Inverzna L-transformacija razlomljenih racionalnih funkcija
(T, τ, ξ – pozitivne konstante)

Tablica 1.c

Broj	Transformacija	Original ($t \geq 0$)
1	$\frac{1}{(Ts+1)^n}$	$\frac{1}{T^n(n-1)!} t^{n-1} e^{-t/T}$
2	$\frac{1}{Ts+1}$	$\alpha e^{-\alpha t}$; gdje je $\alpha = \frac{1}{T}$
3	$\frac{1}{s(Ts+1)}$	$1 - e^{-\alpha t}$; gdje je $\alpha = \frac{1}{\mathrm{T}}$
4	$\frac{\tau s+1}{s(Ts+1)}$	$1 + Ce^{-\alpha t}$; gdje je $\alpha = \frac{1}{\mathrm{T}}$; $C = \frac{\tau - T}{T}$
5	$\frac{1}{s^2(Ts+1)}$	$T(e^{-\alpha t} - 1) + t$; gdje je $\alpha = \frac{1}{T}$
6	$\frac{\tau s+1}{s^2(Ts+1)}$	$C(1 - e^{-\alpha t}) + t$; gdje je $\alpha = \frac{1}{T}$; $C = \tau - T$
7	$\frac{\tau_2^2 s^2 + \tau_1 s + 1}{s^2(Ts+1)}$	$C_1 + C_2 e^{-\alpha t} + t$ gdje je $\alpha = \frac{1}{T}$; $C_1 = \tau_1 - T$; $C_2 = \frac{\tau_2^2 - \tau_1 T + T^2}{T}$

Tablica 1.c

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
8	$\frac{1}{(Ts+1)^2}$	$\alpha^2 te^{-\alpha t}$; gdje je $\alpha = \frac{1}{T}$
9	$\frac{1}{s(Ts+1)^2}$	$1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}$; gdje je $\alpha = \frac{1}{T}$
10	$\frac{1}{s^2(Ts+1)^2}$	$2T(e^{-\alpha t}-1)+t(1+e^{-\alpha t})$; gdje je $\alpha = \frac{1}{T}$
11	$\frac{1}{s^3(Ts+1)^2}$	$3T^2(1-e^{-\alpha t})-Tt(2+e^{-\alpha t})+\frac{t^2}{2}$; gdje je $\alpha = \frac{1}{T}$
12	$\frac{s}{(Ts+1)^2}$	$\alpha^2(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$; gdje je $\alpha = \frac{1}{T}$
13	$\frac{\tau s+1}{(Ts+1)^2}$	$(C_1+C_2 t)e^{-\alpha t}$; gdje je $C_1 = \frac{\tau}{T^2}$; $C_2 = \frac{T-\tau}{T^3}$ $\alpha = \frac{1}{T}$
14	$\frac{\tau s+1}{s(Ts+1)^2}$	$1-(1+Ct)e^{-\alpha t}$; gdje je $C = \frac{T-\tau}{T^2}$; $\alpha = \frac{1}{T}$
15	$\frac{\tau_2^2 s^2+\tau_1 s+1}{s(Ts+1)^2}$	$1+(C_1-C_2 t)e^{-\alpha t}$; gdje je $C_1 = \frac{\tau_2^2-T^2}{T^2}$; $C_2 = \frac{\tau_2^2-\tau_1 T+T^2}{T^3}$; $\alpha = \frac{1}{T}$

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
16	$\frac{1}{(Ts+1)^3}$	$\frac{\alpha^3 t^2}{2} e^{-\alpha t}$; gdje je $\alpha = \frac{1}{T}$
17	$\frac{1}{s(Ts+1)^3}$	$1 - \left(1 + \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2}\right) e^{-\alpha t}$; gdje je $\alpha = \frac{1}{T}$
18	$\frac{1}{s^2(Ts+1)^3}$	$-C + t + \left(C + 2t + \frac{at^2}{2}\right) e^{-\alpha t}$; gdje je $\alpha = \frac{1}{T}$; $C = 3T$
19	$\frac{s}{(Ts+1)^3}$	$\alpha^3 t \left(1 - \frac{\alpha t}{2}\right) e^{-\alpha t}$; gdje je $\alpha = \frac{1}{T}$
20	$\frac{s^2}{(Ts+1)^3}$	$\alpha^3 \left(1 - 2\alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2}\right) e^{-\alpha t}$; gdje je $\alpha = \frac{1}{T}$
21	$\frac{1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$	$C(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t})$; gdje je $\alpha_1 = \frac{1}{T_1}$; $\alpha_2 = \frac{1}{T_2}$; $C = \frac{1}{T_1 - T_2}$
22	$\frac{s}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}$; gdje je $\alpha_1 = \frac{1}{T_1}$; $\alpha_2 = \frac{1}{T_2}$; $C_1 = \frac{1}{T_1(T_2 - T_1)}$; $C_2 = \frac{1}{T_2(T_1 - T_2)}$

Tablica 1.c

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
23	$\dfrac{\tau s+1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t} - C\,e^{-\alpha_2 t}$; gdje je $\alpha_1 = \dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2 = \dfrac{1}{T_2}$; $C_1 = \dfrac{T_1 - \tau}{T_1 (T_1 - T_2)}$; $C_2 = \dfrac{\tau - T_2}{T_2 (T_1 - T_2)}$
24	$\dfrac{1}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$	$1 + C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}$; gdje je $\alpha_1 = \dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2 = \dfrac{1}{T_2}$; $C_1 = \dfrac{T_1}{T_2 - T_1}$; $C_2 = \dfrac{T_2}{T_1 - T_2}$
25	$\dfrac{\tau s+1}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$	$1 + C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}$; gdje je $\alpha_1 = \dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2 = \dfrac{1}{T_2}$; $C_1 = \dfrac{\tau - T_1}{T_1 - T_2}$; $C_2 = \dfrac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2}$
26	$\dfrac{\tau_2^2 s^2 + \tau_1 s + 1}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$	$1 + C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}$; gdje je $\alpha_1 = \dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2 = \dfrac{1}{T_2}$; $C_1 = \dfrac{\tau_2^2 - \tau_1 T_1 + T_1^2}{T_1 (T_2 - T_1)}$; $C_2 = \dfrac{\tau_2^2 - \tau_1 T_2 + T_2^2}{T_2 (T_1 - T_2)}$
27	$\dfrac{1}{s^2 (T_1 s+1)(T_2 s+1)}$	$C + C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t} + t$; gdje je $\alpha_1 = \dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2 = \dfrac{1}{T_2}$; $C = -(T_1 + T_2)$; $C_1 = \dfrac{T_1^2}{T_1 - T_2}$; $C_2 = \dfrac{T_2^2}{T_2 - T_1}$

Tablica 1.c

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
28	$\dfrac{1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)^2}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_3 t)e^{-\alpha_2 t}$; gdje je $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{T_1}{(T_1-T_2)^2}$; $C_2=-C_1$; $C_3=\dfrac{1}{(T_2-T_1)T_2}$
29	$\dfrac{\tau s+1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)^2}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_3 t)e^{-\alpha_2 t}$; gdje je $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{T_1-\tau}{(T_1-T_2)^2}$; $C_2=-C_1$; $C_3=\dfrac{\tau-T_2}{(T_1-T_2)T_2^2}$
30	$\dfrac{\tau_2^2 s^2+\tau_1 s+1}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)^2}$	$1+C_1 e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_3 t)e^{-\alpha_2 t}$; gdje je $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{-\tau_2^2+(\tau_1-T_1)T_1}{(T_1-T_2)^2}$; $C_2=\dfrac{\tau_2^2-\tau_1 T_1+(2T_1-T_2)T_2}{(T_1-T_2)^2}$; $C_3=\dfrac{\tau_2^2+(T_2-\tau_1)T_2}{(T_1-T_2)T_2^2}$
31	$\dfrac{1}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)^2}$	$1+C_1 e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_3 t)e^{-\alpha_2 t}$; gdje je $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{T_1^2}{(T_1-T_2)^2}$; $C_2=\dfrac{(2T_1-T_2)T_2}{(T_1-T_2)^2}$; $C_3=\dfrac{1}{T_1-T_2}$

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
32	$\frac{s}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)^2}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_3 t)e^{-\alpha_2 t}$; gdje je $\alpha_1=\frac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\frac{1}{T_2}$; $C_1=-\frac{1}{(T_1-T_2)^2}$; $C_2=-C_1$; $C_3=\frac{1}{(T_1-T_2)T_2^2}$
33	$\frac{s^2}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)^2}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_3 t)e^{-\alpha_2 t}$; gdje je $\alpha_1=1/T_1$; $\alpha_2=1/T_2$; $C_1=\frac{1}{(T_1-T_2)^2 T_1}$; $C_2=\frac{T_1-2T_2}{(T_1-T_2)^2 T_2^2}$; $C_3=\frac{1}{(T_2-T_1)T_2^3}$
34	$\frac{1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)^3}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_3 t+C_4 t^2)e^{-\alpha_2 t}$; gdje je $\alpha_1=1/T_1$; $\alpha_2=1/T_2$; $C_1=\frac{T_1^2}{(T_1-T_2)^3}$; $C_2=-C_1$; $C_3=\frac{-T_1}{(T_1-T_2)^2 T_2}$; $C_4=\frac{-1}{2(T_1-T_2)T_2^2}$
35	$\frac{\tau s+1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)^3}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_3 t+C_4 t^2)e^{-\alpha_2 t}$; gdje je $\alpha_1=1/T_1$; $\alpha_2=1/T_2$; $C_1=\frac{(T_1-\tau)T_1}{(T_1-T_2)^3}$; $C_2=-C_1$; $C_3=\frac{\tau-T_1}{(T_1-T_2)^2 T_2}$; $C_4=\frac{\tau-T_2}{2(T_1-T_2)T_2^3}$

Tablica 1.c

Broj	Transformacija	Original ($t \geq 0$)
36	$\dfrac{1}{s\,(T_1 s+1)\,(T_2 s+1)^3}$	$1+C_1 e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_3 t+C_4 t^2)\,e^{-\alpha_2 t}$; gdje je $\alpha_1=1/T_1$; $\alpha_2=1/T_2$; $C_1=-\dfrac{T_1^3}{(T_1-T_2)^3}$; $C_2=\dfrac{T_1^3-(T_1-T_2)^3}{(T_1-T_2)^3}$; $C_3=\dfrac{2T_1-T_2}{(T_1-T_2)^2}$; $C_4=\dfrac{1}{2\,(T_1-T_2)\,T_2}$
37	$\dfrac{s}{(T_1 s+1)\,(T_2 s+1)^3}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_3 t+C_4 t^2)\,e^{-\alpha_2 t}$; gdje je $\alpha_1=1/T_1$; $\alpha_2=1/T_2$; $C_1=-\dfrac{T_1}{(T_1-T_2)^3}$; $C_2=-C_1$; $C_3=\dfrac{1}{(T_1-T_2)^2\,T_2}$; $C_4=\dfrac{1}{2\,(\mathrm{T}_1-\mathrm{T}_2)\,\mathrm{T}_2^3}$
38	$\dfrac{s^2}{(T_1 s+1)\,(T_2 s+1)^3}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_3 t+C_4 t^2)\,e^{-\alpha_2 t}$; gdje je $\alpha_1=1/T_1$; $\alpha_2=1/T_2$; $C_1=\dfrac{1}{(T_1-T_2)^3}$; $C_2=-C_1$; $C_3=\dfrac{T_1-2T_2}{(T_1-T_2)^2\,T_2^3}$; $C_4=-\dfrac{1}{2\,(T_1-T_2)\,T_2^4}$
39	$\dfrac{1}{s\,(T_1 s+1)^2\,(T_2 s+1)^2}$	$1+(C_1+C_3 t)\,e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_4 t)\,e^{-\alpha_2 t}$; gdje je $\alpha_1=1/T_1$; $\alpha_2=1/T_2$; $C_1=\dfrac{(3T_2-T_1)\,T_1^2}{(T_1-T_2)^3}$; $C_2=\dfrac{(T_2-3T_1)\,T_2^2}{(T_1-T_2)^3}$; $C_3=-\dfrac{T_1}{(T_1-T_2)^2}$; $C_4=-\dfrac{T_2}{(T_1-T_2)^2}$

Tablica 1.c

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
40	$\dfrac{1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+C_2 e^{-\alpha_2 t}+C_3 e^{-\alpha_3 t};$ gdje je $\alpha_1=1/\mathrm{T}_1; \quad \alpha_2=1/\mathrm{T}_2;$ $\alpha_3=1/T_3;$ $C_1=\dfrac{T_1}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)};$ $C_2=\dfrac{T_2}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)};$ $C_3=\dfrac{T_3}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}$
41	$\dfrac{\tau s+1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+C_2 e^{-\alpha_2 t}+C_3 e^{-\alpha_3 t};$ gdje je $\alpha_1=1/T_1; \quad \alpha_2=1/T_2;$ $\alpha_3=1/T_3;$ $C_1=\dfrac{T_1-\tau}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)};$ $C_2=\dfrac{T_2-\tau}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)};$ $C_3=\dfrac{T_3-\tau}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)};$
42	$\dfrac{\tau_2^2 s^2+\tau_1 s+1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+C_2 e^{-\alpha_2 t}+C_3 e^{-\alpha_3 t};$ gdje je $\alpha_1=1/\mathrm{T}_1; \quad \alpha_2=1/\mathrm{T}_2;$ $\alpha_3=1/T_3;$ $C_1=\dfrac{\tau_2^2-\tau_1 T_1-T_1^2}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)\,T_1};$ $C_2=\dfrac{\tau_2^2-\tau_1 T_2-T_2^2}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)\,T_2};$ $C_3=\dfrac{\tau_2^2-\tau_1 T_3-T_3^2}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)\,T_3}$

Tablica 1.c

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
43	$\frac{1}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$	$1+C_1 e^{-\alpha_1 t}+C_2 e^{-\alpha_2 t}+C_3 e^{-\alpha_3 t}$; gdje je $\alpha_1 = 1/T_1$; $\alpha_2 = 1/T_2$; $\alpha_3 = 1/T_3$; $C_1 = \frac{T_1^2}{(T_2-T_1)(T_1-T_3)}$; $C_2 = \frac{T_2^2}{(T_1-T_2)(T_2-T_3)}$; $C_3 = \frac{T_3^2}{(T_1-T_3)(T_3-T_2)}$;
44	$\frac{\tau s+1}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$	$1+C_1 e^{-\alpha_1 t}+C_2 e^{-\alpha_2 t}+C_3 e^{-\alpha_3 t}$; gdje je $\alpha_1 = 1/T_1$; $\alpha_2 = 1/T_2$; $\alpha_3 = 1/T_3$; $C_1 = \frac{(\tau-T_1)T_1}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)}$; $C_2 = \frac{(\tau-T_2)T_2}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)}$; $C_3 = \frac{(\tau-T_3)T_3}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}$;
45	$\frac{s}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+C_2 e^{-\alpha_2 t}+C_3 e^{-\alpha_3 t}$; gdje je $\alpha_1 = 1/T_1$; $\alpha_2 = 1/T_2$; $\alpha_3 = 1/T_3$; $C_1 = \frac{1}{(T_2-T_1)(T_1-T_3)}$; $C_2 = \frac{1}{(T_1-T_2)(T_2-T_3)}$; $C_3 = \frac{1}{(T_1-T_3)(T_3-T_2)}$;

Broj	Tranformacija	Original $(t \geq 0)$
46	$$\frac{s^2}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+C_2 e^{-\alpha_2 t}+C_3 e^{-\alpha_3 t}$; gdje je $\alpha_1=1/T_1$; $\alpha_2=1/T_2$; $\alpha_3=1/T_3$; $C_1=\frac{1}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)T_1}$; $C_2=\frac{1}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)T_2}$; $C_3=\frac{1}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)T_3}$;
47	$$\frac{1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)^2}$$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+C_2 e^{-\alpha_2 t}+(C_3+C_4 t)e^{-\alpha_3 t}$; gdje je $\alpha_1=1/T_1$; $\alpha_2=1/T_2$; $\alpha_3=1/T_3$; $C_1=\frac{T_1^2}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)^2}$; $C_2=-\frac{T_2^2}{(T_1-T_2)(T_2-T_3)^2}$; $C_3=\frac{T_3(2T_1T_2-T_1T_3-T_2T_3)}{(T_1-T_3)^2(T_2-T_3)^2}$; $C_4=\frac{1}{(T_1-T_3)(T_2-T_3)}$;
48	$$\frac{\tau s+1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)^2}$$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+C_2 e^{-\alpha_2 t}+(C_3+C_4 t)e^{-\alpha_3 t}$; gdje je $\alpha_1=1/T_1$; $\alpha_2=1/T_2$; $\alpha_3=1/T_3$; $C_1=\frac{T_1(T_1-\tau)}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)^2}$; $C_2=\frac{T_2(\tau-T_2)}{(T_1-T_2)(T_2-T_3)^2}$; $C_3=\frac{\tau(T_3^2-T_1T_2)+T_3[2T_1T_2-(T_1+T_2)T_3]}{(T_1-T_3)^2(T_2-T_3)^2}$; $C_4=\frac{T_3-\tau}{T_3(T_1-T_3)(T_2-T_3)}$

Tablica 1.c

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
49	$\frac{1}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)^2}$	$1+C_1 e^{-\alpha_1 t}+C_2 e^{-\alpha_2 t}+(C_3+C_4 t)\, e^{-\alpha_3 t}$; gdje je $\alpha_1=1/T_1$; $\alpha_2=1/T_2$; $\alpha_3=1/T_3$; $C_1=-\frac{T_1^3}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)^2}$; $C_2=\frac{T_2^3}{(T_1-T_2)(T_2-T_3)^2}$; $C_3=\frac{T_3^2(-3T_1T_2+2T_1T_3+2T_2T_3-T_3^2)}{(T_1-T_3)^2(T_2-T_3)^2}$; $C_4=\frac{\tau-T_3}{(T_1-T_3)(T_2-T_3)}$
50	$\frac{s}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)^2}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+C_2 e^{-\alpha_2 t}+(C_3+C_4 t)\, e^{-\alpha_3 t}$; gdje je $\alpha_1=1/T_1$; $\alpha_2=1/T_2$; $\alpha_3=1/T_3$; $C_1=-\frac{T_1}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)^2}$; $C_2=\frac{T_2}{(T_1-T_2)(T_2-T_3)^2}$; $C_3=\frac{-T_1T_2+T_3^2}{(T_1-T_3)^2(T_2-T_3)^2}$; $C_4=-\frac{1}{T_3(T_1-T_3)(T_2-T_3)}$
51	$\frac{1}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdot(T_2 s+1)\cdot(T_4 s+1)}$	$1+C_1 e^{-\alpha_1 t}+C_2 e^{-\alpha_2 t}+C_3 e^{-\alpha_3 t}+C_4 e^{-\alpha_4 t}$; gdje je $\alpha_1=1/T_1$; $\alpha_2=1/T_2$; $\alpha_3=1/T_3$; $\alpha_4=1/T_4$; $C_1=-\frac{T_1^3}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)(T_1-T_4)}$; $C_2=-\frac{T_2^3}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)(T_2-T_4)}$; $C_3=-\frac{T_3^3}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)(T_3-T_4)}$; $C_4=-\frac{T_4^3}{(T_4-T_1)(T_4-T_2)(T_4-T_3)}$

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
52	$\dfrac{\tau s+1}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdot(T_3 s+1)(T_4 s+1)}$	$1+C_1 e^{-\alpha_1 t}+C_2 e^{-\alpha_2 t}+C_3 e^{-\alpha_3 t}+C_4 e^{-\alpha_4 t};$ gdje je $\alpha_1=1/T_1; \quad \alpha_2=1/T_2;$ $\alpha_3=1/T_3; \quad \alpha_4=1/T_4;$ $C_1=\dfrac{T_2^2(\tau-T_1)}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)(T_1-T_4)};$ $C_2=\dfrac{T_2^2(\tau-T_2}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)(T_2-T_4)};$ $C_3=\dfrac{T_3^2(\tau-T_3)}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)(T_3-T_4)};$ $C_4=\dfrac{T_4^2(\tau-T_4)}{(T_4-T_1)(T_4-T_2)(T_4-T_3)}$
53	$\dfrac{1}{T^2 s^2+2\xi T s+1},$ gdje je $0<\xi<1$	$Ce^{-\gamma t}\sin\lambda t;$ gdje je $\gamma=\dfrac{\xi}{T}; \quad \lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T};$ $C=\dfrac{1}{\lambda T^2}$
54	$\dfrac{\tau s+1}{T^2 s^2+2\xi T s+1},$ gdje je $0<\xi<1$	$Ce^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta);$ gdje je $\gamma=\dfrac{\xi}{T} \quad \lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T};$ $C=\dfrac{\sqrt{(1-2\gamma\tau)T^2+\tau^2}}{\lambda T^3};$ $\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{\tau\lambda}{1-\gamma\tau}$
55	$\dfrac{1}{s(T^2 s^2+2\xi T s+1)},$ gdje je $0<\xi<1$	$1+Ce^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta);$ gdje je $\gamma=\dfrac{\xi}{T}; \quad \lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T};$ $C=-\dfrac{1}{\lambda T}; \quad \theta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\lambda}{\gamma}$

Tablica 1.c

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
56	$\dfrac{\tau s+1}{s(T^2 s^2+2\xi Ts+1)}$, gdje je $0<\xi<1$	$1+Ce^{-\gamma t}\sin(\lambda t-\theta)$; gdje je $\gamma=\dfrac{\xi}{T}$; $\lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C=\dfrac{\sqrt{\tau^2+(1-2\gamma\tau)T^2}}{\lambda T^2}$; $\theta=\text{arc tg}\,\dfrac{\lambda T^2}{\tau-\gamma T^2}$
57	$\dfrac{1}{s^2(T^2 s^2+2\xi Ts+1)}$, gdje je $0<\xi<1$	$C+C_1 e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta)+t$; gdje je $\gamma=\dfrac{\xi}{T}$; $\lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $\theta=\text{arctg}\,\dfrac{2\gamma\lambda}{\gamma^2-\lambda^2}$
58	$\dfrac{s}{T^2 s^2+2\xi Ts+1}$, gdje je $0<\xi<1$	$Ce^{-\gamma t}\sin(\lambda t-\theta)$; gdje je $\gamma=\dfrac{\xi}{T}$; $\lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C=-\dfrac{1}{\lambda T^3}$; $\theta=\text{arctg}\,\dfrac{\lambda}{\gamma}$
59	$\dfrac{\tau^2 s^2+1}{s(T^2 s^2+2\xi Ts+1)}$, gdje je $0<\xi<1$	$1+Ce^{-\gamma t}\sin(\lambda t-\theta)$; gdje je $\gamma=\dfrac{\xi}{T}$; $\lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C=-\dfrac{\sqrt{\gamma^2(\tau^2+T^2)^2+\lambda^2(\tau^2-T^2)^2}}{\lambda T^2}$; $\theta=\text{arctg}\,\dfrac{\lambda(\tau^2-T^2)}{\gamma(\tau^2+T^2)}$
60	$\dfrac{1}{(T_1^2 s^2+2\xi T_1 s+1)(T_2 s+1)}$ gdje je $0<\xi<1$	$C_1 e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta)+C_2 e^{-\alpha t}$; gdje je $\gamma=\dfrac{\xi}{T_1}$; $\lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$;

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
		$\alpha=\frac{1}{T_2};$ $C_1=\frac{1}{\lambda T_1\sqrt{T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2}};$ $C_2=\frac{T_2}{T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2};$ $\theta=\operatorname{arctg}\frac{\lambda T_2}{1-\gamma T_2}$
61	$\frac{\tau s+1}{(T_1^2 s+2\xi T_1 s+1)\cdot(T_2 s+1)},$ gdje je $0<\xi<1$	$C_1 e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta)+C_2 e^{-\alpha t};$ gdje je $\gamma=\frac{\xi}{T_1};\quad \lambda=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1};$ $\alpha=\frac{1}{T_2};$ $C_1=\frac{1}{\lambda T_1^2}\sqrt{\frac{\tau^2+T_1^2(1-2\gamma\tau)}{T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2}}$ $C_2=\frac{T_2-\tau}{T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2};$ $\theta=-\operatorname{arctg}\frac{\lambda T_2}{1-\gamma T_2}+\operatorname{arctg}\frac{\lambda\tau}{1-\gamma\tau}$
62	$\frac{1}{s(T_1^2 s^2+2\xi T_1 s+1)(T_2 s+1)},$ gdje je $0<\xi<1$	$1+C_1 e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta)+C_2 e^{-\alpha t};$ gdje je $\gamma=\frac{\xi}{T_1};\quad \lambda=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1};$ $\alpha=\frac{1}{T_2}$ $C_1=-\frac{1}{\lambda\sqrt{T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2}};$ $C_2=-\frac{T_2^2}{T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2;}$ $\theta=-\operatorname{arctg}\frac{\lambda T_2}{1-\gamma T^2}+\operatorname{arctg}\frac{\lambda}{\gamma}$

Tablica 1.c

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
63	$\frac{\tau s+1}{s(T_1^2 s^2+2T_1\xi s+1)(T_2 s+1)}$, gdje je $0<\xi<1$	$1+C_1 e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta)+C_2 e^{-\alpha t}$; gdje je $\gamma=\frac{\xi}{T_1}$; $\lambda=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha=\frac{1}{T_2}$; $C_1=-\frac{1}{\lambda T_1}\sqrt{\frac{T_1^2(1-2\gamma\tau)+\tau^2}{T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2}}$; $C_2=\frac{T_2(\tau-T_2)}{T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2}$; $\theta=-\operatorname{arctg}\frac{\lambda T_2}{1-\gamma T_2}+\operatorname{arctg}\frac{\lambda T_1^2}{\gamma T_1^2-\tau}$
64	$\frac{s}{(T_1^2 s^2+2\xi T_1 s+1)(T_2 s+1)}$, gdje je $0<\xi<1$	$C_1 e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta)+C_2 e^{-\alpha t}$; gdje je $\gamma=\frac{\xi}{T_1}$; $\lambda=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha=\frac{1}{T_2}$; $C_1=-\frac{1}{\lambda T_1^2\sqrt{T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2}}$; $C_2=-\frac{1}{T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2}$; $\theta=-\operatorname{arctg}\frac{\lambda T_2}{1-\gamma T_2}-\operatorname{arctg}\frac{\lambda}{\gamma}$
65	$\frac{s^2}{(T_1^2 s^2+2\xi T_1 s+1)(T_2 s+1)}$, gdje je $0<\xi<1$	$C_1 e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta)+C_2 e^{-\alpha t}$; gdje je $\gamma=\frac{\xi}{T_1}$; $\lambda=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha=\frac{1}{T_2}$; $C_1=\frac{1}{\lambda T_1^3\sqrt{T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2}}$; $C_2=\frac{1}{T_2[T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2]}$; $\theta=-\operatorname{arctg}\frac{\lambda T_2}{1-\gamma T_2}-2\operatorname{arctg}\frac{\lambda}{\gamma}$

Tablica 1.c

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
66	$\frac{1}{(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1)(T_2 s + 1)^2}$, gdje je $0 < \xi < 1$	$C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t - \theta) + (C_2 + C_3 t) e^{-\alpha t}$; gdje je $\gamma = \frac{\xi}{T_1}$; $\lambda = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha = \frac{1}{T_2}$; $C_1 = \frac{1}{\lambda R}$; $\theta = 2 \operatorname{arctg} \frac{\lambda T_2}{1 - \gamma T_2}$; $C_2 = \frac{1}{R^2}[2T_1^2 T_2 (1 - \gamma T_2)]$; $C_3 = \frac{1}{R}$; $R = T_1^2 (1 - 2\gamma T_2) + T_2^2$
67	$\frac{1}{s(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1)(T_2 s + 1)^2}$, gdje je $0 < \xi < 1$	$1 + C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t - \theta) + (C_2 + C_3 t) e^{-\alpha t}$; gdje je $\gamma = \frac{\xi}{T_1}$; $\lambda = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha = \frac{1}{T_2}$; $C_1 = -\frac{T_1}{\lambda R}$; $C_2 = \frac{T_2^2 (4\gamma T_1^2 T_2 - 3T_1^2 - T_2^2)}{R^2}$; $C_3 = -\frac{T_2}{R}$; $\theta = 2 \operatorname{arctg} \frac{\lambda T_2}{1 - \lambda T_2} - \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\gamma}$; $R = T_1^2 (1 - 2\gamma T_2) + T_2^2$
68	$\frac{s}{(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1)(T_2 s + 1)^2}$, gdje je $0 < \xi < 1$	$C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t - \theta) + (C_2 + C_3 t) e^{-\alpha t}$; gdje je $\gamma = \frac{\xi}{T_1}$; $\lambda = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha = \frac{1}{T_2}$; $C_1 = -\frac{1}{\lambda T_1 R}$; $C_2 = \frac{T_2^2 - T_1^2}{R^2}$; $C_3 = -\frac{1}{T_2 R}$; $R = T_1^2 (1 - 2\gamma T_2) + T_2^2$; $\theta = 2 \operatorname{arctg} \frac{\lambda T_2}{1 - \gamma T_2} + \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\gamma}$

Tablica 1.c

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
69	$\dfrac{s^2}{(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1)(T_2 s + 1)^2}$, gdje je $0 < \xi < 1$	$C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t - \theta) + (C_2 + C_3 t) e^{-\alpha t}$; gdje je $\gamma = \dfrac{\xi}{T_1}$; $\lambda = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha = \dfrac{1}{T_2}$; $C_1 = \dfrac{1}{\lambda T_1^2 R}$; $C_2 = \dfrac{2(\gamma T_1^2 - T_2)}{R^2}$; $C_3 = \dfrac{1}{T_2^2 R}$; $R = T_1^2(1 - 2\gamma T_2) + T_2^2$; $\theta = 2 \operatorname{arctg} \dfrac{\gamma T_2}{1 - \gamma T_2} + 2 \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda}{\gamma}$
70	$\dfrac{1}{(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1) \cdot (T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$, gdje je $0 < \xi < 1$	$C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \theta) + C_2 e^{-\alpha_2 t} + C_3 e^{-\alpha_3 t}$; gdje je $\gamma = \dfrac{\xi}{T_1}$; $\lambda = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha_2 = \dfrac{1}{T_2}$; $\alpha_3 = \dfrac{1}{T_3}$; $C_1 = -\dfrac{1}{\lambda \sqrt{R_2 R_3}}$; $C_2 = \dfrac{T_2^2}{(T_2 - T_3) R_2}$; $C_3 = \dfrac{T_3^2}{(T_3 - T_2) R_3}$; $R_2 = T_1^2(1 - 2\lambda T_2) + T_2^2$; $R_3 = T_1^2(1 - 2\gamma T_3) + T_3^2$; $\theta = \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda(T_1^2 - T_2 T_3)}{(T_2 + T_3) - \gamma(T_1^2 + T_2 T_3)} + \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda}{\gamma}$
71	$\dfrac{\tau s + 1}{(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1) \cdot (T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$, gdje je $0 < \xi < 1$	$C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \theta) + C_2 e^{-\alpha_2 t} + C_3 e^{-\alpha_3 t}$; gdje je $\gamma = \dfrac{\xi}{T_1}$; $\lambda = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha_2 = \dfrac{1}{T_2}$; $\alpha_3 = \dfrac{1}{T_3}$; $C_1 = -\dfrac{1}{\lambda T_1} \sqrt{\dfrac{\tau^2 - 2\gamma\tau T_1^2 + T_1^2}{R_2 R_3}}$; $C_2 = \dfrac{T_2(T_2 - \tau)}{(T_2 - T_3) R_2}$; $C_3 = \dfrac{T_3(T_3 - \tau)}{(T_3 - T_2) R_3}$;

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
		$R_2 = T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2;$ $R_3 = T_1^2(1-2\gamma T_3)+T_3^2;$ $\theta = \mathrm{arctg}\dfrac{\lambda(T_1^2-T_2T_3)}{(T_2+T_3)-\gamma(T_1^2+T_2T_3)}+$ $+\mathrm{arctg}\dfrac{\lambda T_1^2}{\gamma T_1^2-\tau}$
72	$\dfrac{1}{s(T_1^2s^2+2\xi T_1s+1)\cdot(T_2s+1)(T_3s+1)},$ gdje je $0<\xi<1$	$1+C_1e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta)+C_2e^{-\alpha_2 t}+C_3e^{-\alpha_3 t};$ gdje je $\gamma=\dfrac{\xi}{T_1};\quad \lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1};$ $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2};\quad \alpha_3=\dfrac{1}{T_3};$ $C_1=\dfrac{T_1}{\lambda\sqrt{R_2R_3}};\quad C_2=\dfrac{T_2^3}{(T_3-T_2)R_2};$ $C_3=\dfrac{T_3^3}{(T_2-T_3)R_3};$ $R_2=T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2;$ $R_3=T_1^2(1-2\gamma T_3)+T_3^2;$ $\theta=\mathrm{arctg}\dfrac{\lambda(T_1^2-T_2T_3)}{(T_2+T_3)-\gamma(T_1^2+T_2T_3)}+2\mathrm{arctg}\dfrac{\lambda}{\gamma}$
73	$\dfrac{s}{(T_1^2s^2+2\xi T_1s+1)\cdot(T_2s+1)(T_3s+1)}$ gdje je $0<\xi<1$	$C_1e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta)+C_2e^{-\alpha_2 t}+C_3e^{-\alpha_3 t};$ gdje je $\gamma=\dfrac{\xi}{T_1};\quad \lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1};$ $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2};\quad \alpha_3=\dfrac{1}{T_3};$ $C_1=\dfrac{1}{\lambda T_1\sqrt{R_2R_3}};\quad C_2=\dfrac{T_2}{(T_3-T_2)R_2};$ $C_3=\dfrac{T_3}{(T_2-T_3)R_3};$ $R_2=T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2;$ $R_3=T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_3^2;$ $\theta=\mathrm{arctg}\dfrac{\lambda(T_1^2-T_2T_3)}{(T_2+T_3)-\gamma(T_1^2+T_2T_3)}$

Tablica 1.c

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
74	$\frac{s^2}{(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1) \cdot (T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$, gdje je $0 < \xi < 1$	$C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \theta) + C_2 e^{-\alpha_2 t} + C_3 e^{-\alpha_3 t}$; gdje je $\gamma = \frac{\xi}{T_1}$; $\lambda = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha_2 = \frac{1}{T_2}$; $\alpha_3 = \frac{1}{T_3}$; $C_1 = -\frac{1}{\lambda T_1^2 \sqrt{R_2 R_3}}$; $C_2 = \frac{1}{(T_2 - T_3) R_2}$; $C_3 = \frac{1}{(T_3 - T_2) R_3}$; $R_2 = T_1^2 (1 - 2\gamma T_2) + T_2^2$; $R_3 = T_1^2 (1 - 2\gamma T_3) + T_3^2$; $\theta = \text{arctg} \frac{\lambda (T_1^2 - T_2 T_3)}{(T_2 + T_3) - \gamma (T_1^2 + T_2 T_3)} - \text{arctg} \frac{\lambda}{\gamma}$.
75	$\frac{s^3}{(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1) \cdot (T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$, gdje je $0 < \xi < 1$	$C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \theta) + C_2 e^{-\alpha_2 t} + C_3 e^{-\alpha_3 t}$; gdje je $\gamma = \frac{\xi}{T_1}$; $\lambda = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha_2 = \frac{1}{T_2}$; $\alpha_3 = \frac{1}{T_3}$; $C_1 = \frac{1}{\lambda T_1^3 \sqrt{R_2 R_3}}$; $C_2 = \frac{1}{T_2 (T_3 - T_2) R_2}$; $C_3 = \frac{1}{T_3 (T_2 - T_3) R_3}$; $R_2 = T_1^2 (1 - 2\gamma T_2) + T_2^2$; $R_3 = T_1^2 (1 - 2\gamma T_3) + T_3^2$; $\theta = \text{arctg} \frac{\lambda (T_1^2 - T_2 T_3)}{(T_2 + T_3) - \gamma (T_1^2 + T_2 T_3)} - 2\,\text{arctg} \frac{\lambda}{\gamma}$
76	$\frac{1}{(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)^2}$, gdje je $0 < \xi < 1$	$C e^{-\gamma t} (\sin \lambda t - \lambda t \cos \lambda t)$; gdje je $\gamma = \frac{\xi}{T}$; $\lambda = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C = \frac{1}{2\lambda^3 T^4}$

Tablica 1.c

Broj	Transformacija	Original ($t \geq 0$)
77	$\frac{\tau s+1}{(T^2s^2+2\xi Ts+1)^2}$, gdje je $0<\xi<1$	$e^{-\gamma t}[C\sin\lambda t+C_1\cos(\lambda t-\theta_1)]$; gdje je $\gamma=\frac{\xi}{T}$; $\lambda=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C=-\frac{1+\gamma\tau}{2\lambda^3T^4}$; $C_1=\frac{\sqrt{\tau^2+2\gamma\tau T^2+T^2}}{2\lambda^2T^5}$; $\theta_1=\mathrm{arc\,tg}\frac{\lambda\tau}{\gamma\tau+1}$
78	$\frac{\tau_2^2s^2+\tau_1s+1}{(T^2s^2+2\xi Ts+1)^2}$, gdje je $0<\xi<1$	$e^{-\gamma t}[C\sin\lambda t+C_1t\cos(\lambda t+\theta_1)]$ gdje je $\gamma=\frac{\xi}{T}$; $\lambda=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C=\frac{\tau_2^2-T^2(\gamma\tau_1-1)}{2\lambda^3T^6}$; $C_1=\frac{\sqrt{\lambda^2(\tau_2^2-T^2)^2+[\tau_1-\gamma(\tau_2^2+T^2)]^2}}{2\lambda^2T^5}$; $\theta_1=\mathrm{arctg}\frac{\lambda(\tau_2^2-T^2)}{\tau_1-\gamma(\tau_2^2+T^2)}-\mathrm{arctg}\frac{\lambda}{\gamma}$
79	$\frac{1}{s(T^2s^2+2\xi Ts+1)^2}$, gdje je $0<\xi<1$	$1+Ce^{-\gamma t}[\lambda T\cos(\lambda t+2\theta)-$ $-\sin(\lambda t+\theta)+\lambda t\cos(\lambda t+\theta)]$; gdje je $\gamma=\frac{\xi}{T}$; $\lambda=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C=\frac{1}{2\lambda^3T^3}$; $\theta=\mathrm{arctg}\frac{\lambda}{\gamma}$
80	$\frac{\tau s+1}{s(T^2s^2+2\xi Ts+1)^2}$, gdje je $0<\xi<1$	$1+e^{-\gamma t}\{C\cos(\lambda t+\theta)+$ $+C_1[\sin(\lambda t-\theta_1)-\lambda t\cos(\lambda t-\theta_1)]\}$; gdje je $\gamma=\frac{\xi}{T}$; $\lambda=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C=\frac{1}{2\lambda^2T^2}$; $C_1=\frac{\sqrt{\tau^2-2\gamma\tau T^2+T^2}}{2\lambda^3T^4}$; $\theta=2\,\mathrm{arctg}\frac{\lambda}{\gamma}$; $\theta_1=\mathrm{arctg}\frac{\lambda T^2}{\tau-\gamma T^2}$

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
81	$\dfrac{\tau_2^2 s^2 + \tau_1 s + 1}{s(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)^2}$ gdje je $0 < \xi < 1$	$1 + e^{-\gamma t}[\cos(\lambda t + \theta) +$ $+ C_1 \sin(\lambda t - \theta_1) + C_2 t \cos(\lambda t - \theta_2)];$ gdje je $\lambda = \dfrac{\xi}{T};\quad \lambda = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T};$ $C = \dfrac{1}{2\lambda^2 T^2};\quad \theta = 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\lambda}{\gamma};$ $C_1 = \dfrac{\sqrt{\gamma^2 T^4 + [\tau_1 - \gamma(\tau_2^2 + T^2)]^2}}{2\lambda^3 T^4};$ $C_2 = \dfrac{\sqrt{\lambda^2(\tau_2^2 - T^2)^2 + [\gamma(\tau_2^2 + T^2) - \tau_1]^2}}{2\lambda^2 T^4}$ $\theta_1 = \mathrm{arctg}\,\dfrac{\lambda T^2}{\tau_1 - \gamma(\tau_2^2 + T^2)}$ $\theta_2 = \mathrm{arctg}\,\dfrac{\lambda(\tau_2^2 - T^2)}{\gamma(\tau_2^2 + T^2) - \tau_1}$
82	$\dfrac{s}{(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)^2},$ gdje je $0 < \xi < 1$	$Ce^{-\gamma t}[-\gamma T \sin \lambda t + \lambda t \cos(\lambda t - \theta)];$ gdje je $\gamma = \dfrac{\xi}{T};\quad \lambda = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T};$ $C = \dfrac{1}{2\lambda^3 T^5};\quad \theta = \mathrm{arctg}\,\dfrac{\lambda}{\gamma}$
83	$\dfrac{s^2}{(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)^2},$ gdje je $0 < \xi < 1$	$Ce^{-\gamma t}[\sin \lambda t \cos(\lambda t - 2\theta)];$ gdje je $\gamma = \dfrac{\xi}{T};\quad \lambda = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T};$ $C = \dfrac{1}{2\lambda^3 T^6};\quad \theta = \mathrm{arctg}\,\dfrac{\lambda}{\gamma}$
84	$\dfrac{s^3}{(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)^2},$ gdje je $0 < \xi < 1$	$Ce^{-\gamma t}[\lambda T \cos(\lambda t - 2\theta) +$ $+ \sin(\lambda t - \theta) - \lambda t \cos(\lambda t - 3\theta)];$ gdje je $\gamma = \dfrac{\xi}{T};\quad \lambda = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T};$ $C = -\dfrac{1}{2\lambda^3 T^7};\quad \theta = \mathrm{arctg}\,\dfrac{\lambda}{\gamma}$

Tablica 1.c

Broj	Transformacija	Original ($t \geq 0$)
85	$\dfrac{1}{(T_1^2 s^2+2\xi_1 T_1 s+1)\cdot(T_2^2 s^2+2\xi_2 T_2 s+1)}$, gdje je $0<\xi_1<1$; $0<\xi_2<1$	$C_1 e^{-\gamma_1 t}\sin(\lambda_1 t+\theta_1)+$ $+C_2 e^{-\gamma_2 t}\sin(\lambda_2 t+\theta_2)$; gdje je $\gamma_1=\dfrac{\xi_1}{T_1}$; $\lambda_1=\dfrac{\sqrt{1-\xi_1^2}}{T_1}$; $\gamma_2=\dfrac{\xi_2}{T_2}$ $\lambda_2=\dfrac{\sqrt{1-\xi_2^2}}{T_2}$; $C_1=-\dfrac{1}{\lambda_1\sqrt{R}}$; $C_2=-\dfrac{1}{\lambda_2\sqrt{R}}$; $R=(T_1^2-T_2^2)^2+4(\gamma_1-\gamma_2)\cdot(\gamma_1 T_1^2-\gamma_2 T_2^2)\,T_1^2 T_2^2$; $\theta_1=\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_1(T_1^2-T_2^2)}{2\gamma_2 T_2^2-\gamma_1(T_1^2+T_2^2)}+\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_1}{\gamma_1}$; $\theta_2=\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_2(T_2^2-T_1^2)}{2\gamma_1 T_1^2-\gamma_2(T_1^2+T_2^2)}+\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_2}{\gamma_2}$
86	$\dfrac{\tau s+1}{(T_1^2 s^2+2\xi_1 T_1 s+1)\cdot(T_2^2 s^2+2\xi_2 T_2 s+1)}$, gdje je $0<\xi_1<1$; $0<\xi_2<1$	$C_1 e^{-\gamma_1 t}\sin(\lambda_1 t+\theta_1)+$ $+C_2 e^{-\gamma_2 t}\sin(\lambda_2 t+\theta_2)$; gdje je $\gamma_1=\dfrac{\xi_1}{T_1}$; $\lambda_1=\dfrac{\sqrt{1-\xi_1^2}}{T_2}$; $\gamma_2=\dfrac{\xi_2}{T_2}$; $\lambda_2=\dfrac{\sqrt{1-\xi_2^2}}{T_2}$; $C_1=\dfrac{1}{\lambda_1 T_1}\sqrt{\dfrac{\tau^2+T_1^2(1-2\gamma_1\tau)}{R}}$; $C_2=\dfrac{1}{\lambda_2 T_2}\sqrt{\dfrac{\tau^2+T_2^2(1-2\gamma_2\tau)}{R}}$; $R=(T_1^2-T_2^2)^2+4(\gamma_1-\gamma_2)\cdot(\gamma_1 T_1^2-\gamma_2 T_2^2)\,T_1^2 T_2^2$; $\theta_1=\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_1(T_1^2-T_2^2)}{2\gamma_2 T_2^2-\gamma_1(T_1^2+T_2^2)}-$ $-\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_1 T_1^2}{\tau-\gamma_1 T_1^2}$; $\theta_2=\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_2(T_2^2-T_1^2)}{2\gamma_1 T_1^2-\gamma_2(T_1^2+T_2^2)}-\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_2 T_2^2}{\tau-\gamma_2 T_2^2}$

Tablica 1.c

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
87	$\dfrac{1}{s\,(T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1)\cdot(T_2^2 s^2 + 2\xi_2 T_2 s + 1)}$, gdje je $0 < \xi_1 < 1$; $0 < \xi_2 < 1$	$1 + C_1{}^{-\gamma_1 t} \sin(\lambda_1 t + \theta_1) +$ $+ C_2 e^{-\gamma_2 t} \sin(\lambda_2 t + \theta_2)$; gdje je $\gamma_1 = \dfrac{\xi_1}{T_1}$; $\lambda_1 = \dfrac{\sqrt{1-\xi_1^2}}{T_1}$; $\gamma_2 = \dfrac{\xi_2}{T_2}$; $\lambda_2 = \dfrac{\sqrt{1-\xi_2^2}}{T_2}$; $C_1 = \dfrac{T_1}{\lambda_1 \sqrt{R}}$; $C_2 = \dfrac{T_2}{\lambda_2 \sqrt{R}}$; $R = (T_1^2 - T_2^2)^2 + 4\,(\gamma_1 - \gamma_2)\cdot(\gamma_1 T_1^2 - \gamma_2 T_2^2)\, T_1 T_2^2$; $\theta_1 = \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda_1 (T_1^2 - T_2^2)}{2\gamma_2 T_2^2 - \gamma_1 (T_1^2 + T_2^2)} + 2 \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda_1}{\gamma_1}$; $\theta_2 = \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda_2 (T_2^2 - T_1^2)}{2\gamma_1 T_1^2 - \gamma_2 (T_1^2 + T_2^2)} + 2 \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda_2}{\gamma_2}$
88	$\dfrac{\tau s + 1}{s\,(T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1)\cdot(T_2^2 s^2 + 2\xi_2 T_2 s + 1)}$, gdje je $0 < \xi_1 < 1$ $0 < \xi_2 < 1$	$1 + C_1 e^{-\gamma_1 t} \sin(\lambda_1 t + \theta_1) +$ $+ C_2 e^{-\gamma_2 t} \sin(\lambda_2 t + \theta_2)$; gdje je $\gamma_1 = \dfrac{\xi_1}{T_1}$; $\lambda_1 = \dfrac{\sqrt{1-\xi_1^2}}{T_1}$; $\gamma_2 = \dfrac{\xi_2}{T}$; $\lambda_2 = \dfrac{\sqrt{1-\xi_2^2}}{T_2}$; $C_1 = -\dfrac{1}{\lambda_1} \sqrt{\dfrac{\tau^2 + T_1^2 (1 - 2\gamma_1 \tau)}{R}}$; $C_2 = -\dfrac{1}{\lambda_2} \sqrt{\dfrac{\tau^2 + T_2^2 (1 - 2\gamma_2 \tau)}{R}}$; $R = (T_1^2 - T_2^2)^2 + 4\,(\gamma_1 - \gamma_2)\cdot(\gamma_1 T_1^2 - \gamma_2 T_2^2)\, T_1^2 T_2^2$; $\theta_1 = \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda_1 (T_1^2 - T_2^2)}{2\gamma_2 T_2^2 - \gamma_1 (T_1^2 + T_2^2)} +$ $+ \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda_1 (\tau - 2\gamma_1 T_1^2)}{\gamma_1 \tau + (\lambda_1^2 - \gamma_1^2)\, T_1^2}$; $\theta_2 = \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda_2 (T_2^2 - T_1^2)}{2\gamma_1 T_1^2 - \gamma_2 (T_1^2 + T_2^2)} +$ $+ \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda_2 (T_2^2 - T_1^2)}{\gamma_2 \tau + (\lambda_2^2 - \gamma_2^2)\, T_2^2}$

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
89	$\frac{s}{(T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1)\cdot(T_2^2 s^2 + 2\xi_2 T_2 s + 1)}$, gdje je $0 < \xi_1 < 1$; $0 < \xi_2 < 1$	$C_1 e^{-\gamma_1 t} \sin(\lambda_1 t + \theta_1) + C_2 e^{-\gamma_2 t} \sin(\lambda_2 t + \theta_2)$; gdje je $\gamma_1 = \frac{\xi_1}{T_1}$; $\lambda_1 = \frac{\sqrt{1-\xi_1^2}}{T_1}$; $\gamma_2 = \frac{\xi_2}{T_2}$; $\lambda_2 = \frac{\sqrt{1-\xi_2^2}}{T_2}$; $C_1 = \frac{1}{\lambda_1 T_1 \sqrt{R}}$; $C_2 = \frac{1}{\lambda_2 T_2 \sqrt{R}}$; $R = (T_1^2 - T_2^2)^2 + 4(\gamma_1 - \gamma_2)\cdot(\gamma_1 T_1^2 - \gamma_2 T_2^2)\, T_1^2 T_2^2$; $\theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_1 (T_1^2 - T_2^2)}{2\gamma_2 T_2^2 - \gamma_1 (T_1^2 + T_2^2)}$; $\theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_2 (T_2^2 - T_1^2)}{2\gamma_1 T_1^2 - \gamma_2 (T_1^2 + T_2^2)}$
90	$\frac{s^2}{(T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1)\cdot(T_2^2 s^2 + 2\xi_2 T_2 s + 1)}$, gdje je $0 < \xi_1 < 1$; $0 < \xi_2 < 1$	$C_1 e^{-\gamma_1 t} \sin(\lambda_1 t + \theta_1) + C_2 e^{-\gamma_2 t} \sin(\lambda_2 t + \theta_2)$, gdje je $\gamma_1 = \frac{\xi_1}{T_1}$; $\lambda_1 = \frac{\sqrt{1-\xi_1^2}}{T_1}$; $\gamma_2 = \frac{\xi_2}{T_2}$; $\lambda_2 = \frac{\sqrt{1-\xi_2^2}}{T_2}$; $C_1 = -\frac{1}{\lambda_1 T_1^2 \sqrt{R}}$; $C_2 = -\frac{1}{\lambda_2 T_2^2 \sqrt{R}}$; $R = (T_1^2 - T_2^2)^2 + 4(\gamma_1 - \gamma_2)\cdot(\gamma_1 T_1^2 - \gamma_2 T_2^2)\, T_1^2 T_2^2$; $\theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_1 (T_1^2 - T_2^2)}{2\gamma_2 T_2^2 - \gamma_1 (T_1^2 + T_2^2)} - \operatorname{arctg} \frac{\lambda_1}{\gamma_1}$; $\theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_2 (T_2^2 - T_1^2)}{2\gamma_1 T_1^2 - \gamma_2 (T_1^2 + T_2^2)} - \operatorname{arctg} \frac{\lambda_2}{\gamma_2}$

Tablica 1.c

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
91	$\frac{1}{T^2 s^2 + 1}$	$\frac{1}{T} \sin \alpha t$, gdje je $\alpha = \frac{1}{T}$
92	$\frac{\tau s + 1}{T^2 s^2 + 1}$	$C \sin(\alpha t + \theta)$, gdje je $\alpha = \frac{1}{T}$; $C = \frac{\sqrt{\tau^2 + T^2}}{T^2}$; $\theta = \mathrm{arctg} \frac{\tau}{T}$
93	$\frac{1}{s(T^2 s^2 + 1)}$	$1 - \cos \alpha t$, gdje je $\alpha = \frac{1}{T}$
94	$\frac{\tau s + 1}{s(T^2 s^2 + 1)}$	$1 + C \cos(\alpha t + \theta)$, gdje je $\alpha = \frac{1}{T}$; $C = -\frac{\sqrt{\tau^2 + T^2}}{T}$; $\theta = \mathrm{arctg} \frac{\tau}{T}$
95	$\frac{\tau_2^2 s^2 + \tau_1 s + 1}{s(T^2 s^2 + 1)}$	$1 + C \cos(\alpha t + \theta)$, gdje je $\alpha = \frac{1}{T}$; $C = -\frac{1}{T^2} \sqrt{\tau_1^2 T^2 + (T^2 - \tau_2^2)^2}$; $\theta = \mathrm{arctg} \frac{\tau_1 T}{T^2 - \tau_2^2}$
96	$\frac{1}{s^2 (T^2 s^2 + 1)}$	$-T \sin \alpha t + t$, gdje je $\alpha = \frac{1}{T}$
97	$\frac{s}{T^2 s^2 + 1}$	$\frac{1}{T^2} \cos \alpha t$, gdje je $\alpha = \frac{1}{T}$

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
98	$\dfrac{1}{(T_1^2 s^2+1)(T_2 s+1)}$	$C_1 \sin(\alpha_1 t-\theta_1)+C_2 e^{-\alpha_2 t}$, gdje je $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{1}{\sqrt{T_1^2+T_2^2}}$; $\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{T_2}{T_1}$; $C_2=\dfrac{T_2}{T_1^2+T_2^2}$
99	$\dfrac{\tau s+1}{(T_1^2 s^2+1)(T_2 s+1)}$	$C_1 \sin(\alpha_1 t+\theta)+C_2 e^{-\alpha_2 t}$, gdje je $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{1}{T_1}\sqrt{\dfrac{\tau^2+T_1^2}{T_1^2+T_2^2}}$; $\theta=-\operatorname{arctg}\dfrac{T_2}{T_1}+\operatorname{arctg}\dfrac{\tau}{T_1}$; $C_2=\dfrac{T_2-\tau}{T_1^2+T_2^2}$
100	$\dfrac{1}{s(T_1^2 s^2+1)(T_2 s+1)}$	$1+C_1 \cos(\alpha_1 t-\theta)+C_2 e^{-\alpha_2 t}$, gdje je $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=-\dfrac{T_1}{\sqrt{T_1^2+T_2^2}}$; $C_2=-\dfrac{T_2^2}{T_1^2+T_2^2}$; $\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{T_2}{T_1}$
101	$\dfrac{\tau s+1}{s(T_1^2 s^2+1)(T_2 s+1)}$	$1+C_1 \sin(\alpha_1 t-\theta)+C_2 e^{-\alpha_2 t}$, gdje je $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\sqrt{\dfrac{T_1^2+\tau^2}{T_1^2+T_2^2}}$; $C_2=\dfrac{T_2(\tau-T_2)}{T_1^2+T_2^2}$; $\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{T_2}{T_1}+\operatorname{arctg}\dfrac{T_1}{\tau}$

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
102	$\dfrac{1}{s^2(T_1^2s^2+1)(T_2s+1)}$	$C+C_1\sin(\alpha_1 t-\theta)+C_2e^{-\alpha_2 t}+t,$ gdje je $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C=-T_2$; $C_1=-\dfrac{T_1^2}{\sqrt{T_1^2+T_2^2}}$ $C_2=\dfrac{T_2^3}{T_1^2+T_2^2}$; $\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{T_2}{T_1}$;
103	$\dfrac{s}{(T_1^2s^2+1)(T_2s+1)}$	$C_1\cos(\alpha_1 t-\theta)+C_2e^{-\alpha_2 t},$ gdje je $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{1}{T_1\sqrt{T_1^2+T_2^2}}$; $C_2=-\dfrac{1}{T_1^2+T_2^2}$; $\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{T_2}{T_1}$
104	$\dfrac{s^2}{(T_1^2s^2+1)(T_2s+1)}$	$C_1\sin(\alpha_1 t-\theta)+C_2e^{-\alpha_2 t},$ gdje je $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=-\dfrac{1}{T_1^2\sqrt{T_1^2+T_2^2}}$; $C_2=\dfrac{1}{T_2(T_1^2+T_2^2)}$; $\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{T_2}{T_1}$
105	$\dfrac{1}{(T_1^2s^2+1)(T_2s+1)^2}$	$C_1\sin(\alpha_1 t-\theta)+(C_2+C_3t)e^{-\alpha_2 t},$ gdje je $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{T_1}{T_1^2+T_2^2}$; $C_2=\dfrac{2T_1^2T_2}{(T_1^2+T_2^2)^2}$; $C_3=\dfrac{1}{T_1^2+T_2^2}$; $\theta=2\operatorname{arctg}\dfrac{T_2}{T_1}$

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
106	$$\frac{\tau s+1}{(T_1^2 s^2+1)(T_2 s+1)^2}$$	$C_1 \sin(\alpha_1 t+\theta)+(C_2+C_3 t)\,e^{-\alpha_2 t}$, gdje je $\alpha_1=\frac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\frac{1}{T_2}$; $C_1=\frac{\sqrt{\tau^2+T_1^2}}{T_1^2+T_2^2}$; $\theta=-2\,\mathrm{arctg}\,\frac{T_2}{T_1}+\mathrm{arctg}\,\frac{\tau}{T_1}$; $C_2=\frac{\tau(T_2^2-T_1^2)+2T_1^2 T_2}{(T_1^2+T_2^2)^2}$; $C_3=\frac{T_2-\tau}{T_2(T_1^2+T_2^2)}$
107	$$\frac{1}{s(T_1^2 s^2+1)(T_2 s+1)^2}$$	$1+C_1 \cos(\alpha_1 t-\theta)+(C_2+C_3 t)\,e^{-\alpha_2 t}$, gdje je $\alpha_1=\frac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\frac{1}{T_2}$; $C_1=-\frac{T_1^2}{T_1^2+T_2^2}$; $\theta=2\,\mathrm{arctg}\,\frac{T_2}{T_1}$; $C_2=-\frac{T_2^2(T_2^2+3T_1^2)}{(T_1^2+T_2^2)^2}$; $C_3=-\frac{T_2}{T_1^2+T_2^2}$
108	$$\frac{s}{(T_1^2 s^2+1)(T_2 s+1)^2}$$	$C_1 \cos(\alpha_1 t-\theta)+(C_2+C_3 t)\,e^{-\alpha_2 t}$, gdje je $\alpha_1=\frac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\frac{1}{T_2}$; $C_1=\frac{1}{T_1^2+T_2^2}$; $C_2=\frac{T_2^2-T_1^2}{(T_1^2+T_2^2)^2}$; $C_3=-\frac{1}{T_2(T_1^2+T_2^2)}$; $\theta=2\,\mathrm{arctg}\,\frac{T_2}{T_1}$

Broj	Transformacija	Original ($t \geq 0$)
109	$\frac{s^2}{(T_1^2 s^2+1)(T_2 s+1)^2}$	$C_1 \sin(\alpha_1 t-\theta)+(C_2+C_3 t)\,e^{-\alpha_2 t}$, gdje je $\alpha_1=\frac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\frac{1}{T_2}$; $C_1=\frac{-1}{T_1(T_1^2+T_2^2)}$; $C_2=-\frac{2T_2}{(T_1^2+T_2^2)^2}$; $C_3=\frac{1}{T_2^2(T_1^2+T_2^2)}$; $\theta=2\,\mathrm{arctg}\,\frac{T_2}{T_1}$
110	$\frac{1}{(T_1^2 s^2+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$	$C_1 \sin(\alpha_1 t-\theta)+C_2 e^{-\alpha_2 t}+C_3 e^{-\alpha_3 t}$, gdje je $\alpha_1=\frac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\frac{1}{T_2}$; $\alpha_3=\frac{1}{T_3}$; $C_1=\frac{T_1}{\sqrt{(T_1^2+T_2^2)(T_1^2+T_3^2)}}$; $C_2=\frac{T_2^2}{(T_2-T_3)(T_1^2+T_2^2)}$; $C_3=\frac{T_3^2}{(T_3-T_2)(T_1^2+T_3^2)}$; $\theta=\mathrm{arctg}\,\frac{T_1(T_2+T_3)}{T_1^2-T_2 T_3}$
111	$\frac{s}{(T_1^2 s^2+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$	$C_1 \cos(\alpha_1 t-\theta)+C_2 e^{-\alpha_2 t}+C_3 e^{-\alpha_3 t}$, gdje je $\alpha_1=\frac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\frac{1}{T_2}$; $\alpha_3=\frac{1}{T_3}$; $C_1=\frac{1}{\sqrt{(T_1^2+T_2^2)(T_1^2+T_3^2)}}$; $C_2=\frac{T_2}{(T_3-T_2)(T_1^2+T_2^2)}$; $C_3=\frac{T_3}{(T_2-T_3)(T_1^2+T_3^2)}$; $\theta=\mathrm{arctg}\,\frac{T_1(T_2+T_3)}{T_1^2-T_2 T_3}$

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
112	$\frac{s^2}{(T_1^2 s^2+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$	$C_1 \sin(\alpha_1 t-\theta)+C_2 e^{-\alpha_2 t}+C_3 e^{-\alpha_3 t}$, gdje je $\alpha_1=\frac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\frac{1}{T_2}$; $\alpha_3=\frac{1}{T_3}$; $C_1=\frac{1}{T_1\sqrt{(T_1^2+T_2^2)(T_1^2+T_3^2)}}$; $C_2=\frac{1}{(T_2-T_3)(T_1^2+T_2^2)}$; $\theta=\mathrm{arctg}\frac{T_1(T_2+T_3)}{T_1^2-T_2T_3}$ $C_3=\frac{1}{(T_3-T_2)(T_1^2+T_3^2)}$
113	$\frac{1}{(T^2 s^2+1)^2}$	$\frac{1}{2T}\sin\alpha t-\frac{t}{2T^2}\cos\alpha t$, gdje je $\alpha=\frac{1}{T}$
114	$\frac{\tau s+1}{(T^2 s^2+1)^2}$	$C_1\sin\alpha t+C_2 t\cos(\alpha t+\theta)$, gdje je $\alpha=\frac{1}{T}$; $C_1=\frac{1}{2T}$; $C_2=-\frac{\sqrt{\tau^2+T^2}}{2T^3}$; $\theta=\mathrm{arctg}\frac{\tau}{T}$
115	$\frac{1}{s(T^2 s^2+1)^2}$	$1-\cos\alpha t-\frac{t}{2T}\sin\alpha t$, gdje je $\alpha=\frac{1}{T}$

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
116	$\frac{\tau s+1}{s(T^2 s^2+1)^2}$	$1+C_1 \cos(\alpha t+\theta_1)+C_2 t \sin(\alpha t+\theta_2)$, gdje je $\alpha=\frac{1}{T}$; $C_1=-\frac{\sqrt{\tau^2+4T^2}}{2T}$; $C_2=-\frac{\sqrt{\tau^2+T^2}}{2T^2}$; $\theta_1=\operatorname{arctg}\frac{\tau}{2T}$; $\theta_2=\operatorname{arctg}\frac{\tau}{T}$
117	$\frac{\tau_2^2 s^2+\tau_1 s+1}{s(T^2 s^2+1)^2}$	$1+C_1 \cos(\alpha t+\theta_1)+C_2 t \sin(\alpha t-\theta_2)$, gdje je $\alpha=\frac{1}{T}$; $C_1=-\frac{\sqrt{\tau_1^2+4T^2}}{2T}$; $C_2=\frac{1}{2T^3}\sqrt{\tau_1^2 T^2+(\tau_2^2-T^2)^2}$; $\theta_1=\operatorname{arctg}\frac{\tau_1}{2T}$; $\theta_2=\operatorname{arctg}\frac{\tau_1 T}{\tau_2^2-T^2}$
118	$\frac{s}{(T^2 s^2+1)^2}$	$\frac{t}{2T^3}\sin \alpha t$, gdje je $\alpha=\frac{1}{T}$
119	$\frac{s^2}{(T^2 s^2+1)^2}$	$\frac{1}{2T^3}\sin \alpha t+\frac{t}{2T^4}\cos \alpha t$, gdje je $\alpha=\frac{1}{T}$
120	$\frac{1}{(T_1^2 s^2+1)(T_2^2 s^2+1)}$	$C_1 \sin \alpha_1 t+C_1 \sin \alpha_2 t$, gdje je $\alpha_1=\frac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\frac{1}{T_2}$; $C_1=\frac{T_1}{T_1^2-T_2^2}$; $C_2=\frac{T_2}{T_2^2-T_1^2}$;

Tablica 1.c

Broj	Transformacija	Original($t \geq 0$)
121	$\frac{\tau s+1}{(T_1^2 s^2+1)(T_2^2 s^2+1)}$	$C_1 \sin(\alpha_1 t+\theta_1)+C_2 \sin(\alpha_2 t+\theta_2)$, gdje je $\alpha_1=\frac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\frac{1}{T_2}$; $C_1=\frac{\sqrt{\tau^2+T_1^2}}{T_1^2-T_2^2}$; $C_2=\frac{\sqrt{\tau^2+T_2^2}}{T_2^2-T_1^2}$; $\theta_1=\operatorname{arctg}\frac{\tau}{T_1}$; $\theta_2=\operatorname{arctg}\frac{\tau}{T_2}$
122	$\frac{1}{s(T_1^2 s^2+1)(T_2^2 s^2+1)}$	$1+C_1 \cos\alpha_1 t+C_2 \cos\alpha_2 t$, gdje je $\alpha_1=\frac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\frac{1}{T_2}$; $C_1=\frac{T_1^2}{T_2^2-T_1^2}$; $C_2=\frac{T_2^2}{T_1^2-T_2^2}$
123	$\frac{\tau s+1}{s(T_1^2 s^2+1)(T_2^2 s^2+1)}$	$1+C_1 \cos(\alpha_1 t+\theta_1)+C_2 \cos(\alpha_2 t+\theta_2)$, gdje je $\alpha_1=\frac{1}{T_1}$; $C_1=\frac{T_1\sqrt{\tau^2+T_1^2}}{T_2^2-T_1^2}$; $\alpha_2=\frac{1}{T_2}$; $C_2=\frac{T_2\sqrt{\tau^2+T_2^2}}{T_1^2-T_2^2}$; $\theta_1=\operatorname{arctg}\frac{\tau}{T_1}$; $\theta_2=\operatorname{arctg}\frac{\tau}{T_2}$
124	$\frac{s}{(T_1^2 s^2+1)(T_2^2 s^2+1)}$	$C_1 \cos\alpha_1 t+C_2 \cos\alpha_2 t$, gdje je $\alpha_1\frac{1}{T_1}$; $C_1=\frac{1}{T_1^2-T_2^2}$; $\alpha_2=\frac{1}{T_2}$; $C_2=\frac{1}{T_2^2-T_1^2}$

Tablica 1.c

Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
125	$\dfrac{s^2}{(T_1^2 s^2+1)(T_2^2 s^2+1)}$	$C_1 \sin \alpha_1 t + C_2 \sin \alpha_2 t,$ gdje je $\alpha_1 = \dfrac{1}{T_1};$ $C_1 = \dfrac{1}{T_1 (T_2^2 - T_1^2)};$ $\alpha_2 = \dfrac{1}{T_2};\quad C_2 = \dfrac{1}{T_2 (T_1^2 - T_2^2)};$
126	$\dfrac{1}{(T_1^2 s^2+1)(T_2^2 s^2+2\xi T_2 s+1)},$ gdje je $0<\xi<1$	$C_1 \sin (\alpha t - \theta_1) + C_2 e^{-\gamma t} \sin (\lambda t + \theta_2),$ gdje je $\alpha = 1/T_1;\quad \gamma = \xi/T_2;$ $\lambda = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_2};\quad C_1 = \dfrac{T_1}{\sqrt{R}};$ $C_2 \dfrac{1}{\lambda \sqrt{R}};\quad R = (T_1^2 - T_2^2)^2 + 4\gamma^2 T_1^2 T_2^4;$ $\theta_1 = \mathrm{arctg}\, \dfrac{2\gamma T_1 T_2^2}{T_1^2 - T_2^2};$ $\theta_2 = \mathrm{arctg}\, \dfrac{\lambda (\mathrm{T}_1^2 - \mathrm{T}_2^2)}{\gamma (\mathrm{T}_1^2 + \mathrm{T}_2^2)} + \mathrm{arctg}\, \dfrac{\lambda}{\gamma}$
127	$\dfrac{1}{s(T_1^2 s^2+1)(T_2^2 s^2+2\xi T_2 s+1)},$ gdje je $0<\xi<1$	$1 + C_1 \cos (\alpha t - \theta_1) + C_2 e^{-\gamma t} \sin (\lambda t + \theta_2),$ gdje je $\alpha = 1/T_1;\quad \gamma = \xi/T_2;$ $\lambda = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_2};$ $C_1 = -\dfrac{T_1^2}{\sqrt{(T_1^2 - T_2^2)^2 + 4\gamma^2 T_1^2 T_2^4}};$ $C_2 = -\dfrac{T_2}{\lambda \sqrt{(T_1^2 - T_2^2)^2 + 4\gamma^2 T_1^2 T_2^4}};$ $\theta_1 = \mathrm{arctg}\, \dfrac{2\gamma T_1 T_2^2}{T_1^2 - T_2^2}$ $\theta_2 = \mathrm{arctg}\, \dfrac{\lambda (T_1^2 - T_2^2)}{\gamma (T_1^2 + T_2^2)} + 2\, \mathrm{arctg}\, \dfrac{\lambda}{\gamma}$

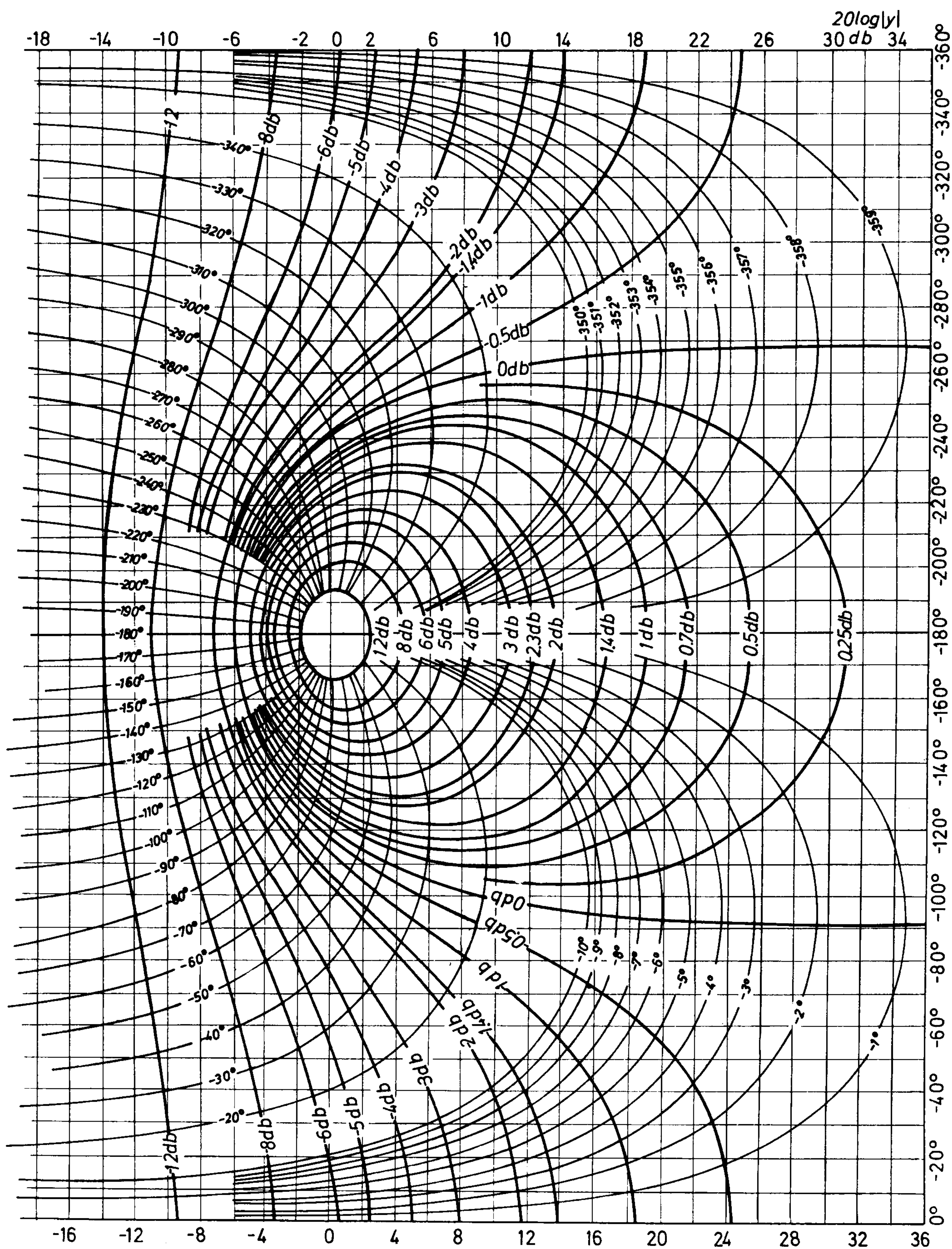
Broj	Transformacija	Original $(t \geq 0)$
128	$\dfrac{s}{(T_1^2 s^2+1)(T_2^2 s^2+2\xi T_2 s+1)}$, gdje je $0<\xi<1$	$C_1 \cos(\alpha t-\theta_1)+C_2 e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta_2)$, gdje je $\alpha=1/T_1$; $\gamma=\xi/T_2$; $\lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_2}$; $C_1=\dfrac{1}{\sqrt{(T_1^2-T_2^2)^2+4\gamma^2 T_1^2 T_2^4}}$; $C_2=-\dfrac{1}{\lambda T_2\sqrt{(T_1^2-T_2^2)+4\gamma^2 T_1^2 T_2^4}}$; $\theta_1=\operatorname{arctg}\dfrac{2\gamma T_1 T_2^2}{T_1^2-T_2^2}$; $\theta_2=\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda(T_1^2-T_2^2)}{\gamma(T_1^2+T_2^2)}$
129	$\dfrac{s^2}{(T_1^2 s^2+1)(T_2^2 s^2+2\xi T_2 s+1)}$, gdje je $0<\xi<1$	$C_1 \sin(\alpha t-\theta_1)+C_2 e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta_2)$, gdje je $\alpha=1/T_1$; $\gamma=\xi/T_2$; $\lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_2}$; $C_1=-\dfrac{1}{T_1\sqrt{(T_1^2-T_2^2)^2+4\gamma^2 T_1^2 T_2^4}}$; $C_2=\dfrac{1}{\lambda T_2^2\sqrt{(T_1^2-T_2^2)^2+4\gamma^2 T_1^2 T_2^4}}$; $\theta_1=\operatorname{arctg}\dfrac{2\gamma T_1 T_2^2}{T_1^2-T_2^2}$; $\theta_2=\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda(T_1^2-T_2^2)}{\gamma(T_1^2+T_2^2)}-\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda}{\gamma}$

ODREĐIVANJE φ_e I L_e NEKIH SPOJEVA DINAMIČKIH ELEMENATA POMOĆU NICHOLSOVA DIJAGRAMA

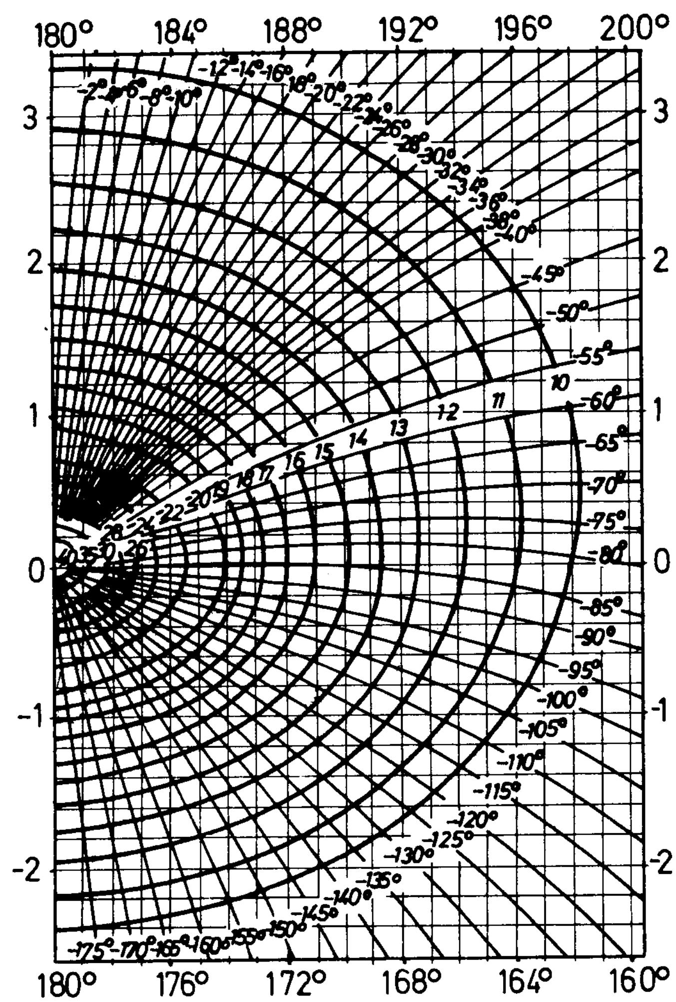
Tablica 1.

Strukturna shema spoja	Prije-nosna funkcija spoja G_e	Na Nicholsovom dijagramu postaviti		Faza i amplituda spoja	
		$\Psi[°]$	L[dB]	$\varphi_e[°]$	L_e[dB]
	$\frac{G_1}{1+G_1}$	ψ_1	L_1	θ	Λ
	$\frac{G_1}{1-G_1}$	$180°+\Psi_1$	L_1	$\theta+180°$	Λ
	G_1+G_2	$\psi_1+\psi_2$	L_1-L_2	$\psi_1-\theta$	$L_1-\Lambda$
	G_1+1	$-\psi_1$	$-L_1$	$-\theta$	$-\Lambda$
	G_1-G_2	$\psi_1-\psi_2+$ $+180°$	L_1-L_2	$\psi_1-\theta$	$L_1-\Lambda$
	$1-G_1$	$180°-\psi_1$	$-L_1$	$-\theta$	$-\Lambda$
	$\frac{1}{1+G_1}$	$-\psi_1$ ψ_1	$-L_1$ L_1	θ $\theta-\psi_1$	Λ $\Lambda-L_1$
	$\frac{G_1}{1+G_1G_2}$	$\psi_1+\psi_2$ $-(\psi_1+\psi_2)$	L_1+L_2 $-(L_1+L_2)$	$\theta-\psi_2$ $\theta+\psi_1$	$\Lambda-L_2$ $\Lambda+L_2$
	$\frac{G_1}{1-G_1G_2}$	$\psi_1+\psi_2+180°$ $180°-(\psi_1+\psi_2)$	L_1+L_2 $-(L_1+L_2)$	$\theta-\psi_2+180°$ $\theta+\psi_1$	$\Lambda-L_2$ $\Lambda+L_1$

$\theta[°]$ ...očitana faza iz Nicholsova dijagrama za dobiveni ψ i L
Λ[dB]...očitana amplituda iz Nicholsova dijagrama za dobiveni ψ i L

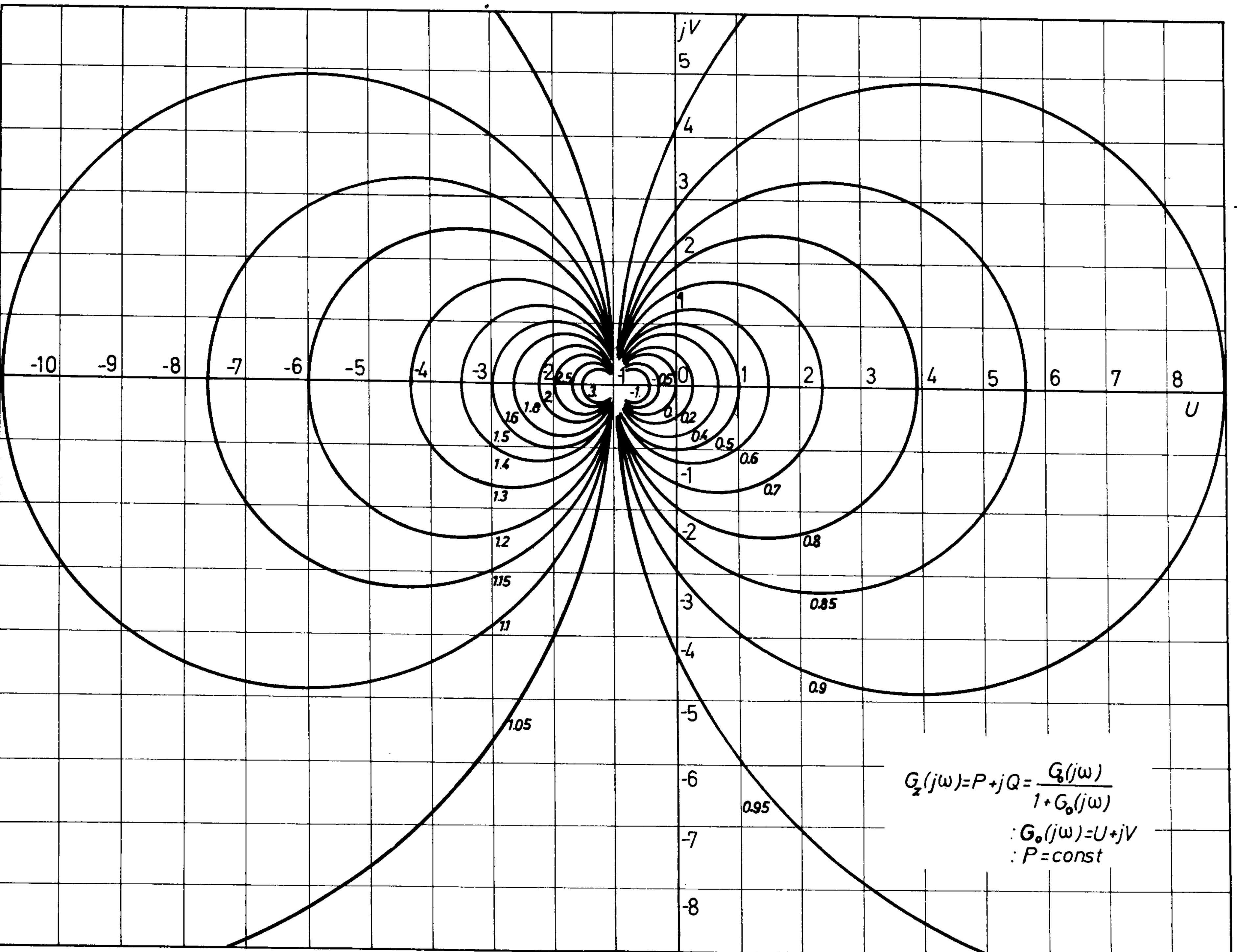

NICHOLSOV DIJAGRAM
20log|y|
db
-18 -14 -10 -6 -2 0 2 6 10 14 18 22 26 30 34
-16 -12 -8 -4 0 4 8 12 16 20 24 28 32 36
-360° -340° -320° -300° -280° -260° -240° -220° -200° -180° -160° -140° -120° -100° -80° -60° -40° -20° 0°
12db 8db 6db 5db 4db 3db 2.3db 2db 1.4db 1db 0.7db 0.5db 0.25db
-12db -8db -6db -5db -4db -3db -2db -1.4db -1db -0.5db 0db
-350° -351° -352° -353° -354° -355° -356° -357° -358° -359°
-10° -9° -8° -7° -6° -5° -4° -3° -2° -1°

DIO NICHOLSOVOG DIJAGRAMA
U POVEĆANOM MJERILU



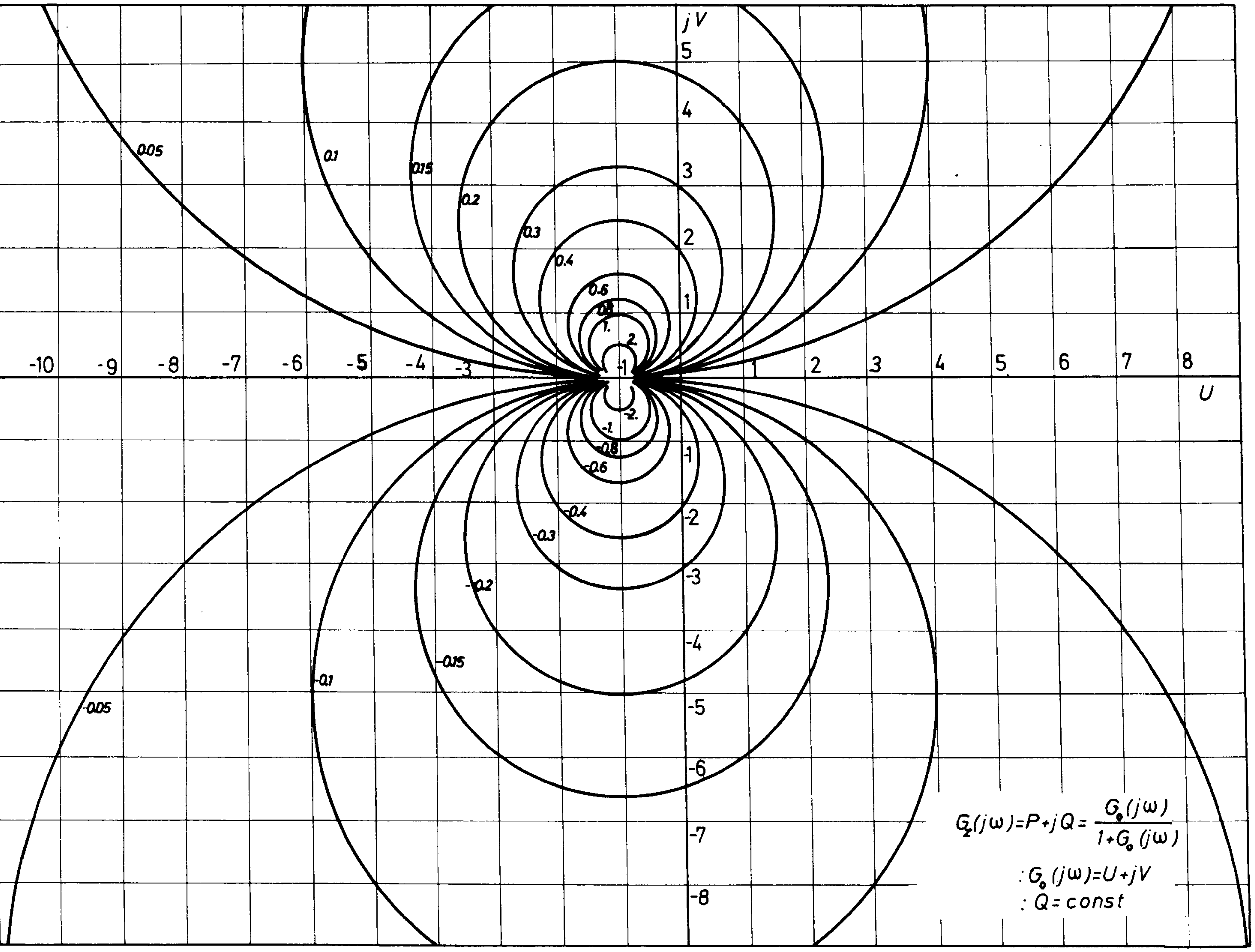
KRUŽNI DIJAGRAMI

Realni $P(\omega)$



KRUŽNI DIJAGRAMI

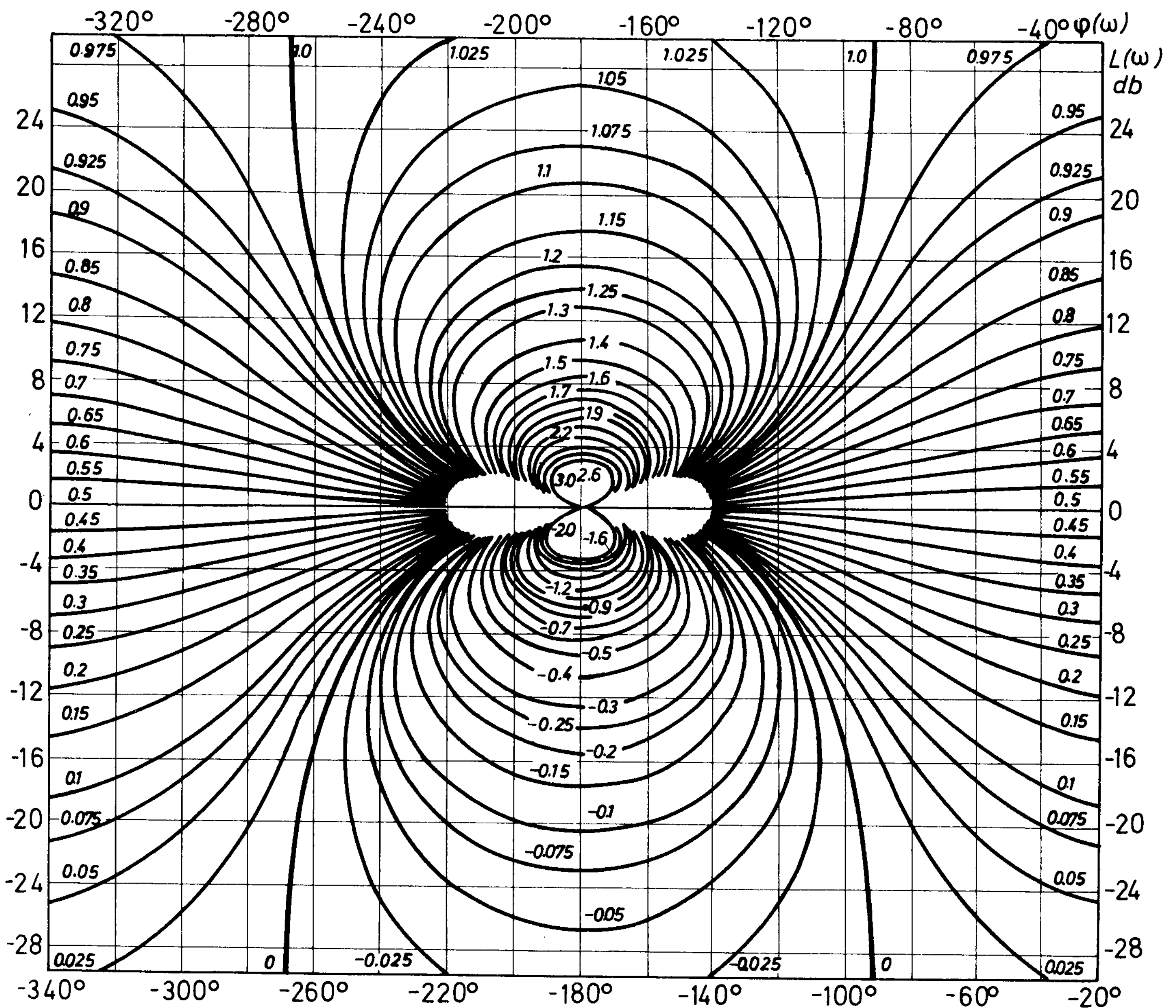
Imaginarni $Q(\omega)$



KRUŽNI DIJAGRAMI U LOGARITAMSKOM MJERILU

Realni $P(\omega)$

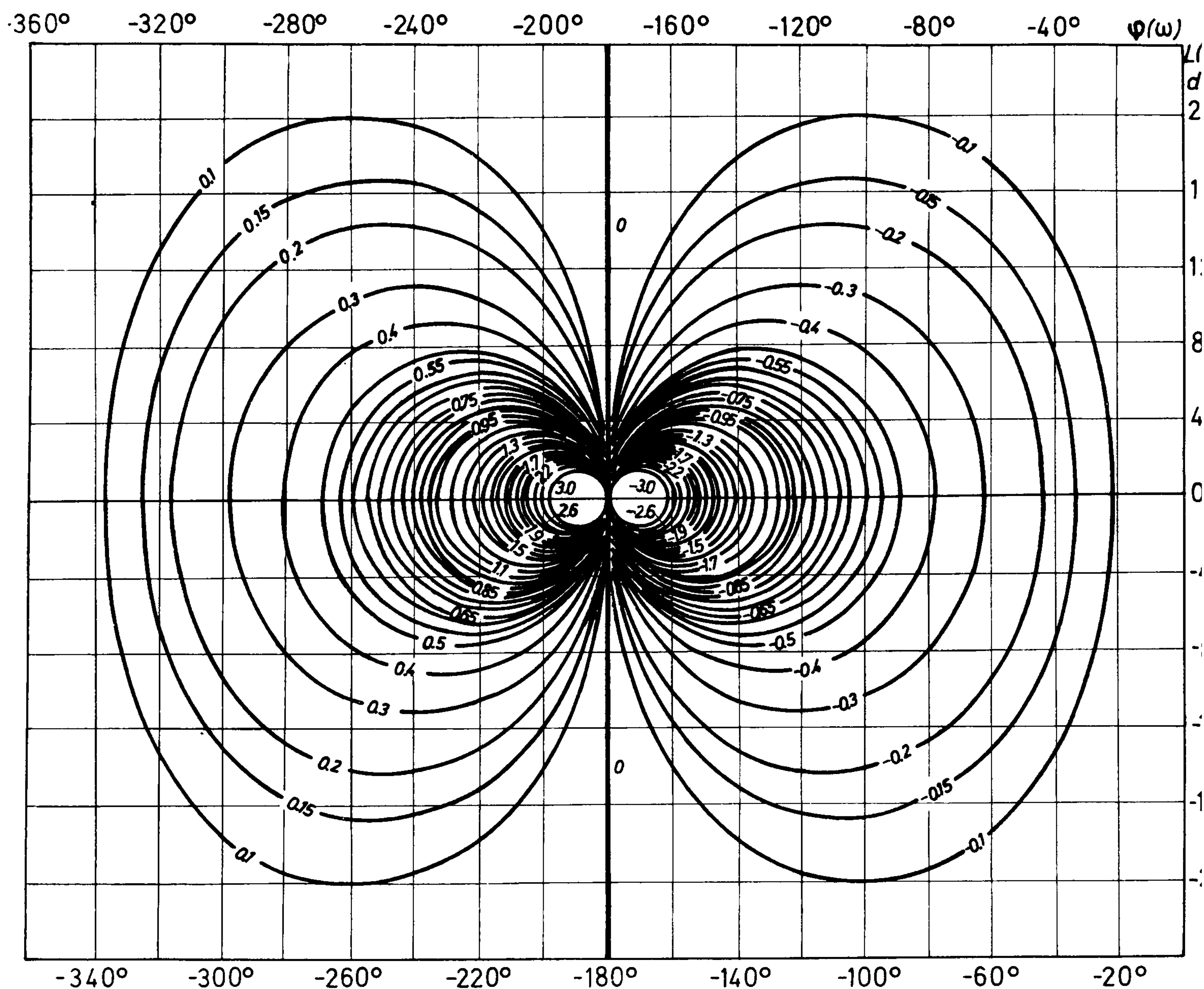
Nomogram za dobivanje realne frekvencijske karakteristike zatvorenog kruga iz logaritamske frekvencijske karakteristike otvorenog kruga.



KRUŽNI DIJAGRAMI U LOGARITAMSKOM MJERILU

Imaginarni Q(ω)

Nomogram za dobivanje imaginarne frekvencijske karakteristike zatvorenog kruga iz logaritamske frekvencijske karakteristike otvorenog kruga.



TIPIČNE DINAMIČKE KOMPONENTE

(K – koeficijent pojačanja; T, τ – vremenske konstante; ξ – koeficijent prigušenja; $D=\frac{d}{dt}$ – operator diferenciranja; s – kompleksna veličina L-transformacije)

Tablica 2.

	Tip elementa	Diferencijalna jednadžba	Prijenosna funkcija $G=G(s)$
pozicioni (proporcionalni) elementi	proporcionalni idealni (P) (bezinercioni)	$y=K\cdot u$	$G=K$
	proporcionalni (inercioni) – aperiodski I reda (PT)	$(TD+1)\,y=Ku$	$G=\frac{K}{Ts+1}$
	aperiodski II reda (proporcionalni inercioni II reda) (PT_1T_2)	$(T_2^2D^2+T_1D+1)\,y=Ku$ gdje je: $T_1\geq 2T_2$	$G=\frac{K}{T_2^2s^2+T_1s+1}=\frac{K}{(T_3s+1)(T_4s+1)}$ gdje je: $T_{3,4}=\frac{1}{2}(T_1\pm\sqrt{T_1^2-4T_2^2})$
	oscilatorni	$(T^2D^2+2\xi TD+1)\,y=Ku$ gdje je: $0<\xi<1$	$G=\frac{K}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$
	konzervativni (oscilatorni bez prigušenja)	$(T^2D^2+1)\,y=Ku$	$G=\frac{K}{T^2s^2+1}$
integralni elementi	integralni idealni (I)	$Dy=Ku$	$G=\frac{K}{s}$
	integralni realni (inercioni integralni)	$D\,(TD+1)\,y=Ku$	$G=\frac{K}{s\,(Ts+1)}$

27 *

	Tip elementa	Diferencijalna jednadžba	Prijenosna funkcija $G=G(s)$
integralni elementi	proporcionalno-integralni ($P-I$) (izodromni)	$Dy=K(\tau D+1)u$	$G=\frac{K(\tau s+1)}{s}=$ $=K_1+\frac{K}{s}$, gdje je: $K_1=K\tau$
	propor-cionalno-integralni II reda (izodromni II reda)	$D^2y=K(\tau^2D^2+2\xi\tau D+1)u$, gdje je: $0<\xi<1$	$G=\frac{K(\tau^2s^2+2\xi\tau s+1)}{s^2}=$ $=K_2+\frac{K_1}{s}+\frac{K}{s^2}$, gdje su: $K_2=K\tau^2$; $K_1=2\xi K\tau$
derivativni elementi	derivativni idealni (D)	$y=KDu$	$G=Ks$
	derivativni inercioni (realni derivativni)	$(TD+1)y=KDu$	$G=\frac{Ks}{Ts+1}$
	propor-cionalno-derivativni ($P-D$)	$y=K(\tau D+1)u$	$G=K(\tau s+1)$
	propor-cionalno-derivativni II reda	$y=K(\tau^2D^2+2\xi\tau D+1)u$, gdje je: $\xi<1$	$G=K(\tau^2s^2+2\xi\tau s+1)$
		$y=KD(\tau D+1)u$	$G=Ks(\tau s+1)$

VREMENSKE KARAKTERISTIKE TIPIČNIH DINAMIČKIH ELEMENATA

Tablica 3.

Tip elementa i njegova prijenosna funkcija $G=G(s)$	Prijelazna karakteristika $h=h(t)$	Impulsni odziv (težinska funkcija) $g=g(t)$
idealno pojačalo (bezinerciono) $G=K$.	$h=K$	$g=K\delta(t)$
aperiodski (inercioni) $G=\frac{K}{Ts+1}$	$h=K\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$	$g=\frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}$
aperiodski (inercioni) drugog reda $G=\frac{K}{T_2^2 s^2+T_1 s+1}=$ $=\frac{K}{(T_3 s+1)(T_4 s+1)}$, gdje je $T_1 \geq 2T_2$; $T_{3,4}=\frac{1}{2}(T_1 \pm \sqrt{T_1^2-4T_2^2})$; $T_3 \geq T_4$	$h=K\left[1-\frac{1}{T_3-T_4}\cdot\left(T_3 e^{-\frac{t}{T_3}}-T_4 e^{-\frac{t}{T_4}}\right)\right]$	$g=\frac{K}{T_3-T_4}\cdot\left(e^{-\frac{t}{T_3}}-e^{-\frac{t}{T_4}}\right)$

Tablica 3.

Tip elementa i njegova prijenosna funkcija $G=G(s)$	Prijelazna karakteristika $h=h(t)$	Impulsni odziv (težinska funkcija) $g=g(t)$
oscilatorni $G=\frac{K}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$, gdje je $0<\xi<1$	$h=K\left[1-\frac{1}{\lambda T}e^{-\frac{\xi t}{T}}\cdot\sin(\lambda t+\theta)\right]$, $\lambda=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $\theta=\operatorname{arctg}\frac{\lambda T}{\xi}$; $\sigma_1=Ke^{-\frac{\xi\pi}{\lambda T}}$; $\ln\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{\xi\pi}{\lambda T}$	$g=\frac{K}{\lambda T^2}e^{-\frac{\xi t}{T}}\sin\lambda t$
konzervativni $G=\frac{K}{T^2s^2+1}$	$h=K\left(1-\cos\frac{t}{T}\right)$	$g=\frac{K}{T}\sin\frac{t}{T}$
idealni integrator $G=\frac{K}{s}$	$h=Kt$ $\alpha=\operatorname{arctg}K$	$g=K$

Tablica 3.

Tip elementa i njegova prijenosna funkcija $G=G(s)$	Prijelazna karakteristika $h=h(t)$	Impulsni odziv (težinska funkcija) $g=g(t)$
realni integrator $G=\frac{K}{s(Ts+1)}$	$h=K\left[t-T\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)\right]$ $\alpha=\text{arctg}\,K$	$g=K\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$
proporcionalno-integralni (izodromni) $G=\frac{K(\tau s+1)}{s}=K_1+\frac{K}{s}$, gdje je $K_1=K\tau$	$h=K_1+Kt$ $\alpha=\text{arctg}\,K$	$g=K_1\delta(t)+K$
izodromni drugog reda $G=\frac{K(\tau^2s^2+2\zeta\tau s+1)}{s^2}=$ $=K_2+\frac{K_1}{s}+\frac{K}{s^2}$, $K_2=K\tau^2$; $K_1=K_2\zeta\tau$	$h=K_2+K_1t+Kt^2$	$g=K_2\delta(t)+K_1+2Kt$ $\alpha=\text{arctg}\,2K$
idealni derivativni $G=Ks$	$h=K\delta(t)$	$g=K\cdot D\delta(t)$

Tip elementa i njegova prijenosna funkcija $G=G(s)$	Prijelazna karakteristika $h=h(t)$	Impulsni odziv (težinska funkcija) $g=g(t)$
realni derivativni $G=\frac{Ks}{Ts+1}$	$h=\frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}$ h, K/T, 0, t	$g=\frac{K}{T}\delta(t)-\frac{K}{T^2}e^{-\frac{t}{T}}$ g, 0, t, K/T²

FREKVENCIJSKE KARAKTERISTIKE TIPIČNIH DINAMIČKIH ELEMENATA

Tablica 4.

Tip elementa i njegova frekvencijska prijenosna funkcija $G=G(j\omega)$	Amplitudna $A=A(\omega)$, fazna $\varphi=\varphi(\omega)$, realna $U=U(\omega)$ i imaginarna $V=V(\omega)$ frekvencijska karakteristika	Amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika (Nyquistov prikaz)	Logaritamske karakteristike: asimptotska amplitudno-frekvencijska $L=L(\omega)$ i fazna frekvencijska $\varphi=\varphi(\omega)$ (Bodeov prikaz)
idealno pojačalo $G=K$	$A=K;\quad \varphi=0°$ $U=K;\quad V=0$	+j, -j, -, +, $\omega=0$, $\omega=\infty$ $U(0)=U(_\infty)=K$	L, L(0), ω, φ, 0°, ω $L(0)=L(_\infty)=20\log K$
aperiodski (inercioni) $G=\dfrac{K}{1+j\omega T}$	$A=\dfrac{K}{\sqrt{1+\omega^2T^2}};$ $\varphi=-\operatorname{arctg}\omega T;$ $U=\dfrac{K}{1+\omega^2T^2};$ $V=\dfrac{-K\omega T}{1+\omega^2T^2}$	+j, -j, -, +, $\omega=\infty$, -45°, $\omega=0$, ω_1 $U(0)=K;$ $U(\omega_1)=\dfrac{K}{2}$ $V(\omega_1)=-\dfrac{K}{2};\quad \omega_1=\dfrac{1}{T}$	L, L(0), -1, ω, ω_1, φ, ω, -45°, -90° $L(0)=20\log K$

Tablica 4.

Tip elementa i njegova frekvencijska prijenosna funkcija $G=G(j\omega)$	Amplitudna $A=A(\omega)$, fazna $\varphi=\varphi(\omega)$, realna $U=U(\omega)$ i imaginarna $V=V(\omega)$ frekvencijska karakteristika	Amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika (Nyquistov prikaz)	Logaritamske karakteristike: asimptotska amplitudno-frekvencijska $L=L(\omega)$ i fazna frekvencijska $\varphi=\varphi(\omega)$ (Bodeov prikaz)
aperiodski drugog reda $G=\frac{K}{(1-\omega^2T_2^2)+j\omega T_1}=$ $=\frac{K}{(1-\omega^2T_3T_4)+j\omega(T_3+T_4)}$, $T_{3,4}=\frac{1}{2}(T_1\pm\sqrt{T_1^2-4T_2^2}$; $T_1\geq 2T_2$; $T_3\geq T_4$	$A=\frac{K}{\sqrt{1+\omega^2(T_1^2-2T_2^2)+\omega^4T_2^4}}$; $\varphi=-\operatorname{arctg}\frac{\omega T_1}{1-\omega^2T_2^2}$; $U=\frac{K(1-\omega^2T_2^2)}{1+\omega^2(T_1^2-2T_2^2)+\omega^4T_2^4}$; $V=\frac{-K\omega T_1}{1+\omega^2(T_1^2-2T_2^2)+\omega^4T_2^4}$	$U(0)=K$; $V(\omega_2)=\frac{KT_2}{T_1}$; $\omega_2=\frac{1}{T_2}$	$L(0)=20\log K$
oscilatorni $G=\frac{K}{(1-\omega^2T^2)+j\omega 2\xi T}$. gdje je $0<\xi<1$	$A=\frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 2T^2(2\xi^2-1)+\omega^4T^4}}$; $\varphi=-\operatorname{arctg}\frac{\omega 2\xi T}{1-\omega^2T^2}$; $U=\frac{K(1-\omega^2T^2)}{1+\omega^2 2T^2(2\xi^2-1)+\omega^4T^4}$; $V=\frac{-K\omega 2\xi T}{1+\omega^2 2T^2(2\xi^2-1)+\omega^4T^4}$	$\omega_1=\frac{1}{T}$; $U(0)=K$; $V(\omega_1)=\frac{K}{2\xi}$	$L(0)=20\log K$

Tablica 4.

Tip elementa i njegova frekvencijska prijenosna funkcija $G=G(j\omega)$	Amplitudna $A=A(\omega)$, fazna $\varphi=\varphi(\omega)$, realna $U=U(\omega)$ i imaginarna $V=V(\omega)$ frekvencijska karakteristika	Amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika (Nyquistov prikaz)	Logaritamske karakteristike: asimptotska amplitudno-frekvencijska $L=L(\omega)$ i fazna frekvencijska $\varphi=\varphi(\omega)$ (Bodeov prikaz)
konzervativni $G=\frac{K}{1-\omega^2T^2}$	$A=U=\frac{K}{1-\omega^2T^2}$; $\varphi=0°$; $V=0$	$U(0)=K$; $\omega_1=\frac{1}{T}$	$L(0)=20\log K$
idealni integrator $G=\frac{K}{j\omega}$	$A=\frac{K}{\omega}$; $U=0$; $V=-\frac{K}{\omega}$; $\varphi=-90°$		$\omega_K=\omega_c=\mathrm{K}$

Tablica 4.

Tip elementa i njegova frekvencijska prijenosna funkcija $G=G(j\omega)$	Amplitudna $A=A(\omega)$, fazna $\varphi=\varphi(\omega)$, realna $U=U(\omega)$ i imaginarna $V=V(\omega)$ frekvencijska karakteristika	Amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika (Nyquistov prikaz)	Logaritamske karakteristike: asimptotska amplitudno-frekvencijska $L=L(\omega)$ i fazna frekvencijska $\varphi=\varphi(\omega)$ (Bodeov prikaz)
realni integrator $G=\dfrac{K}{-\omega^2 T+j\omega}$	$A=\dfrac{K}{\omega\sqrt{1+\omega^2T^2}}$; $\varphi=-90°-\mathrm{arctg}\,\omega T$; $U=\dfrac{-KT}{1+\omega^2T^2}$; $V=\dfrac{-K}{\omega(1+\omega^2T^2)}$	$U(0)=-KT$	$\omega_1=\dfrac{1}{T}$; $\omega_K=K\neq\omega_c$
proporcionalno-integralni (izodromni) $G=\dfrac{K(1+j\omega\tau)}{j\omega}$	$A=\dfrac{K}{\omega}\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$; $\varphi=-90°+\mathrm{arctg}\,\omega\tau$; $U=K_1$, gdje je $K_1=K\tau$; $V=-\dfrac{K}{\omega}$	$U(0)=U(\infty)=K_1$	$\omega_1=\dfrac{1}{\tau}$; $L(\infty)=20\log K_1$

Tablica 4.

Tip elementa i njegova frekvencijska prijenosna funkcija $G=G(j\omega)$	Amplitudna $A=A(\omega)$, fazna $\varphi=\varphi(\omega)$, realna $U=U(\omega)$ i imaginarna $V=V(\omega)$ frekvencijska karakteristika	Amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika (Nyquistov prikaz)	Logaritamske karakteristike: asimptotska amplitudno-frekvencijska $L=L(\omega)$ i fazna frekvencijska $\varphi=\varphi(\omega)$ (Bodeov prikaz)
izodromni drugog reda $G=\frac{K[(1-\omega^2\tau^2)+j\omega 2\zeta\tau]}{-\omega^2}$	$A=\frac{K}{\omega^2}\sqrt{1+\omega^2 2\tau^2(2\zeta^2-1)+\omega^4\tau^4}$ $\varphi=\mathrm{arctg}\,\frac{\omega 2\zeta\tau}{1-\omega^2\tau^2}-180°$ $U=-\frac{K}{\omega^2}(1-\omega^2\tau^2);$ $V=-\frac{K2\zeta\tau}{\omega}$	 $\omega_1=\frac{1}{\tau};$ $U(0)=K\tau^2$	 $L(\infty)=20\log K\tau^2$
idealni derivativni $G=jK\omega$	$A=K\omega;$ $\varphi=+90°;$ $U=0;$ $V=K\omega$		 $\omega_c=\frac{1}{K}$

Tablica 4.

Tip elementa i njegova frekvencijska prijenosna funkcija $G=G(j\omega)$	Amplitudna $A=A(\omega)$, fazna $\varphi=\varphi(\omega)$, realna $U=U(\omega)$ i imaginarna $V=V(\omega)$ frekvencijska karakteristika	Amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika (Nyquistov prikaz)	Logaritamske karakteristike: asimptotska amplitudno-frekvencijska $L=L(\omega)$ i fazna frekvencijska $\varphi=\varphi(\omega)$ (Bodeov prikaz)
realni derivativni $G=\frac{jK\omega}{1+j\omega T}$	$A=\frac{K\omega}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$; $\varphi=90°-\mathrm{arctg}\,\omega T$; $U=\frac{KT\omega^2}{1+\omega^2T^2}$; $V=\frac{K\omega}{1+\omega^2T^2}$	 $\omega_1=\frac{1}{T}$ $U(\omega_1)=V(\omega_1)=\frac{K}{2T}$	 $\omega_c=\frac{1}{K}$; $L(\infty)=20\log\frac{K}{T}$
proporcionalno-derivativni (idealni) $G=K(1+j\omega\tau)$	$A=K\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$; $\varphi=\mathrm{arctg}\,\omega\tau$; $U=K$ $V=K\omega\tau$	 $U(0)=U(\infty)=K$	 $\omega_1=\frac{1}{\tau}$; $L(0)=20\log K$

Tablica 4.

Tip elementa i njegova frekvencijska prijenosna funkcija $G=G(j\omega)$	Amplitudna $A=A(\omega)$, fazna $\varphi=\varphi(\omega)$, realna $U=U(\omega)$ i imaginarna $V=V(\omega)$ frekvencijska karakteristika	Amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika (Nyquistov prikaz)	Logaritamske karakteristike: asimptotska amplitudno-frekvencijska $L=L(\omega)$ i fazna frekvencijska $\varphi=\varphi(\omega)$ (Bodeov prikaz)
proporcionalno-derivativni (idealni) drugog reda $G=K[(1-\omega^2\tau^2)+j\omega 2\zeta\tau]$ $(\zeta=1)$	$A=K\sqrt{1+\omega^2 2\tau^2(2\zeta^2-1)+\omega^4\tau^4}$ $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\omega^2\zeta\tau}{1-\omega^2\tau^2}$; $U=K(1-\omega^2\tau^2)$; $V=K\omega 2\zeta\tau$	 $U(0)=K$; $\omega_1=\frac{1}{\tau}$; $V(\omega_1)=\frac{\omega K 2\zeta}{\tau}$	 $L(0)=20\log K$
proporcionalno-derivativni (idealni) drugog reda $G=K(-\omega^2\tau+j\omega)$	$A=K\omega\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$; $\varphi=90°+\operatorname{arctg}\omega\tau$; $U=-\omega^2 K\tau$; $V=\omega K$	 $\omega_1=\frac{1}{\tau}$; $U(\omega_1)=-\frac{K}{\tau}$; $V(\omega_1)=K\tau$	

AMPLITUDNO-FAZNE FREKVENCIJSKE KARAKTERISTIKE TIPIČNIH DINAMIČKIH ELEMENATA

Tablica 5.

Broj	Prijenosna funkcija	Karakteristika		
		amplitudna	fazna	amplitudno-fazna (Nyquist)
1	K			
2	$\frac{K}{Ts+1}$			
3	$Ts+1$			
4	$\frac{K}{Ts-1}$			
5	$\frac{K}{s}$			
6	s			
7	$Ts-1$			

Tablica 5.

Broj	Prijenosna funkcija	Karakteristika		
		amplitudna	fazna	amplitudno-fazna (Nyquist)
8	$\dfrac{s}{1+Ts}$			
9	$\dfrac{1+Ts}{1+s}$; $T>1$			
10	$\dfrac{1+Ts}{1+s}$; $T<1$			
11	$1+\dfrac{1}{Ts}$			
12	$1+\dfrac{1}{T_i s}+$ $+T_d s$			
13	$\dfrac{1}{s^2}$			
14	$\dfrac{1}{s(1+Ts)}$			

Tablica 5.

Broj	Prijenosna funkcija	Karakteristika		
		amplitudna	fazna	amplitudno-fazna (Nyquist)
15	$\frac{K}{T^2s^2+1}$	A, K, 1/T, ω	φ, 1/T, ω, −90°, −180°	jV, ω=∞, ω=0, U, R=∞, K
16	$\frac{K}{T^2s^2-1}$	A, K, ω	φ, ω, −180°	jV, ω=0, ω=∞, U, −K
17	$\frac{K}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$ $(\xi=1)$	A, K, ω	φ, 1/T, ω, −90°, −180°	ω=∞, jV, ω=0, U
18	$\frac{K}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$ $(0<\xi<1)$	A, K, ω, 1/T	φ, 1/T, ω, −90°, −180°	ω=∞, jV, ω=0, U
19	$T^2s^2+2\xi Ts+1$ $(\xi=1)$	A, 1, ω	180°, φ, 90°, ω, 1/T	jV, ω→∞, 1, U, ω=0
20	$T^2s^2+2\xi Ts+1$ $(0<\xi<1)$	A, 1, ω, 1/T	180°, φ, 90°, ω, 1/T	jV, ω→∞, 1, U, ω=0
21	$\frac{K}{T^2s^2-2\xi Ts-1}$ $(0<\xi<1)$	A, K, ω	φ, ω, −90°, −180°	ω=0, jV, U, −K, ω=∞

Tablica 5.

Broj	Prijenosna funkcija	Karakteristika		
		amplitudna	fazna	amplitudno-fazna (Nyquist)
22	$T^2s^2+2\xi Ts-1$ $(0<\xi<1)$			
23	$\dfrac{K}{T^2s^2-2\xi Ts+1}$ $(0<\xi<1)$			
24	$\dfrac{K}{T^2s^2+2\xi Ts-1}$ $(0<\xi<1)$			
25	T^2s^2+1			
26	T^2s^2-1			
27	$e^{-\tau s}$			
28	$e^{\tau s}$			

LOGARITAMSKE, AMPLITUDNE I FAZNE FREKVENCIJSKE KARAKTERISTIKE TIPIČNIH DINAMIČKIH ELEMENATA

Tablica 6.

Broj	Prijenosna funkcija	Karakteristika	
		amplitudna	fazna
1	K		
2	$\frac{K}{Ts+1}$		
3	$Ts+1$		
4	$\frac{K}{Ts-1}$		
5	$\frac{K}{s}$		
6	s		
7	$Ts-1$		

Tablica 6.

Broj	Prijenosna funkcija	Karakteristika	
		amplitudna	fazna
8	$\frac{s}{1+s}$		
9	$\frac{1+Ts}{1+s}$; $T>1$		
10	$\frac{1+Ts}{1+s}$; $T<1$		
11	$1+\frac{1}{T_i s}$		
12	$1+\frac{1}{T_i s}+T_d s$		
13	$\frac{1}{s^2}$		
14	$\frac{1}{s\,(1+s)}$		

Tablica 6.

Broj	Prijenosna funkcija	Karakteristika	
		amplitudna	fazna
15	$\dfrac{K}{T^2 s^2 + 1}$		
16	$\dfrac{K}{T^2 s^2 - 1}$		
17	$\dfrac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$ $(\xi = 1)$		
18	$\dfrac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$ $(0 < \xi < 1)$		
19	$T^2 s^2 + 2\xi T s + 1$ $(\xi = 1)$		
20	$T^2 s^2 + 2\xi T s + 1$ $(0 < \xi < 1)$		
21	$\dfrac{K}{T^2 s^2 - 2\xi T s - 1}$ gdje $T = \sqrt{T_1 T_2}$; $\xi = 1$		

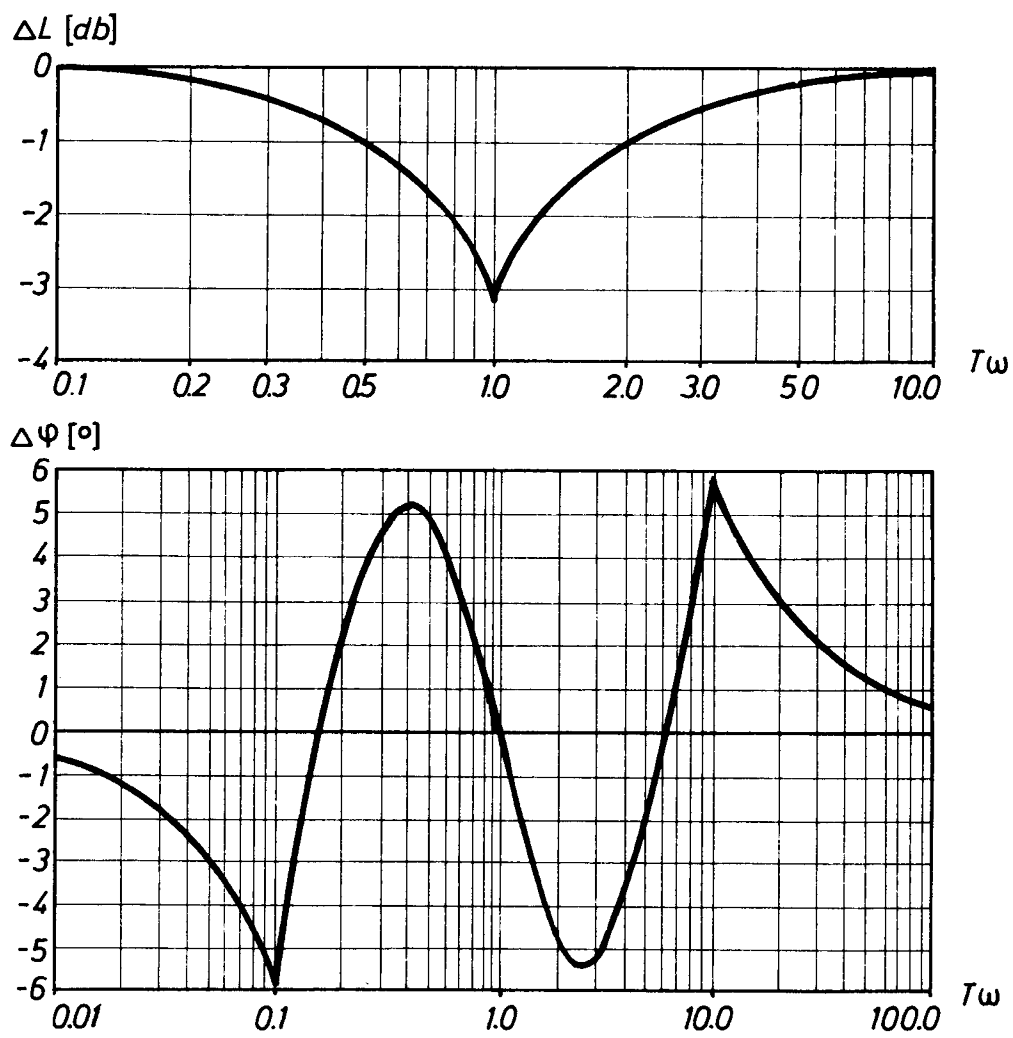
Tablica 6.

Broj	Prijenosna funkcija	Karakteristika	
		amplitudna	fazna
22	$T^2s^2+2\xi Ts-1$ gdje $T=\sqrt{T_1T_2}$; $\xi=1$	L, +1, +2, ω, $1/T_1$, $1/T_2$	φ, 180°, 90°, 0°, ω
23	$\dfrac{K}{T^2s^2-2\xi Ts+1}$ $(0<\xi<1)$	L, 20logK, $20\log\left\|\frac{K}{2\xi}\right\|$, -2, ω	φ, 1/T, ω, 0°, -180°, -270°, -360°
24	$\dfrac{K}{T^2s^2-2\xi Ts-1}$ gdje $T=\sqrt{T_1T_2}$; $\xi=1$	L, 20logK, -1, $1/T_2$, $1/T_1$, -2, ω	φ, ω, 0°, -180°, -270°
25	T^2s^2+1	L, +2, ω, 1/T	φ, 180°, ω, 1/T
26	T^2s^2-1	L, +2, ω, 1/T	φ, 180°, ω
27	$e^{-\tau s}$	L, ω	φ, ω
28	$e^{\tau s}$	L, ω	φ, ω

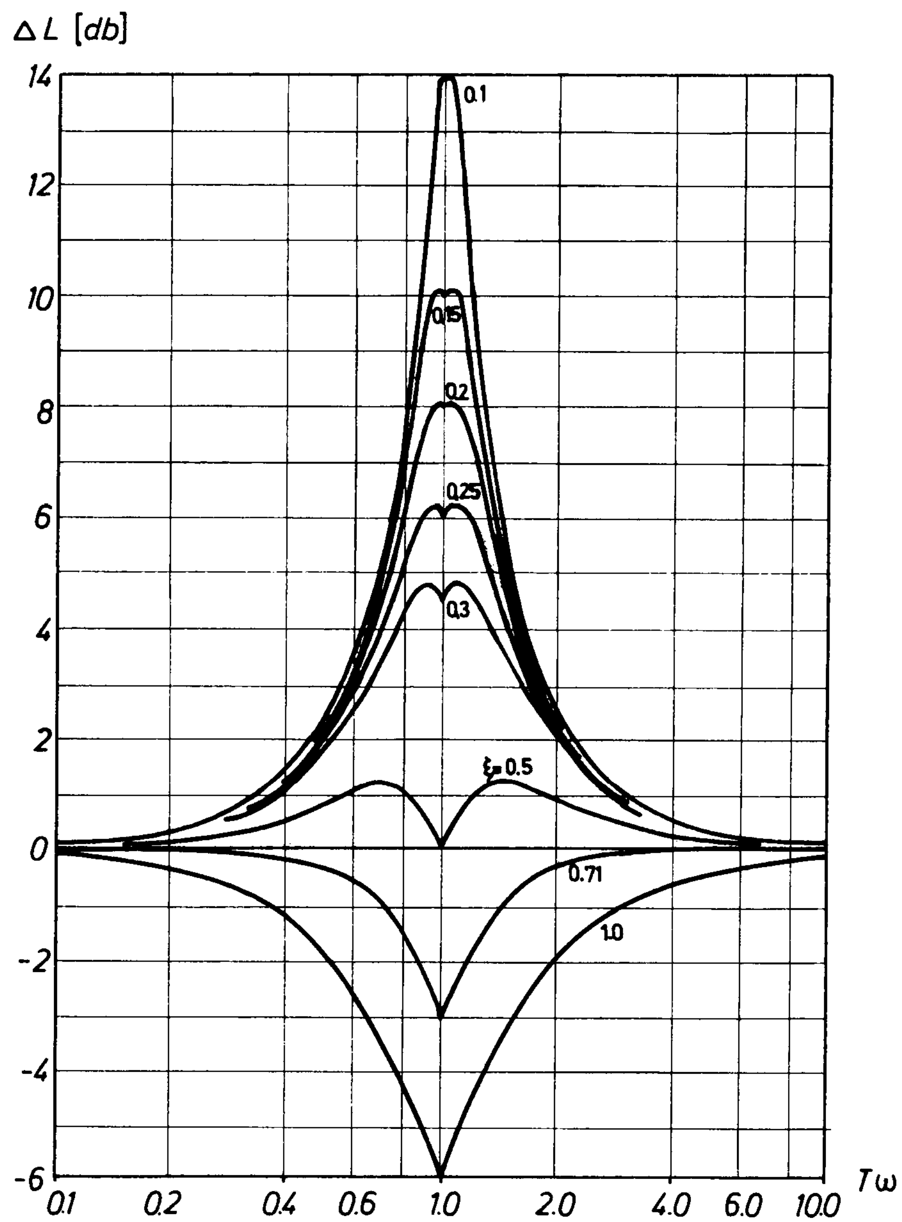
KARAKTERISTIKE SISTEMA S KAŠNJENJEM

Tablica 7.

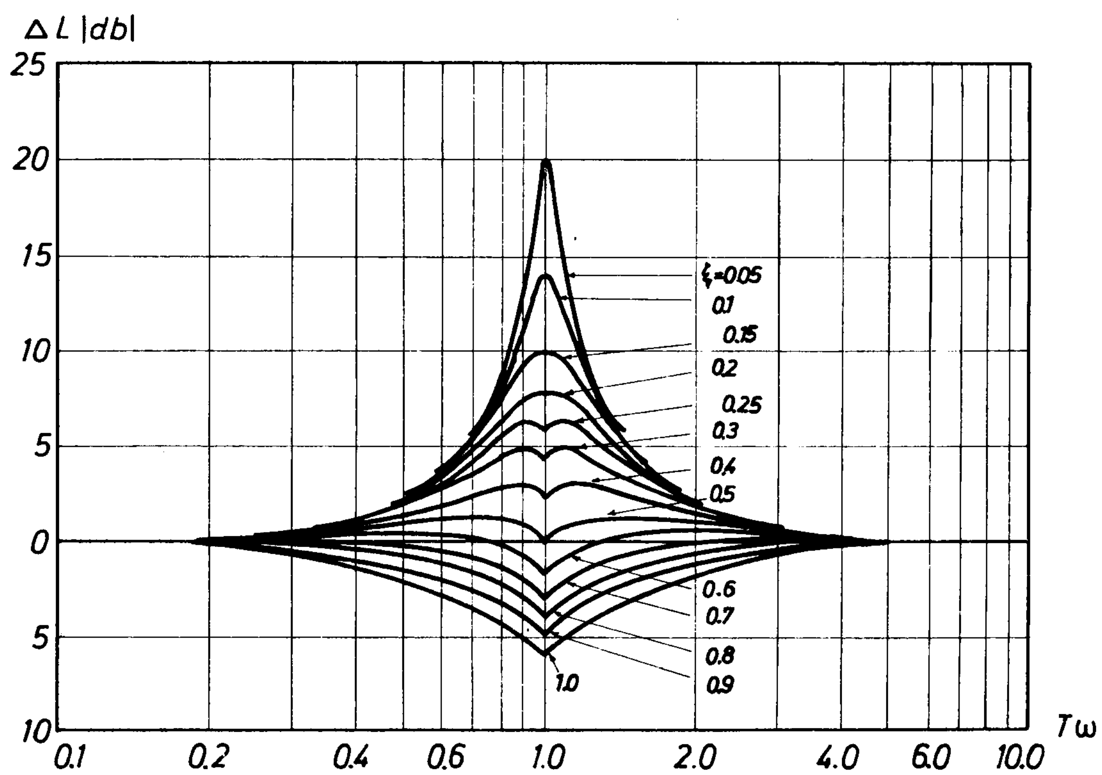
Serijska veza		Serijsko-paralelna veza	Paralelna veza		
U, $e^{-\tau s}$, $\frac{K}{s}$, Y	U, $e^{-\tau s}$, $\frac{K}{Ts+1}$, Y	U, $\frac{K}{s}$, 1, $e^{-\tau s}$, +, -, Y	U, 1, $e^{-\tau s}$, +, -, Y	U, $\frac{K_1}{Ts+1}$, $K_2 e^{-\tau s}$, +, +, Y	Sistem
y, τ, t	y, τ, t	y, τ, t	y, τ, t	y, τ, t	Prijelazna karakteristika
Im, Re	Im, Re	Im, Re	Im, Re	Im, Re	Frekvencijska karakteristika (Nyquist)


ΔL [db]
0
-1
-2
-3
-4
0.1
0.2
0.3
0.5
1.0
2.0
3.0
5.0
10.0
Tω
Δφ [°]
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
0.01
0.1
1.0
10.0
100.0
Tω

Slika 1.

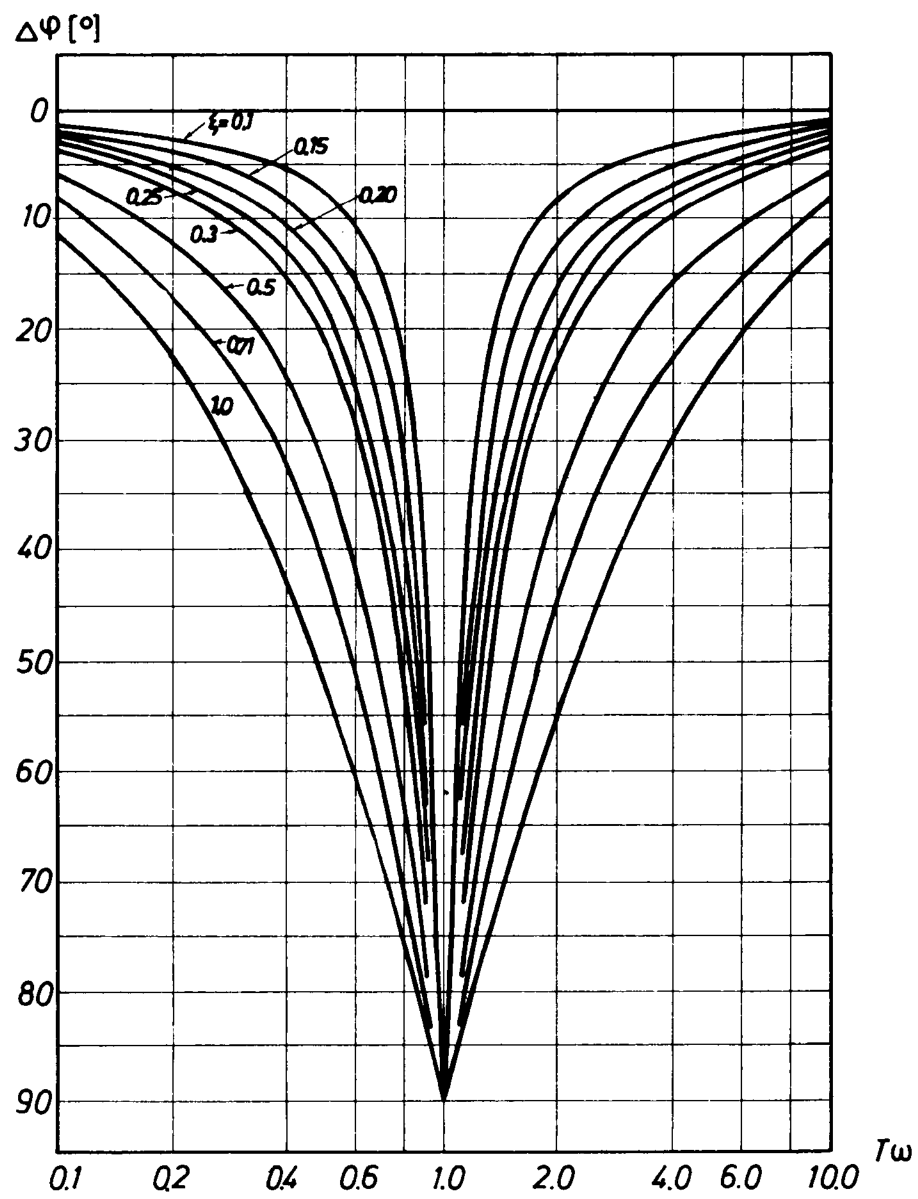


ΔL [db]
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
ξ=0.5
0.71
1.0
0.1 0.2 0.4 0.6 1.0 2.0 4.0 6.0 10.0
Tω



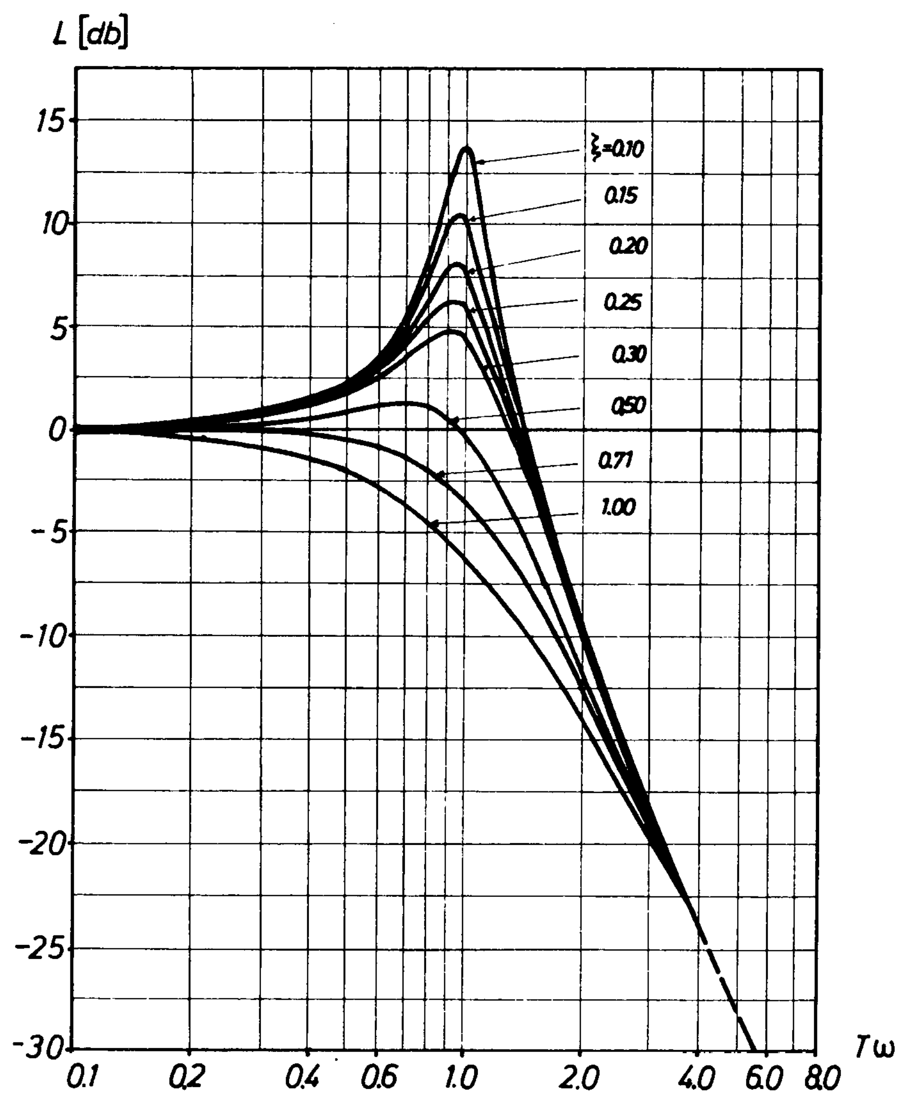
ΔL |db|
25
20
15
10
5
0
5
10
ξ=0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
0.1 0.2 0.4 0.6 1.0 2.0 4.0 6.0 10.0
Tω

Slika 2.

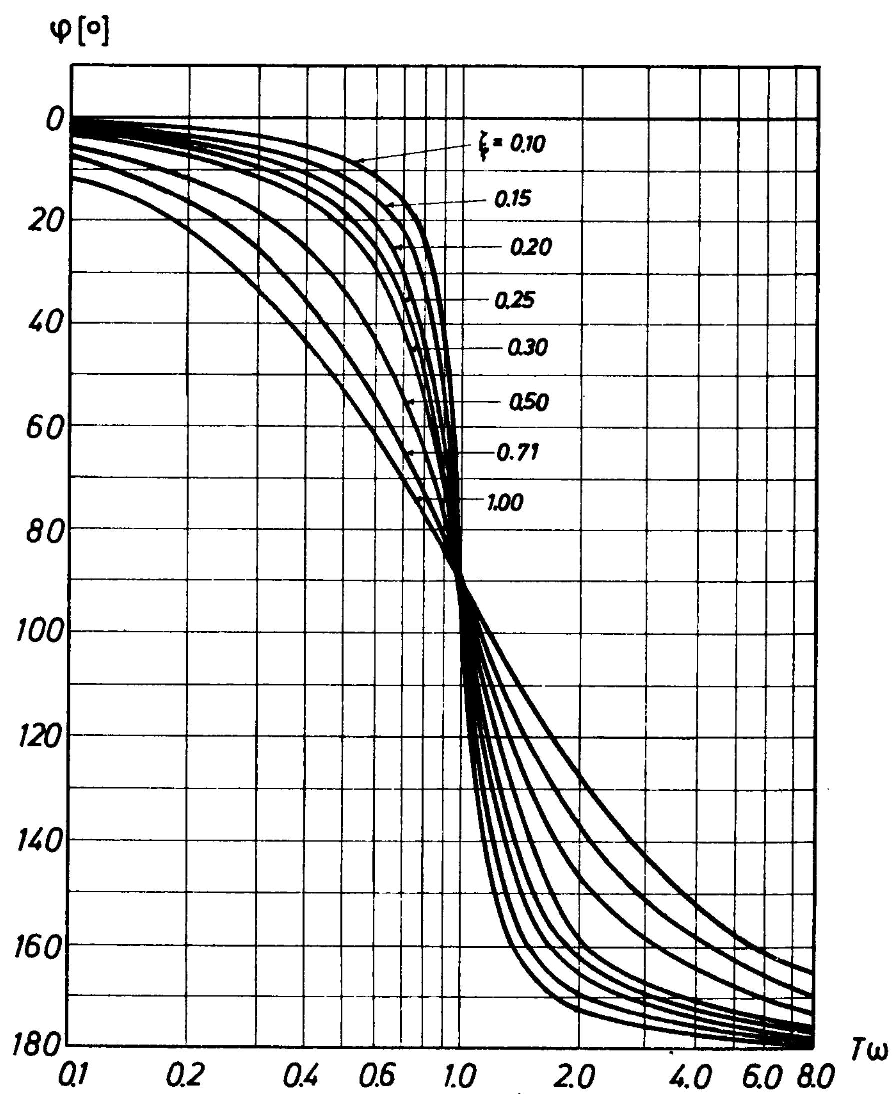


Δφ [°]
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
ξ=0.1
0.15
0.20
0.25
0.3
0.5
0.71
1.0
0.1
0.2
0.4
0.6
1.0
2.0
4.0
6.0
10.0
Tω

Slika 3.


L [db]
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
0.1
0.2
0.4
0.6
1.0
2.0
4.0
6.0
8.0
Tω
ξ=0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0.50
0.71
1.00

Slika 4.


φ [°]
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
ζ = 0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0.50
0.71
1.00
0.1
0.2
0.4
0.6
1.0
2.0
4.0
6.0
8.0
Tω

Slika 5.

MASONOV TEOREM

Često je potrebno iz blok-dijagrama ili grafikona toga signala (GTS) odrediti prijenosnu funkciju sistema. Direktan postupak zahtijevao bi ispisivanje algebarskih jednadžbi koje opisuju dijagram sistema, eliminaciju svih varijabli (signala) osim željenog ulaznog i izlaznog, te iz dobivenog izraza određivanje prijenosne funkcije. Masonov teorem omogućava da se prijenosna funkcija direktno odredi iz blok-dijagrama ili grafikona toka signala. Teorem izražava prijenosnu funkciju preko različitih koeficijenata pojačanja u petljama povratnih veza i paralelnim petljama.

Teorem Masona

Prijenosna funkcija s ulaza U prema izlazu Y sistema ima oblik:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{i^{\Sigma P_i \Delta_i}}{\Delta} \qquad \text{(P4.1)}$$

gdje su:

(a) Δ .... determinanta sistema (konfiguracije s povratnom vezom). Proračunava se pomoću izraza:

$$\Delta = 1 - \Sigma G_j + \Sigma' G_k G_l - \Sigma' G_m G_n G_o + \dots \qquad \text{(P 4.2)}$$

U izrazu (P 4.2) su.

G_j (ili G_k itd.)......... pojačanja odnosno prijenosne funkcije u petljama sistema.

ΣG_j .... označava sumu *svih* pojačanja (prijenosnih funkcija) petlje.

$\Sigma' G_k G_l$ .... suma svih produkata parova različitih pojačanja (prijenosnih funkcija) u petlji; npr. $G_1 G_3$ itd. Crtica uz sumu označava da se koriste produkti parova pojačanja petlji koje se ne dodiruju. $G_1 G_3$ uzima se u obzir samo ako petlja $_1$ ne dodiruje petlju $_3$. Petlje u GTS-u dodiruju se ako imaju barem jedan čvor zajednički. Petlje u blok-dijagramu dodiruju se ako postoji signal koji se javlja u obje petlje;

$\Sigma' G_m G_n G_o$ .... suma svih produkata od tri pojačanja (prijenosnih funkcija) iz petlji koje se ne dodiruju.

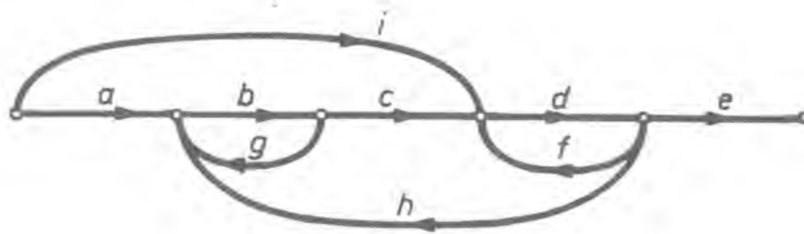
(b) P_i .... direktna prijenosna funkcija s ulaza prema izlazu sistema. P_1 je, na primjer, pojačanje (prijenosna funkcija) jednog puta od U do Y (put ne sadrži petlje). P_2 je pojačanje drugog paralelnog puta (ako takav postoji).

(c) Δ_i .... determinanta sistema Δ, nakon što su se izbacile sve petlje koje dodiruju put P_i.

Budući da izraz (P4.1) ovisi o različitim petljama (paralelne ili povratne veze), te o različitim putevima s ulaza prema izlazu, potrebno je odrediti sve petlje, a zatim i sve direktne puteve. Masonov teorem daje jednostavan i brz postupak za određivanje željene prijenosne funkcije direktno iz GTS-a ili blok-dijagrama. Za sve prijenosne funkcije dobivene iz jednog GTS-a ili blok-dijagrama sistema, Δ je isti (karakteristična jednadžba sistema).

Primjer P4.1

Na slici P4.1. prikazan je GTS sistema kod kojega je potrebno odrediti prijenosnu funkciju Y/U. Grane su označene sa $a, b, \dots, i$.



Slika P4.1.

Prijenosna funkcija određuje se na sljedeći način:

1. Definiraju se sva pojačanja (prijenosne funkcije) petlji. Na sl. P4.1. postoje tri zatvorene petlje (tri različita puta duž kojih je moguće doći do početne točke slijedeći smjer strelica):

$$G_1 = bg; \qquad G_2 = df; \qquad G_3 = bcdh$$

Prema tome je: $\Sigma G_j = bg + df + bcdh$

2. Potrebno je odrediti parove petlji koje se ne dodiruju. G_3 dodiruju G_1 i G_2 (G_3 ima barem jedan zajednički čvor s G_1 i G_2). G_1 i G_2 se ne dodiruje te je:

$$\Sigma' G_k G_l = bgdf$$

3. Ne postoje tri petlje koje se ne dodiruju, te je:

$$\Sigma' G_m G_n G_o = 0$$

4. Determinanta sistema ima oblik (P4.2.):

$$\Delta = 1 - \Sigma G_j + \Sigma' G_k G_l$$

$$= 1 - (bg + df + bcdh) - bgdf$$

5. Potrebno je odrediti sve direktne puteve od U do Y, tj. (P_i):

$$P_1 = abcde$$

$$P_2 = ide$$

Ne postoji druga mogućnost dolaska iz U u Y bez formiranja zatvorene petlje tokom puta.

6. Potrebno je odrediti Δ_i. Put P_1 dodiruje sve petlje (G_1, G_2 i G_3), te se Δ_1 proračunava bez petlji; prema tome je:

$$\Delta_1 = 1$$

Put P_2 dodiruje petlje G_2 i G_3, ali ne i G_1, te je $\Delta_2 = 1 - G_1 = 1 - bg$.

7. Masonov teorem daje:

$$G = \frac{Y}{U} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta}$$

$$= \frac{abcde + ide\,(1 - bg)}{1 - (bg + df + bcdh) + bgdf}$$

Primjer P4.2.

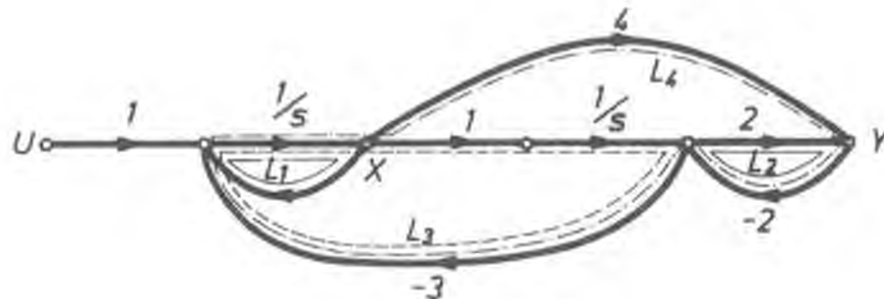
Ako se traži prijenosna funkcija sistema od ulaznog signala do nekog signala unutar sistema X, tada se X treba smatrati odzivom, tako da se pri određivanju Δ i Δ_i moraju uključiti petlje koje započinju na X.

Sa slike P4.2. proizlazi:

$$G_1 = -\frac{2}{s}; \qquad G_2 = -4; \qquad G_3 = -\frac{3}{s^2}; \qquad G_4 = \frac{24}{s}$$

$$\Delta = 1+\frac{2}{s}+4+\frac{3}{s^2}-\frac{24}{s}+\frac{8}{s}=5-\frac{14}{s}+\frac{3}{s^2}$$

$$P_1=\frac{1}{s}; \qquad \Delta_1=1+4=5 \text{ (sve petlje osim } G_2 \text{ dodiruju } P_1)$$

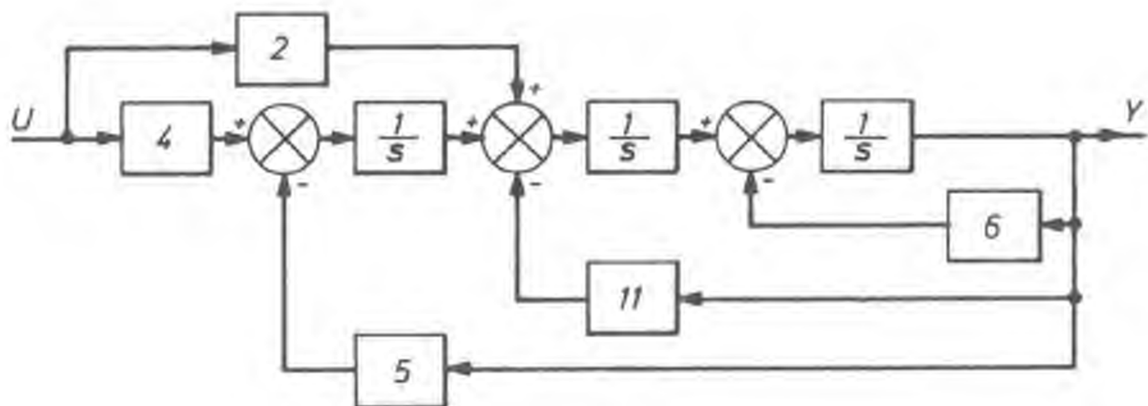


Slika P4.2.

$$G(s)=\frac{X(s)}{U(s)}=\frac{5/s}{5-\frac{14}{s}+\frac{3}{s^2}}=\frac{5s}{5s^2-14s+3}$$

Primjer P4.3.

Kada se koristi blok-dijagram umjesto GTS-a. Masonov teorem se ne mijenja.



Slika P4.3.

Sa slike P4.3. proizlazi:

$$G_1=-\frac{6}{s}; \qquad G_2=-\frac{11}{s^2}; \qquad G_3=-\frac{5}{s^3}$$

U G je potrebno uključiti minus predznak od komparatora.
Sve tri petlje se dodiruju (sve uključuju u sebi signal glavne grane). Dva direktna puta su:

$$P_1=\frac{4}{s^3} \quad \text{i} \quad P_2=\frac{2}{s^2}$$

Kako oba dodiruju sve petlje, to je:

$$\Delta_1=\Delta_2=1$$

Prijenosna funkcija ima oblik:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\frac{4}{s^3}+\frac{2}{s^2}}{1+\frac{6}{s}+\frac{11}{s^2}+\frac{5}{s^3}}=\frac{2s+4}{s^3+6s^2+11s+5}$$

Prijenosna funkcija $G(s)=\frac{X(s)}{U(s)}$, gdje je X izlaz prvog integratora, određuje se kako slijedi:
Δ ovisi samo o petljama (a ne o odabranom izlazu), te je u oba slučaja jednak:

$$\Delta=1+\frac{6}{s}+\frac{11}{s^2}+\frac{5}{s^3}$$

Od U do X postoje dva direktna puta: jedan kroz 4 i $1/s$ i drugi kroz 2, $1/s$, $1/s$, 5, (-1), $1/s$, te je:

$$P_1=\frac{4}{s};\qquad P_2=-\frac{10}{s^3}$$

Pripadne Δ_1 i Δ_2 su:

$$\Delta_1=1-\left(-\frac{6}{s}-\frac{11}{s^2}\right);\qquad \Delta_2=1$$

(Δ uključuje $-11/s^2$ petlju, budući da direktni put od U do X ne dodiruje ovu petlju).
Prijenosna funkcija ima bolik:

$$G(s)=\frac{X(s)}{U(s)}=\frac{\frac{4}{s}\left(1+\frac{6}{s}+\frac{11}{s^2}\right)-\frac{10}{s^3}}{1+\frac{6}{s}+\frac{11}{s^2}+\frac{5}{s^3}}=\frac{4s^2+24s+34}{s^3+6s^2+11s+5}.$$

ALGEBRA SKLOPOVA

Pravila pretvaranja strukturnih shema

Tablica 1.

Broj	P r e t v o r b a		Početna strukturna shema	Ekvivalentna strukturna shema
1	objedinjavanje serijski povezanih elemenata			$G_e = G_1 G_2 \ldots G_n$
2	objedinjavanje paralelno povezanih elemenata			$G_e = G_1 + G_2 + \ldots + G_n$
3	objedinjavanje elementa s elementom u povratnoj vezi			$G_e = \frac{G_1}{1 \mp G_1 G_2}$
4	Prijenos točke odvajanja kroz element	A		$G_K = \frac{1}{G_1}$
		B		$G_K = G_1$

A – u smjeru prijenosa signala; B – protiv smjera prijenosa signala

Tablica 1.

Broj	Pretvorba		Početna strukturna shema	Ekvivalentna strukturna shema
5	prijenos sumatora kroz element	A		$G_K = G_1$
		B		$G_K = \frac{1}{G_1}$
6	promjena mjesta točaka odvajanja			
7	promjena mjesta sumatora			
8	prijenos točke odvajanja kroz sumator	A		
		B		

A – u smjeru prijenosa signala; B – protiv smjera prijenosa signala

Tablica 1.

Broj	Pretvorba		Početna strukturna shema	Ekvivalentna strukturna shema
9	prijenos elementa kroz element			
10	prijenos direktne veze kroz točku odvajanja	A		$G_K = 1 \pm = \frac{G_2}{G_1}$
		A		
		B		$G_K = \frac{G_1}{G_1 \pm G_2}$
		B		

A – u smjeru prijenosa signala; B – protiv smjera prijenosa signala

Tablica 1.

Broj	Pretvorba		Početna strukturna shema	Ekvivalentna strukturna shema
11	prijenos direktne veze kroz sumator	A	u, G1, G2, y1, ±, y	u, G1, G2, y1, ±, y
			u1, u2, G1, G2, ±, y	u1, u2, GK, G1, G2, ±, y; $G_K=\frac{G_1}{G_1 \pm G_2}$
		B	u, G1, G2, y1, ±, y	u, G1, G2, y1, ±, y
			u1, u2, G1, G2, ±, y	u1, u2, GK, G1, G2, ±, y; $G_K=1 \pm \frac{G_2}{G_1}$

A – u smjeru prijenosa signala; B – protiv smjera prijenosa signala

Tablica 1.

Broj	P r e t v o r b a		Početna strukturna shema	Ekvivalentna strukturna shema
12	prijenos direktne veze kroz element	A	u, G_3, G_1, ±, G_2, y	u, G_K, G_1, G_2, ± y $G_K=G_2G_3$
			u, G_3, G_1, G_2, ± y	u, G_1, G_K, G_2, ± y $G_K=\frac{G_3}{G_1}$
		B	u, G_3, G_1, G_2, ± y	u, G_K, G_1, ±, G_2, y $G_K=\frac{G_3}{G_2}$
			u, G_1, G_3, G_2, ± y	u, G_K, G_1, G_2, ± y $G_K=G_1G_3$

A – u smjeru prijenosa signala; B – protiv smjera prijenosa signala

Tablica 1.

Broj	Pretvorba		Početna strukturna shema	Ekvivalentna strukturna shema
13	prijenos povratne veze kroz točku odvajanja	A	u, y, G_1, G_2, ±	u, y, G_1, G_2, ±
			u, x, y, G_1, G_2, ±	u, x, y, G_K, G_1, G_2, ± $G_K=\frac{1}{1\mp G_2G_1}$
		B	u, y, G_1, G_2, ±	u, y, G_1, G_2, ±
			u, u, y, G_1, G_2, ±	u, u, y, G_K, G_1, G_2, ± $G_K=1\mp G_2G_1$

A – u smjeru prijenosa signala; B – protiv smjera prijenosa signala

Tablica 1.

Broj	Pretvorba		Početna strukturna shema	Ekvivalentna strukturna shema
14	prijenos povratne veze kroz sumator	A		$G_K = 1 \mp G_2 G_1$
		A		
		B		$G_K = \frac{1}{1 \mp G_2 G_1}$
		B		

A – u smjeru prijenosa signala; B – protiv smjera prijenosa signala

Tablica 1.

Broj	Pretvorba		Početna strukturna shema	Ekvivalentna strukturna shema
15	prijenos povratne veze kroz element	A		$G_K = \frac{G_3}{G_2}$
				$G_K = G_3 G_1$
		B		$G_K = G_3 G_2$
				$G_K = \frac{G_3}{G_1}$
16	iznošenje elementa iz paralelne veze			$G_K = \frac{G_1 \pm G_2}{G_1 \pm 1}$

A – u smjeru prijenosa signala; B – protiv smjera prijenosa signala

Tablica 1.

Broj	Pretvorba		Početna strukturna shema	Ekvivalentna strukturna shema
17	iznošenje elementa	a) iz glavne grane	u → ⊗ → G_1 → y; povratna veza G_2 (±)	u → G_K → ⊗ → y; povratna veza G_2 → G_K (±); $G_K = G_1$
		b) iz povratne veze	u → ⊗ → G_1 → y; povratna veza G_2 (±)	u → G_{K1} → ⊗ → G_{K2} → G_1 → y; povratna veza (±); $G_{K1} = \frac{1}{G_2}$, $G_{K2} = G_2$
18	prijenos direktne veze na susjedni element	A	u → G_1 → ⊗ → G_2 → y; paralelno G_3 (±)	u → G_1 → G_2 → ⊗ → y; paralelno G_K (±); $G_K = \frac{G_2 G_3}{G_1}$
		B	u → G_1 → G_2 → ⊗ → y; paralelno G_3 (±)	u → G_1 → ⊗ → G_2 → y; paralelno G_K (±); $G_K = \frac{G_1 G_3}{G_2}$

A – u smjeru prijenosa signala; B – protiv smjera prijenosa signala

Tablica 1.

Broj	Pretvorba		Početna strukturna shema	Ekvivalentna strukturna shema
19	prijenos povratne veze na susjedni element	A	u, G1, G2, G3, y, ±	u, G1, G2, GK, y, ± $G_K = \frac{G_3 G_1}{G_2}$
		B	u, G1, G2, G3, y, ±	u, G1, G2, GK, y, ± $G_K = \frac{G_3 G_2}{G_1}$
20	zamjena elemenata unutar zatvorenog kruga		u, G1, G2, y, ±	u, 1/G2, 1/G1, y, ∓
21	unošenje elemenata u paralelni spoj		u, G1, y, ±	$G_K = \frac{G_1 \pm 1}{G_1 \pm G_2}$ u, G2, G1, GK, y, ±

A – u smjeru prijenosa signala; B – protiv smjera prijenosa signala

Tablica 1.

Broj	Pretvorba		Početna strukturna shema	Ekvivalentna strukturna shema
22	unošenje elementa u zatvoreni krug	a) u glavnu granu		$G_K = \frac{1}{G_1}$
		b) u povratnu vezu		$G_{K2} = \frac{1}{G_{K1}}$
23	unošenje elemenata s jediničnom funkcijom			$G_1 = 1$
24	zamjena elementa sa zatvorenim krugom			$G_2 = \frac{1}{G} - \frac{1}{G_1}$

Tablica 1.

Broj	Pretvorba		Početna strukturna shema	Ekvivalentna strukturna shema
25	zamjena elementa sa krugom zatvorenim jediničnom povratnom vezom			$G_1 = \frac{G}{1-G}$
26	zamjena serijskog spoja	a) paralelnim spojem		$G_K = G_1\,(G_2 - 1)$
		b) spojem s povratnom vezom		$G_3 = \frac{1-G_2}{G_1 G_2}$
27	zamjena paralelnog spoja	a) serijskim spojem		$G_K = 1 \pm \frac{G_2}{G_1}$
		b) spojem s povratnom vezom		$G_3 = \frac{-G_2}{G_1\,(G_1 + G_2)}$

Tablica 1.

Broj	P r e t v o r b a		Početna strukturna shema	Ekvivalentna strukturna shema
28	zamjena spoja s povratnom vezom serijskim spojem			$G_K = \frac{1}{1 \mp G G_1}$
29	razdvajanje dviju povezanih kontura	a) s direkt-nim vezama		$G_K = \frac{G_1 G_4}{G_1 + G_2}$
		b) s povrat-nim vezama		$G_K = \frac{G_4}{1 + G_1 G_3}$
		c) s direkt-nim i pov-ratnim ve-zama		

Tablica 1.

Broj	Pretvorba		Početna strukturna shema	Ekvivalentna strukturna shema
30	objedinjavanje mreža iz dviju povezanih kontura	a) s direktnim vezama	u, G_4, G_5, G_1, G_2, G_3, +, +, y	u, G_e, y $G_e = G_1G_2G_3 + G_1G_5 + G_3G_4$
		b) s povratnim vezama	u, G_1, G_2, G_3, G_5, G_4, -, -, y	u, G_e, y $G_e = \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_1G_2G_4 + G_2G_3G_5}$
		c) s direktnim i povratnim vezama	u, G_4, G_1, G_2, G_3, G_5, +, -, y	u, G_e, y $G_e = \frac{(G_1G_2 + G_4)\,G_3}{1 + G_2G_3G_5}$
			u, G_4, G_1, G_2, G_3, G_5, +, -, y	u, G_e, y

STRUKTURNE SHEME I PRIJENOSNE FUNKCIJE OBJEKTA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

Tablica 2.

Ekvivalentna struktura shema

Strukturna shema objekta upravljanja	Prijenosne funkcije ekvivalentnih strukturnih shema
	$G_1 = G_a$; $G_{1f} = G_b G_a + G_c (1 + G_d)$
	$G_1 = G_a (1 + G_d)$; $G_{1f} = G_c + G_b G_a (1 + G_d)$
	$G_1 = G_b G_c + G_a (1 + G_d)$; $G_{1f} = G_c$
	$G_1 = G_a + G_b G_c (1 + G_d)$; $G_{1f} = G_c (1 + G_d)$
	$G_1 = G_a + G_b$; $G_{1f} = G_d + G_c$
	$G_1 = G_a (1 + G_c G_d) + G_b$; $G_{1f} = G_d$

Tablica 2.

Strukturna shema objekta upravljanja	Prijenosne funkcije ekvivalentnih strukturnih shema
	$G_1 = G_a$; $G_{1f} = G_c + G_d (G_b G_a + 1)$
	$G_1 = \dfrac{G_a (1 + G_c G_d)}{1 - G_a G_b G_c G_d}$; $G_{1f} = \dfrac{G_d (1 + G_a G_b)}{1 - G_a G_b G_c G_d}$
	$G_1 = G_a$; $G_{1f} = G_b + G_c (1 + G_d)$
	$G_1 = G_a$; $G_{1f} = G_d G_a + G_b + G_c$
	$G_1 = G_a (1 + G_d)$; $G_{1f} = G_c + G_b (1 + G_d)$
	$G_1 = G_a + G_d (G_b + G_c)$; $G_{1f} = G_b + G_c$
	$G_1 = G_a (1 + G_d) + G_b$; $G_{1f} = G_c$
	$G_1 = G_a + G_b + G_d G_c$; $G_{1f} = G_c$

Tablica 2.

Strukturna shema objekta upravljanja	Prijenosne funkcije ekvivalentnih strukturnih shema
	$G_1 = G_a + G_b(1+G_d)$; $G_{1f} = G_c(1+G_d)$
	$G_1 = G_a + G_b$; $G_{1f} = G_c + G_d(G_a + G_b)$
	$G_1 = G_a$; $G_{1f} = G_c(1 + G_d + G_a G_b)$
	$G_1 = G_a$; $G_{1f} = G_a(G_d + G_b G_c) + G_c$
	$G_1 = G_a(1+G_d)$; $G_{1f} = G_c[1 + G_a G_b(1+G_d)]$
	$G_1 = G_a(1 + G_a G_b) G_c G_d$; $G_{1f} = G_c(1 + G_a G_b)$
	$G_1 = G_a(1 + G_d + G_b G_c)$; $G_{1f} = G_c$
	$G_1 = G_c(G_d + G_a G_b) + G_a$; $G_{1f} = G_c$
	$G_1 = G_a[1 + (1+G_d) G_b G_c]$; $G_{1f} = G_c(1+G_d)$

Tablica 2.

Strukturna shema objekta upravljanja	Prijenosne funkcije ekvivalentnih strukturnih shema
	$G_1 = G_a(1+G_bG_c)$; $G_{1f} = G_c + (1+G_cG_b)\,G_aG_d$
	$G_1 = (G_a+G_c)\,G_b + G_cG_d$; $G_{1f} = G_c\,(G_d+G_b)$
	$G_1 = G_a\,(G_b+G_d)$; $G_{1f} = (G_a+G_c)\,G_d + G_aG_b$
	$G_1 = G_aG_b + G_d\,(1+G_b)$; $G_{1f} = G_cG_d\,(1+G_b)$
	$G_1 = G_a\,(G_b+G_cG_d) + G_d$; $G_{1f} = G_cG_d$
	$G_1 = \frac{G_a\,(G_b+G_cG_d)}{1-G_cG_d}$, $G_{1f} = \frac{G_cG_d\,(1+G_b)}{1-G_cG_d}$
	$G_1 = \frac{G_aG_b}{1-G_aG_bG_c}$ $G_{1f} = \frac{G_b}{1-G_aG_bG_c}$

U tablici 2. prikazane su neke od mogućih strukturnih shema složenih objekata (s jednom regulirajućom veličinom), kao i prijenosne funkcije G_1 i G_{1f} ekvivalentne strukturne sheme koja je prikazana slikom na vrhu tablice.

Kada je predznak izlazne veličine elementa G_i različit od onoga danog tablicom, tada je potrebno u prijenosnim funkcijama G_1 i G_{1f} ekvivalentnih shema promijeniti predznak svih onih članova koji u sebi sadrže element G_i. U slučaju kada u shemi nema nekog G_i, koji inače postoji u tabeli, potrebno je sve članove u prijenosnim funkcijama G_1 i G_{1f}, koji sadrže G_i, izjednačiti s nulom.

PRIJENOSNE FUNKCIJE SAU S UNUTRAŠNJIM POVRATNIM VEZAMA

$G_i = G_i(s)$ – prijenosna funkcija dijela sistema
$G_{oi} = G_{oi}(s)$ – prijenosna funkcija unutrašnje povratne veze
$G_p = G_p(s)$ – prijenosna funkcija glavne povratne veze

Tablica 3.

Strukturna shema sistema	Prijenosne funkcije sistema: $G = G(s)$ – otvorenog $G_u = G_u(s)$ – obzirom na vodeći signal $G_{fi} = G_{fi}(s)$ – obzirom na poremećaj $f_i = f_i(t)$
u e G2 f G1 y ± Go1 – Gs	$G = \frac{G_s G_1 G_2}{1 \mp G_{01} G_1}$; $G_u = \frac{G_1 G_2}{G_s}$; $G_f = \frac{G_1}{G_s}$, gdje $G_s = 1 \mp G_{01} G_1 + G_s G_1 G_2$
u e G3 f2 G2 f1 G1 y ± Go1 – Gs	$G = \frac{G_s G_1 G_2 G_3}{1 \mp G_{01} G_1 G_2}$; $G_u = \frac{G_1 G_2 G_3}{G_s}$; $G_{f1} = \frac{G_1}{G_s}$; $f_2 = \frac{G_1 G_2}{G_s}$, gdje $G_s = 1 \mp G_{01} G_1 G_2 + G_s G_1 G_2 G_3$
u e G3 f2 G2 f1 G1 y ± Go1 – Gs	$G = \frac{G_s G_1 G_2 G_3}{1 \mp G_{01} G_2}$; $G_u = \frac{G_1 G_2 G_3}{G_s}$; $G_{f1} = \frac{G_1}{G_s}$; $G_{f2} = \frac{G_1 G_2}{G_s}$, gdje $G_s = 1 \mp G_{01} G_2 + G_s G_1 G_2 G_3$
u e G3 f2 G2 f1 G1 y ± Go1 – Gs	$G = \frac{G_s G_1 G_2 G_3}{1 \mp G_{01} G_2}$; $G_u = \frac{G_1 G_2 G_3}{G_s}$; $G_{f1} = \frac{G_1 (1 \mp G_{01} G_2)}{G_s}$; $G_{f2} = \frac{G_1 G_2}{G_s}$, gdje $G_s = 1 \mp G_{01} G_2 + G_s G_1 G_2 G_3$

Tablica 3.

Strukturna shema sistema	Prijenosne funkcije sistema: $G = G(s)$ – otvorenog $G_u = G_u(s)$ – obzirom na vodeći signal $G_{fi} = G_{fi}(s)$ – obzirom na poremećaj $f_i = f_i(t)$
	$G = \dfrac{G_s G_1 G_2 G_3}{1 \mp G_{01} G_3}$; $G_u = \dfrac{G_1 G_2 G_3}{G_s}$; $G_{f1} = \dfrac{G_1 (1 \mp G_{01} G_3)}{G_s}$; $G_{f2} = \dfrac{G_1 G_2}{G_s}$, gdje $G_s = 1 \mp G_{01} G_3 + G_s G_1 G_2 G_3$
	$G = \dfrac{G_s G_1 G_2}{1 \mp G_{01} G_2}$; $G_u = \dfrac{G_1 G_2}{G_s}$; $G_f = \dfrac{G_1 (1 \mp G_{01} G_2)}{G_s}$, gdje $G_s = 1 \mp G_{01} G_2 + G_s G_1 G_2$
	$G = \dfrac{G_s G_1 G_2 G_3}{1 \mp G_{01} G_{02} G_1 G_2}$; $G_u = \dfrac{G_1 G_2 G_3}{G_s}$; $G_f = \dfrac{\pm G_{01} G_1 G_2}{G_s}$, gdje $G_s = 1 \mp G_{01} G_{02} G_1 G_2 +$ $+ G_s G_1 G_2 G_3$
	$G = \dfrac{G_s G_1 G_2 (G_3 + G_4)}{1 \mp G_{01} G_1 G_2 G_3}$; $G_u = \dfrac{G_1 G_2 (G_3 + G_4)}{G_s}$; $G_f = \dfrac{G_1}{G_s}$, gdje $G_s = 1 \mp G_{01} G_1 G_2 G_3 +$ $+ G_s G_1 G_2 (G_3 + G_4)$
	$G = \dfrac{G_s G_1 G_2 G_3}{1 \mp G_{01} G_1 \mp G_{02} G_1 G_2}$; $G_u = \dfrac{G_1 G_2 G_3}{G_s}$; $G_{f1} = \dfrac{G_1}{G_s}$; $G_{f2} = \dfrac{G_1 G_2}{G_s}$, gdje $G_s = 1 \mp G_{01} G_1 \mp G_{02} G_1 G_2 +$ $+ G_s G_1 G_2 G_3$

Strukturna shema sistema	Prijenosne funkcije sistema: $G = G(s)$ – otvorenog; $G_u = G_u(s)$ – obzirom na vodeći signal; $G_{fi} = G_{fi}(s)$ – obzirom na poremećaj $f_i = f_i(t)$
	$G = \frac{G_s G_1 G_2 G_3}{1 \mp G_{01} G_1 \mp G_{02} G_2}$; $G_u = \frac{G_1 G_2 G_3}{G_s}$; $G_{f1} = \frac{G_1}{G_s}$; $G_{f2} = \frac{G_1 G_2}{G_s}$, gdje $G_s = 1 \mp G_{01} G_1 \mp G_{02} G_2 + G_s G_1 G_2 G_3$
	$G = \frac{G_s G_1 G_2 G_3}{1 \mp G_{01} G_1 G_2 \mp G_{02} G_2}$; $G_u = \frac{G_1 G_2 G_3}{G_s}$; $G_{f1} = \frac{G_1}{G_s}$; $G_{f2} = \frac{G_1 G_2}{G_s}$, gdje $G_s = 1 \mp G_{01} G_1 G_2 \mp G_{02} G_2 + G_s G_1 G_2 G_3$
	$G = \frac{G_s G_1 G_2 G_3}{1 \mp G_{01} G_1 G_2 \mp G_{02} G_2}$; $G_u = \frac{G_1 G_2 G_3}{G_s}$; $G_{f1} = \frac{G_1 (1 \mp G_{02} G_2)}{G_s}$; $G_{f2} = \frac{G_1 G_2}{G_s}$, gdje $G_s = 1 \mp G_{01} G_1 G_2 \mp G_{02} G_2 + G_s G_1 G_2 G_3$
	$G = \frac{G_s G_1 G_2 G_3}{1 \mp (G_{01} + G_{02}) G_2}$; $G_u = \frac{G_1 G_2 G_3}{G_s}$; $G_{f1} = \frac{G_1 (1 \mp G_{02} G_2)}{G_s}$; $G_{f2} = \frac{G_1 G_2}{G_s}$, gdje $G_s = 1 \mp (G_{01} + G_{02}) G_2 + G_s G_1 G_2 G_3$
	$G = \frac{G_s G_1 G_2 G_3}{1 \mp G_{01} G_2 \mp G_{02} G_3}$; $G_u = \frac{G_1 G_2 G_3}{G_s}$; $G_{f1} = \frac{G_1 (1 \mp G_{02} G_3)}{G_s}$; $G_{f2} = \frac{G_1 G_2}{G}$, gdje $G_s = 1 \mp G_{01} G_2 \mp G_{02} G_3 + G_s G_1 G_2 G_3$

Tablica 3.

Strukturna shema sistema	Prijenosne funkcije sistema: $G = G(s)$ – otvorenog $G_u = G_u(s)$ – obzirom na vodeći signal $G_{fi} = G_{fi}(s)$ – obzirom na poremećaj $f_i = f_i(t)$
	$G = \frac{G_s G_1 G_2 G_3}{1 \mp G_{01} G_2 \mp G_{02} G_3}$; $G_u = \frac{G_1 G_2 G_3}{G_s}$; $G_{f1} = \frac{G_1 (1 \mp G_{01} G_2 \mp G_{02} G_3)}{G_s}$; $G_{f2} = \frac{G_1 G_2}{G_s}$, gdje je $G_s = 1 \mp G_{01} G_2 \mp G_{02} G_3 + G_s G_1 G_2 G_3$
	$G = \frac{G_s G_1 G_2 G_3}{1 \mp (G_{01} + G_{02}) G_3}$; $G_u = \frac{G_1 G_2 G_3}{G_s}$; $G_{f1} = \frac{G_1 [1 \mp (G_{01} + G_{02}) G_3]}{G_s}$; $G_{f2} = \frac{G_1 G_2 (1 \mp G_{02} G_3)}{G_s}$, gdje je $G_s = 1 \mp (G_{01} + G_{02}) G_3 + G_s G_1 G_2 G_3$
	$G = \frac{G_s G_1 G_2 G_3}{1 \mp G_{03} G_2 \mp G_{02} G_{01} G_1 G_2}$; $G_u = \frac{G_1 G_2 G_3}{G_s}$; $G_f = \frac{\pm G_{02} G_1 G_2}{G_s}$; gdje $G_s = 1 \mp G_{03} G_2 \mp G_{02} G_{01} G_1 G_2 + G_s G_1 G_2 G_3$
	$G = \frac{G_s G_1 G_2 (G_3 + G_4)}{1 \mp G_{02} G_2 \mp G_{01} G_1 G_2 G_3}$; $G_u = \frac{G_1 G_2 (G_3 + G_4)}{G_s}$; $G_f = \frac{G_1}{G}$, gdje $G_s = 1 \mp G_{02} G_2 \mp G_{01} G_1 G_2 G_3 + G_s G_1 G_2 (G_3 + G_4)$

Tablica 3.

Strukturna shema sistema	Prijenosne funkcije sistema: $G\ = G(s)$ – otvorenog $G_u = G_u(s)$ – obzirom na vodeći signal $G_{fi} = G_{fi}(s)$ – obzirom na poremećaj $f_i = f_i(t)$
	$G = \dfrac{G_s G_1 G_2 (G_3 + G_4)}{1 \mp G_{01} G_1 \mp G_{02} G_2 G_3}$, $G_u = \dfrac{G_1 G_2 (G_3 + G_4)}{G_s}$; $G_f = \dfrac{G_1}{G_s}$, gdje $G_s = 1 \mp G_{01} G_1 \mp G_{02} G_2 G_3 + G_s G_1 G_2 (G_3 + G_4)$
	$G = \dfrac{G_s G_1 G_2 (G_3 + G_4)}{1 \mp G_{01} G_2 \mp G_{02} G_2 G_3}$; $G_u = \dfrac{G_1 G_2 (G_3 + G_4)}{G_s}$; $G_f = \dfrac{G_1 (1 \mp G_{02} G_2 G_3)}{G_s}$, gdje $G_s = 1 \mp G_{01} G_2 \mp G_{02} G_2 G_3 + G_s G_1 G_2 (G_3 + G_4)$
	$G = \dfrac{G_s G_1 G_2 (G_3 + G_4)}{1 \mp G_{01} G_2 \mp G_{02} G_3}$; $G_u = \dfrac{G_1 G_2 (G_3 + G_4)}{G_s}$; $G_f = \dfrac{G_1 (1 \mp G_{01} G_2 \mp G_{02} G_3)}{G_s}$, gdje $G_s = 1 \mp G_{01} G_2 \mp G_{02} G_3 + G_s G_1 G_2 (G_3 + G_4)$
	$G = \dfrac{G_s G_1 G_2 (G_3 + G_4)}{1 \mp G_{01} G_2 \mp G_{02} (G_3 + G_4)}$; $G_u = \dfrac{G_1 G_2 (G_3 + G_4)}{G_s}$; $G_f = \dfrac{G_1 [1 \mp G_{01} G_2 \mp G_{02} (G_3 + G_4)]}{G_s}$, $G_s = 1 \mp G_{01} G_2 \mp G_{02} (G_3 + G_4) + G_s G_1 G_2 (G_3 + G_4)$

Tablica 3.

Strukturna shema sistema	Prijenosne funkcije sistema: $G\ = G(s)$ – otvorenog $G_u = G_u(s)$ – obzirom na vodeći signal $G_{fi} = G_{fi}(s)$ – obzirom na poremećaj $f_i = f_i(t)$
	$G = \dfrac{G_sG_1G_2G_3G_4}{1 \mp G_{01}G_1 \mp G_{02}G_1G_2 \mp G_{03}G_1G_2G_3}$; $G_u = \dfrac{G_1G_2G_3G_4}{G_s}$; $G_{f1} = \dfrac{G_1}{G}$; $G_{f2} = \dfrac{G_1G_2}{G_s}$, gdje $G_s = 1 \mp G_{01}G_1 \mp G_{02}G_1G_2 \mp G_{03}G_1G_2G_3 + G_sG_1G_2G_3G_4$
	$G = \dfrac{G_sG_1G_2G_3G_4}{1 \mp G_{01}G_1 \mp G_{02}G_2 \mp G_{03}G_3(1 \mp G_{01}G_1)}$; $G_u = \dfrac{G_1G_2G_3G_4}{G_s}$; $G_{f1} = \dfrac{G_1(1 \mp G_{03}G_3)}{G_s}$, $G_{f2} = \dfrac{G_1G_2}{G_s}$, gdje $G_s = Y \mp G_{01}G_1 \mp G_{02}G_2 \mp G_{03}G_3(1 \mp G_{01}G_1) + G_sG_1G_2G_3G_4$
	$G = \dfrac{G_sG_1G_2G_3G_4}{1 \mp G_{01}G_1 \mp G_{02}G_2 \mp G_{03}G_2G_3}$; $G_u = \dfrac{G_1G_2G_3G_4}{G_s}$; $G_{f1} = \dfrac{G_1}{G_s}$; $G_{f2} = \dfrac{G_1G_2}{G_s}$, $G_s = 1 \mp G_{01}G_1 \mp G_{02}G_2 \mp G_{03}G_2G_3 + G_sG_1G_2G_3G_4$

Tablica 3.

Strukturna shema sistema	Prijenosne funkcije sistema: $G = G(s)$ – otvorenog; $G_u = G_u(s)$ – obzirom na vodeći signal; $G_{fi} = G_{fi}(s)$ – obzirom na poremećaj $f_i = f_i(t)$
	$G = \dfrac{G_s G_1 G_2 G_3 G_4}{1 \mp G_{01}G_1 \mp G_{02}G_1G_2 \mp G_{03}G_2G_3(1 \mp G_{01}G_1)}$; $G_u = \dfrac{G_1G_2G_3G_4}{G_s}$; $G_{f1} = \dfrac{G(1 \mp G_{03}G_2G_3)}{G_s}$; $G_{f2} = \dfrac{G_1G_2}{G_s}$, gdje $G_s = 1 \mp G_{01}G_1 \mp G_{02}G_1G_2 \mp G_{03}G_2G_3(1 \mp G_{01}G_1) + G_sG_1G_2G_3G_4$
	$G = \dfrac{G_sG_1G_2G_3G_4}{(1 \mp G_{01}G_1)(1 \mp G_{02}G_2)(1 \mp G_{03}G_3)}$; $G_u = \dfrac{G_1G_2G_3G_4}{G_s}$, $G_{f2} = \dfrac{G_1G_2(1 \mp G_{03}G_3)}{G_s}$; $G_f = \dfrac{G_1(1 \mp G_{02}G_2)(1 \mp G_{03}G_3)}{G_s}$, gdje $G_s = (1 \mp G_{01}G_1)(1 \mp G_{02}G_2)(1 \mp G_{03}G_3) + G_s G_1G_2G_3G_4$

U većini slučajeva strukturne sheme sistema automatskog upravljanja sadrže unutrašnje povratne veze unutar regulatora ili od objekta upravljanja prema regulatoru. Pri tome se susreću i paralelne veze u regulatoru. Sve takve sheme prema tome su mnogokonturne. U tablici 3. dane su neke mnogokonturne strukturne sheme i prijenosne funkcije ovih sistema automatskog upravljanja. U slučaju kada se strukturna shema razlikuje od one prikazane u tablici bilo po predznaku izlazne veličine elementa G_i, bilo po nepostojanju elementa G_i, postupa se na isti način kao i u slučaju tablice 2.

RASTAVLJANJE POLINOMA S REALNIM KOEFICIJENTIMA NA FAKTORE

Za proračun prijelaznih karakteristika sistema automatskog upravljanja i crtanje logaritamskih frekvencijskih karakteristika, potrebno je rastaviti polinome od s na elementarne faktore linearnog oblika $1+T_i s$ ili kvadratnog oblika $T_i^2 s^2 + 2\xi T_i s + 1$, $\xi < 1$, odnosno odrediti korijene polinoma. Korijene polinoma drugog, trećeg i četvrtog reda moguće je odrediti iz formula L[2].

Za *polinom drugog reda*:

$$A(s) = as^2 + bs + c \tag{P5.1}$$

korijeni su:

$$\frac{1}{T_{1,2}} = s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{P5.2}$$

Za *polinom trećeg reda*:

$$A(s) = s^3 + as^2 + bs + c \tag{P5.3}$$

potrebno je odrediti:

$$d = \frac{3b - a^2}{9} \tag{P5.4}$$

$$e = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{54} \tag{P5.5}$$

$$f = \sqrt{e^2 + d^2} \tag{P5.6}$$

U slučaju kada je f *realan broj* proizlazi:

$$g = \sqrt[3]{f - e} \tag{P5.7}$$

$$h = \sqrt[3]{-f - e} \tag{P5.8}$$

Korijeni su:

$$\frac{1}{T_1} = s_1 = g + h - \frac{a}{3} \tag{P5.9}$$

$$\frac{1}{T_2} = s_2 = \frac{-(g+h) + (g-h)\sqrt{-3}}{2} - \frac{a}{3} \tag{P5.10}$$

$$\frac{1}{T_3} = s_3 = \frac{-(g+h) - (g-h)\sqrt{-3}}{2} - \frac{a}{3} \tag{P5.11}$$

Ako je f *imaginaran broj* korijeni su realni i različiti. U tom slučaju potrebno je odrediti Φ, gdje je:

$$\cos\Phi = \frac{e}{\sqrt{-d^3}} \tag{P5.12}$$

Korijeni su:

$$\frac{1}{T_1} = s_1 = \mp 2\sqrt{-d}\cos\frac{\Phi}{3} - \frac{a}{3} \tag{P5.13}$$

$$\frac{1}{T_2} = s_2 = \mp 2\sqrt{-d}\cos\left(\frac{\Phi}{3} + 120°\right) - \frac{a}{3} \tag{P5.14}$$

$$\frac{1}{T_3} = s_3 = \mp 2\sqrt{-d}\cos\left(\frac{\Phi}{3} + 240°\right) - \frac{a}{3} \tag{P5.15}$$

Korijene polinoma višeg reda moguće je odrediti približno. Radi toga razvijene su različite metode L[5, 6]. Neke od metoda su specifične, jer su razvijene za upotrebu pri analizi sistema automatskog upravljanja. One osiguravaju dovoljnu točnost za inženjersku praksu, a prikladne su za korištenje na digitalnom računalu. Grafoanalitičke metode L [3, 4] omogućavaju vrlo jednostavno nalaženje korijena, međutim, zbog mogućih grešaka koriste se samo za orijentacijsko određivanje korijena polinoma.

Metoda S. Lina

Ova metoda L[4, 5] omogućava da se vrlo jednostavno i točno odrede realni i kompleksni korijeni polinoma reda $n \geq 3$. Polinomi se većinom rastavljaju na kvadratne faktore uz ograničenje da njihove prirodne frekvencije budu međusobno udaljene nekoliko oktava.

Za polinom oblika:

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-2} s^2 + a_{n-1} s + 1 \tag{P5.16}$$

traži se kvadratni faktor oblika:

$$b_0 s^2 + b_1 s + 1 \tag{P5.17}$$

Kao prvo približenje za koeficijente kvadratnog polinoma (P5.17) može se postaviti:

$$b_{01} = \frac{a_0}{a_2}; \qquad b_{11} = \frac{a_1}{a_2} \tag{P5.18}$$

Dijeljenjem polinoma (P5.16) s polinomom (P5.17) u kojem su koeficijenti zamijenjeni njihovom prvom (drugi indeks 1) procjenom dobit će se:

$$(1 + a_{n-1} s + \ldots + a_1 s^{n-1} + a_0 s^n) : (1 + b_{11} s + b_{01} s^2) =$$
$$= 1 + r_{n-3} s + \ldots + r_0 s^{n-2} \tag{P5.19}$$

. . . .

Ostatak dijeljenja je:

$$\begin{matrix} r_0 s^{n-2} \pm (a_1 - r_1 b_{01}) s^{n-1} + a_0 s^n \\ r_0 s^{n-2} \pm r_0 b_{11} s^{n-1} \pm r_0 b_{01} s^n \end{matrix} \tag{P5.20}$$

$$(a_1 - r_1 b_{01} - r_0 b_{11}) s^{n-1} + (a_0 - r_0 b_{01}) s^n$$

Ako je koeficijent ostatka $(a_1 - r_1 b_{01} - r_0 b_{11})$ zanemarivo mali prema a_1, a $(a_0 - r_0 b_{01})$ zanemarivo mali prema a_0, tada se za koeficijente b_0 i b_1 mogu uzeti njihove prve procjene b_{01} i b_{11}. Ako koeficijenti ostatka nisu zanemarivi, tada se mora odrediti druga procjena koeficijenata polinoma (P5.17):

$$b_{02} = \frac{a_0}{r_0}; \qquad b_{12} = \frac{a_1 - r_1 b_{01}}{r_0} \tag{P5.21}$$

gdje su: r_0 i r_1 koeficijenti starijih članova polinoma (P5.19).

Polinom (P5.16) dijeli se s polinomom $1 + b_{12} s + b_{02} s^2$ i ispituju koeficijenti ostatka $(a_1 - r_1 b_{02} - r_0 b_{12})$ i $(a_0 - r_0 b_{02})$ u odnosu na a_1 i a_0. Postupak se ponavlja sve dok koeficijent ostatka $a_1 - r_1 b_{01}{}^i - r_0 b_{1i}$ ne postane zanemarivo mali prema a_1, a $a_0 - r_0 b_{0i}$ zanemarivo mali prema a, (i je i-ta procjena) uz $i \geq 2$. Tada vrijedi:

$$b_0 = b_{0i}; \qquad b_1 = b_{1i} \tag{P5.22}$$

Polinom (P5.16) sada ima oblik:

$$A(s) = (b_0 s^2 + b_1 s + 1)(r_0 s^{n-2} + \ldots + r_{n-3} s + 1) \tag{P5.23}$$

uz $n - 2 > 2$.

Svaki kvadratni polinom oblika (P5.17) potrebno je rastaviti (ako je moguće) na linearne polinome:

uz $b_1 > 2\sqrt{b_0}$

$$\left.\begin{aligned} b_0 s^2 + b_1 s + 1 &= (1+T_1 s)(1+T_2 s) \\ T_{1,2} &= \frac{b_1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{4b_0}{b_1^2}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{P5.24}$$

gdje je:

uz $b_1 = 2\sqrt{b_0}$

$$\left.\begin{aligned} b_0 s^2 + b_1 s + 1 &= (1+Ts)^2 \\ T &= \frac{b_1}{2} = \sqrt{b_0} \end{aligned}\right\} \tag{P5.25}$$

gdje je:

uz $b_1 < 2\sqrt{b_0}$

$$\left.\begin{aligned} b_0 s^2 + b_1 s + 1 &= T^2 s^2 + 2\xi T s + 1 \\ T = \sqrt{b_0}; &\quad \xi = \frac{b_1}{2\sqrt{b_0}} \end{aligned}\right\} \tag{P5.26}$$

gdje je:

Izloženi postupak određivanja koeficijenata b_0 i b_1 konvergira samo uz uvjet da su dva (po modulu starija) korijena polinoma (P5.16) realna ili konjugirano-kompleksna. Ako ovaj uvjet nije zadovoljen i postupak divergira, tada je potrebno iz polinoma (P5.16) izvući član

$$cs + 1 \tag{P5.27}$$

u prvom približenju (procjeni) postaviti da vrijedi:

$$c_1 = \frac{a_0}{a_1} \tag{P5.28}$$

i postupak nalaženja koeficijenta c ostvariti na isti način kao što je to bilo za kvadratni faktor.

Iz izloženog moguće je sastaviti iteracijske formule za određivanje koeficijenata b_0 i b_1 kvadratnog faktora (P5.17) ili koeficijenta c linearnog faktora (P5.27). Ove formule znatno pojednostavnjuju proračun, budući da isključuju potrebu dijeljenja polinoma. Za polinome trećeg, četvrtog, petog i šestog reda dane su ove formule u dvije varijante. Prva varijanta koristi se kada su dva po modulu starija korijena realna ili konjugirano-kompleksna, a druga se varijanta koristi u slučaju kada taj uvjet nije ispunjen. Položaj korijena u pravilu je u početku nepoznat, pa se proračun može započeti s bilo kojom od ovih varijanti. Ako postupak određivanja korijena divergira, potrebno je prijeći na drugu varijantu. Prikladno je rezultate proračuna zapisivati u tablicu.

Polinom trećeg reda

$$A(s) = a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + 1 \tag{P5.29}$$

I varijanta

Iteracijske formule:

$$\left.\begin{aligned} &b_{01} = \frac{a_0}{a_2}; \quad b_{11} = \frac{a_1}{a_2} \\ &r_i = a_2 - b_{1,i-1}; \quad s_i = a_1 - b_{0,i-1}; \quad b_{0i} = \frac{a_0}{r_i} \\ &b_{1i} = \frac{s_i}{r_i} \\ &i = 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{P5.30}$$

Rastavljeni polinom ima oblik:

$$A(s)=(b_0s^2+b_1s+1)(rs+1) \tag{P5.31}$$

II varijanta

Iteracijske formule:

$$\left.\begin{array}{c} c_1=\dfrac{a_0}{a_1} \\ q_{1i}=a_2-c_{i-1}; \qquad q_{0i}=a_1-q_{1i}c_{i-1}; \qquad c_i=\dfrac{a_0}{q_{0i}} \\ i=2,3,\ldots \end{array}\right\} \tag{P5.32}$$

Rastavljeni polinom ima oblik:

$$A(s)=(cs+1)(q_0s^2+q_1s+1) \tag{P5.33}$$

Primjer P5.1.

Rastaviti na elementarne faktore polinom:

$$A(s)=5s^3+6s^2+6s+1$$

Koristeći se I varijantom formula – izrazi (P5.30), rezultati su dani u tabeli:

Broj približenja (i)	r_i	s_i	b_{0i}	b_{1i}
1	–	–	0,833	1,000
2	5,000	5,167	1,000	1,003
3	4,967	5,000	1,007	1,007
4	4,993	4,993	1,001	1,000

Može se postaviti da je: $b_0=b_1=1$ i $r=6-1=5$, te je prema (P5.31):

$$A(s)=(s^2+s+1)(5s+1)=(T_1^2s^2+2\xi T_1s+1)(T_2s+1)$$

gdje su:

$T_1=1[s]$
$\xi=0,5$
$T_2=5[s]$

Polinom četvrtog reda

$$A(s)=a_0s^4+a_1s^3+a_2s^2+a_3s+1 \tag{P5.34}$$

I varijanta

Iteracijske formule:

$$\left.\begin{array}{c} b_{01}=\dfrac{a_0}{a_2}; \qquad b_{11}=\dfrac{a_1}{a_2} \\ r_{1i}=a_3-b_{1,i-1}; \qquad r_{0i}=a_2-b_{0,i-1}-r_{1i}b_{1i} \\ s_i=a_1-r_{1i}b_{0,i-1} \\ b_{0i}=\dfrac{a_0}{r_{0i}}; \qquad b_{1i}=\dfrac{s_i}{r_{0i}}; \qquad i=2,3,\ldots \end{array}\right\} \tag{P5.35}$$

Rastavljeni polinom:

$$A(s)=(b_0 s^2+b_1 s+1)(r_0 s^2+r_1 s+1) \tag{P5.36}$$

II varijanta

Iteracijske formule

$$\left.\begin{array}{c} c_1=\dfrac{a_0}{a_1} \\ q_{2i}=a_3-c_{i-1}; \quad q_{1i}=a_2-q_{2i}c_{i-1}; \quad q_{0i}=a_1-q_{1i}c_{i-1} \\ c_i=\dfrac{a_0}{q_{0i}}; \quad i=2, 3, \ldots \end{array}\right\} \tag{P5.37}$$

Rastavljeni polinom:

$$A(s)=(cs+1)(q_0 s^3+q_1 s^2+q_2 s+1) \tag{P5.38}$$

Primjer P5.2.

Rastaviti na elementarne faktore polinom:

$$A(s)=0{,}5s^4+5{,}6s^3+6{,}6s^2+6{,}1s+1$$

Uz pretpostavku da se može koristiti I varijanta (P5.35) rezultati proračuna dani su u tablici:

Broj približenja (i)	r_{1i}	r_{0i}	p_i	b_{0i}	b_{1i}
1	–	–	–	0,076	0,848
2	5,252	2,070	5,202	0,242	2,513
3	3,587	− 2,656	4,732	− 0,188	− 1,784

U tablici je vidljivo (promjena predznaka) da postupak određivanja koeficijenata b_0 i b_1 divergira, pa je potrebno proračun izvršiti pomoću II varijante – izrazi (P5.37):

Broj približenja (i)	q_{2i}	q_{1i}	q_{0i}	c_i
1	–	–	–	0,0893
2	6,0107	6,063	5,059	0,0988
3	6,0012	6,007	5,007	0,0999

Može se postaviti: $c=0{,}1$ i $q_2=q_1=6$, $q_0=5$. Tada prema (P5.38) proizlazi:

$$A(s)=(0{,}1s+1)(5s^3+6s^2+6s+1)$$

Polinom trećeg reda riješen je u primjeru P5.1, te je:

$$A(s)=(T_1^2 s^2+2\xi T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)$$

gdje su:

$T_1=1[s]$
$\xi\ =0{,}5$
$T_2=5[s]$
$T_3=0{,}1[s]$.

Polinom petog reda

$$A_{(s)}=a_0s^5+a_1s^4+a_2s^3+a_3s^2+a_4s+1 \quad \text{(P5.39)}$$

I varijanta

Iteracijske formule:

$$\left.\begin{array}{l} b_{01}=\dfrac{a_0}{a_2}; \qquad b_{11}=\dfrac{a_1}{a_2}; \\ r_{2i}=a_4-b_{1,i-1}; \qquad r_{1i}=a_3-b_{0,i-1}-r_{2i}b_{1,i-1}; \\ r_{0i}=a_2-r_{2i}b_{0,i-1}-r_{1i}b_{1,i-1}; \qquad s_i=a_1-r_{1i}b_{0,i-1}; \\ b_{0i}=\dfrac{a_0}{r_{0i}}; \qquad b_{1i}=\dfrac{s_i}{r_{0i}}; \qquad i=2,3,\dots \end{array}\right\} \quad \text{(P5.40)}$$

Rastavljeni polinom:

$$A(s)=(b_0s^2+b_1s+1)(r_0s^3+r_1s^2+r_2s+1) \quad \text{(P5.41)}$$

II varijanta

Iteracijske formule:

$$\left.\begin{array}{l} c_1=\dfrac{a_0}{a_1}; \\ q_{3i}=a_4-c_{i-1}; \qquad q_{2i}=a_3-q_{3i}c_{i-1}; \qquad q_{1i}=a_2-q_{21}c_{i-1}; \\ q_{0i}=a_1-q_{1i}c_{i-1}; \qquad c_i=\dfrac{a_0}{q_{0i}}; \qquad i=2,3,\dots \end{array}\right\} \quad \text{(P5.42)}$$

Rastavljeni polinom:

$$A(s)=(cs+1)(q_0s^4+q_1s^3+q_2s^2+q_3s+1) \quad \text{(P5.43)}$$

Primjer P5.3.

Rastaviti na elementarne faktore polinom:

$$A(s)=0{,}006s^5+0{,}116s^4+0{,}716s^3+1{,}71s^2+1{,}6s+1$$

Koristeći se izrazima (P5.40) proizlazi:

Broj približenja (i)	r_{2i}	r_{1i}	r_{0i}	s_i	b_{0i}	b_{1i}
1	–	–	–	–	0,00823	0,1620
2	1,4380	1,4687	0,4660	0,1037	0,01288	0,2225
3	1,3775	1,3906	0,3890	0,0981	0,01542	0,2522
4	1,3478	1,3547	0,3536	0,0951	0,01697	0,2689
5	1,3311	1,3350	0,3344	0,0933	0,01794	0,2790
6	1,3210	1,3235	0,3230	0,0923	0,01858	0,2858
7	1,3142	1,3158	0,3155	0,0916	0,01901	0,2903
8	1,3097	1,3108	0,3106	0,0911	0,01932	0,2933
9	1,3067	1,3074	0,3075	0,0907	0,01951	0,2950
10	1,3050	1,3055	0,3054	0,0905	0,01965	0,2963
11	1,3037	1,3041	0,3039	0,0904	0,01974	0,2975

Može se postaviti: $r_2 = r_1 = 1{,}3$; $r_0 = 0{,}3$ i $s = 0{,}09$. Proizlazi da je: $b_0 = 0{,}02$ i $b_1 = 0{,}3$. Prema (P5.41) je:

$$A(s) = (0{,}02s^2 + 0{,}3s + 1)(0{,}3s^3 + 1{,}3s^2 + 1{,}3s + 1)$$

Daljnja primjena metode Lina na ove polinome daje:

$$A(s) = (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4^2 s^2 + 2\xi T_4 s + 1)$$

gdje je:

$T_1 = 0{,}1\,[s]$ $\quad T_4 = 1\,[s]$
$T_2 = 0{,}2\,[s]$ $\quad \xi = 0{,}5$
$T_3 = 0{,}3\,[s]$

Polinom šestog reda

$$A(s) = a_0 s^6 + a_1 s^5 + a_2 s^4 + a_3 s^3 + a_4 s^2 + a_5 s + 1 \tag{P5.44}$$

I varijanta

Iteracijske formule:

$$\left.\begin{aligned}
&b_{01} = \frac{a_0}{a_2}; \qquad b_{11} = \frac{a_1}{a_2};\\
&r_{3i} = a_5 - b_{1,\,i-1}; \qquad r_{2i} = a_4 - b_{0,\,i-1} - r_{31} b_{1,\,i-1};\\
&r_{1i} = a_3 - r_{3i} b_{0,\,i-1} - r_{2i} b_{1,\,i-1};\\
&\ldots\\
&r_{0i} = a_2 - r_{2i} b_{0,\,i-1} - r_{1i} b_{1,\,i-1};\\
&s_i = a_1 - r_{1i} b_{0,\,i-1};\\
&b_{0i} = \frac{a_0}{r_{0i}}; \qquad b_{1i} = \frac{s_i}{r_{0i}}; \qquad i = 2, 3, \ldots
\end{aligned}\right\} \tag{P5.45}$$

Rastavljeni polinom:

$$A(s) = (b_0 s^4 + b_1 s + 1)(r_0 s^4 + r_1 s^3 + r_2 s^2 + r_3 s + 1) \tag{P5.46}$$

II varijanta

Iteracijske formule:

$$\left.\begin{aligned}
&c_1 = \frac{a_0}{a_1};\\
&q_{4i} = a_5 - c_{i-1}; \qquad q_{3i} = a_4 - q_{4i} c_{i-1}; \qquad q_{2i} = a_3 - q_{3i} c_{i-1}\\
&q_{1i} = a_2 - q_{2i} c_{i-1}; \qquad q_{0i} = a_1 - q_{1i} c_{i-1};\\
&c_i = \frac{a_0}{q_{0i}}; \qquad i = 2, 3, \ldots
\end{aligned}\right\} \tag{P5.47}$$

Rastavljeni polinom:

$$A(s) = (cs + 1)(q_0 s^5 + q_1 s^4 + q_2 s^3 + q_3 s^2 + q_4 s + 1) \tag{P5.48}$$

LITERATURA

[1] Demidovich, B. P., Maron I. A. *Computational Mathematics*, Mir, Moscow, 1976.

[2] Курош, А. Г., *Курс высшей алгебры*, Наука, Москва, 1968.

[3] Кузовков, Н. Т., *Теория автоматического регулирования, основанная на частотных методах*, Оборонгиз, Москва, 1960.

[4] Кузовков, Н. Т., *Динамика систем автоматического управления*, Машиностроение, Москва, 1968.

[5] Lin, S., *A Method of Successive Approximations for Evaluating the Real and Complex Roots of Cubic and Higher-Order Equations*, J. Math. Phys., Vol. 20, No. 3, August 1941.

[6] Загускин, Л. Б., *Справочник по численным методам решения уравнений*, Физматгиз, Москва, 1960.

TIPIČNE KRIVULJE MJESTA KORIJENA

Broj	$G_0(s)$	Krivulja mjesta korijena	Broj	$G_0(s)$	Krivulja mjesta korijena
1.	$\frac{1}{s-s_1}$	s_1	8.	isto kao 5. s_1, s_2 kompleksni	s_1 z_1 s_2
2.	$\frac{s-z_1}{s-s_1}$	s_1 z_1	9.	$\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}$	s_3 s_1 s_2
3.	$\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}$	s_2 s_1	10.	$\frac{1}{s(s-s_2)(s-s_3)}$	s_3 s_1 s_2
4.	$\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}$ s_1, s_2 kompleksni	s_1 s_2	11.	$\frac{1}{(s-s_1)^3}$	s_1
5.	$\frac{(s-z_1)}{(s-s_1)(s-s_2)}$ $z_1 < s_1, s_2$	s_2 z_1	12.	$\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}$ s_1, s_2 su kompleksni	s_2 s_1 s_3
6.	kao 5. $s_2 < z_1 < s_1$	s_2 z_1 s_1	13.	kao 12.	s_2 s_1 s_3
7.	kao 5. $s_1, s_2 < z_1$	s_2 s_1 z_1	14.	kao 12.	s_2 s_1 s_3

Broj	$G_0(s)$	Krivulja mjesta korijena	Broj	$G_0(s)$	Krivulja mjesta korijena
15.	$\frac{(s-z_1)}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}$		22.	$\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{s(s-s_2)(s-s_3)}$ $z_2<s_3<z_1<s_2<0$	
16.	kao 15.		23.	kao 22.	
17.	kao 15.		24.	kao 22.	
18.	kao 15.		25.	$\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)}$ svi polovi realni	
19.	$\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}$		26.	kao 25. 2 pola realna 2 pola kompleksna	
20.	kao 19.		27.	kao 26.	
21.	$\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-s_1)^3}$ $z_2<z_1<s_1$		28.	kao 25. svi polovi kompleksni	

FORMULE ZA RJEŠAVANJE INTEGRALA I_n

$$I_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{b(s)\,b(-s)}{c(s)\,c(-s)}\,ds$$

gdje je:

$$b(s) = b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \ldots + b_0$$

$$c(s) = c_n s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \ldots + c_0$$

Red polinoma n	Formula za rješenje integrala I_n
1	$I_1 = \frac{b_0^2}{2c_0c_1}$
2	$I_2 = \frac{b_1^2c_0 + b_0^2c_2}{2c_0c_1c_2}$
3	$I_3 = \frac{b_2^2c_0c_1 + (b_1^2 - b_0b_2)\,c_0c_3 + b_0^2c_2c_3}{2c_0c_3\,(-c_0c_3 + c_1c_2)}$
4	$I_4 = \frac{1}{\Delta_4}[b_3^2\,(-c_0^2c_3 + c_0c_1c_2) + (b_2^2 - 2b_1b_3)\,c_0c_1c_4 +$ $+ (b_1^2 - 2b_0b_2)\,c_0c_3c_4 + b_0^2\,(-c_1c_4^2 + c_2c_3c_4)]$ gdje je: $\Delta_4 = 2c_0c_4\,(-c_0c_3^2 - c_1^2c_4 + c_1c_2c_3)$
5	$I_5 = \frac{1}{2\Delta_5}[b_4^2m_0 + (b_3^2 - 2b_2b_4)\,m_1 + (b_2^2 - 2b_1b_3 + 2b_0b_4)\,m_2 +$ $+ (b_1^2 - 2b_0b_2)\,m_3 + b_0^2m_4]$ gdje su: $m_0 = \frac{1}{c_5}(c_3m_1 - c_1m_2)$; $m_3 = \frac{1}{c_0}(c_2m_2 - c_4m_1)$; $m_1 = -c_0c_3 + c_1c_2$; $m_4 = \frac{1}{c_0}(c_2m_3 - c_4m_2)$; $m_2 = -c_0c_5 + c_1c_4$; $\Delta_5 = c_0\,(c_1m_4 - c_3m_3 + c_5m_2)$

Red polinoma n	Formula za rješenje integrala I_n
6	$I_6=\frac{1}{2\Delta_6}[b_5^2m_0+(b_4^2-2b_3b_5)\,m_1+(b_3^2-2b_2b_4+2b_1b_5)\,m_2+$ $+(b_2^2-2b_1b_3+2b_0b_4)\,m_3+(b_1^2-2b_0b_2)\,m_4+b_0^2m_5]$ gdje su: $m_0=\frac{1}{c_6}(c_4m_1-c_2m_2+c_0m_3);$ $m_1=-c_0c_1c_5+c_0c_3^2+c_1^2c_4-c_1c_2c_3$ $m_2=c_0c_3c_5+c_1^2c_6-c_1c_2c_5;$ $m_3=c_0c_5^2+c_1c_3c_6-c_1c_4c_5;$ $m_4=\frac{1}{c_0}(c_2m_3-c_4m_2+c_6m_1);$ $m_5=\frac{1}{c_0}(c_2m_4-c_4m_3+c_6m_2);$ $\Delta_6=c_0\,(c_1m_5-c_3m_4+c_5m_3)$
7	$I_7=\frac{1}{2\Delta_7}[b_6^2m_0+(b_5^2-2b_4b_6)\,m_1+(b_4^2-2b_3b_5+2b_2b_6)\,m_2+$ $+(b_3^2-2b_2b_4+2b_1b_5-2b_0b_6)\,m_3+(b_2^2-2b_1b_3+2b_0b_4)\,m_4+$ $+(b_1^2-2b_0b_2)\,m_5+b_0^2m_6]$ gdje su: $m_0=\frac{1}{c_7}(c_5m_1-c_3m_2+c_1m_3);$ $m_1=-(c_1c_4-c_0c_5)^2+(c_0c_3-c_1c_2)\,(c_0c_7-c_1c_6+$ $+c_2c_5-c_3c_4);$ $m_2=(c_0c_7-c_1c_6)\,(-c_0c_5+c_1c_4)+(c_0c_3-c_1c_2)\cdot$ $\cdot(c_2c_7)-c_3c_6);$ $m_3=-(c_0c_7-c_1c_6)^2+(c_0c_3-c_1c_2)\,(c_4c_7-c_5c_6);$ $m_4=\frac{1}{c_0}(c_2m_3-c_4m_2+c_6m_1);$ $m_5=\frac{1}{c_0}(c_2m_4-c_4m_3+c_6m_2);$

Red polinoma n	Formula za rješenje integrala I_n
7	$m_6 = \frac{1}{c_0}(c_2 m_5 - c_4 m_4 + c_6 m_3);$ $\Delta_7 = c_0(c_1 m_6 - c_3 m_5 + c_5 m_4 - c_7 m_3)$
8 8	$I_8 = \frac{1}{2\Delta_8}[b_7^2 m_0 + (b_6^2 - 2b_5 b_7)\, m_1 + (b_5^2 - 2b_4 b_6 + 2b_3 b_7)\, m_2 +$ $+ (b_4^2 - 2b_3 b_5 + 2b_2 b_6 - 2b_1 b_7)\, m_3 + (b_3^2 - 2b_2 b_4 +$ $+ 2b_1 b_5 - 2b_0 b_6)\, m_4 + (b_2^2 - 2b_1 b_3 + 2b_0 b_4)\, m_5 +$ $+ (b_1^2 - 2b_0 b_2)\, m_6 + b_0^2 m_7]$ gdje su: $m_0 = \frac{1}{c_8}(c_6 m_1 - c_4 m_2 + c_2 m_3 - c_0 m_4);$ $m_1 = (c_0 c_7 + c_2 c_5)(-c_0 c_1 c_7 + c_0 c_3 c_5 + 2c_1^2 c_6) +$ $+ (c_3 c_7 - c_5^2)(c_0^2 c_5 + c_1 c_2^2) + c_1 c_3 c_8 (c_0 c_3 - c_1 c_2) -$ $- c_1^2 c_8 (c_0 c_5 - c_1 c_4) + (-c_2 c_7 + c_3 c_6 - c_4 c_5) \cdot$ $\cdot (c_0 c_3^2 + c_1^2 c_4) - c_1 c_6 (c_1^2 c_6 + 3c_0 c_3 c_5) -$ $- c_1 c_2 c_3 (c_3 c_6 - c_4 c_5) + 2c_0 c_1 c_4 c_5^2;$ $m_2 = (c_0 c_3 - c_1 c_2)(c_0 c_7^2 - c_1 c_5 c_8 - c_1 c_6 c_7 + c_2 c_5 c_7) +$ $+ (c_3 c_8 - c_4 c_7)(-c_0 c_1 c_5 + c_0 c_3^2 - c_1 c_2 c_3 + c_1^2 c_4) -$ $- c_0 c_5 c_7 (c_0 c_5 - c_1 c_4) + c_1^2 c_8 (c_0 c_7 - c_1 c_6);$ $m_3 = -c_1 (c_1 c_8 - c_2 c_7)^2 + (-c_5 c_8 + c_6 c_7)(c_0 c_1 c_5 -$ $- c_0 c_3^2 + c_1 c_2 c_3 - c_1^2 c_4) + c_0 c_7^2 (-c_0 c_5 + c_1 c_4 + c_2 c_3) - 2c_0 c_1 c_3 c_7 c_8;$ $m_4 = (-c_5 c_8 + c_6 c_7)(2c_0 c_1 c_7 - c_0 c_3 c_5 + c_1 c_2 c_5 - c_1^2 c_6) +$ $+ (-c_3 c_8 + c_4 c_7)(c_0 c_3 c_7 - c_1 c_2 c_7 + c_1^2 c_8) - c_0^2 c_7^3;$ $m_5 = \frac{1}{c_0}(c_2 m_4 - c_4 m_3 + c_6 m_2 - c_8 m_1);$ $m_6 = \frac{1}{c_0}(c_2 m_5 - c_4 m_4 + c_6 m_3 - c_8 m_2);$ $m_7 = \frac{1}{c_0}(c_2 m_6 - c_4 m_5 + c_6 m_4 - c_8 m_3);$ $\Delta_8 = c_0 (c_1 m_7 - c_3 m_6 + c_5 m_5 - c_7 m_4)$

Red polinoma n	Formula za rješenje integrala I_n
9	$I_9 = \frac{1}{2\Delta_9}[b_8^2 m_0 + (b_7^2 - 2b_6b_8)\, m_1 + (b_6^2 - 2b_5b_7 +$ $+ 2b_4b_8)\, m_2 + (b_5^2 - 2b_4b_6 + 2b_3b_7 - 2b_2b_8)\, m_3 +$ $+ (b_4^2 - 2b_3b_5 + 2b_2b_6 - 2b_1b_7 + 2b_0b_8)\, m_4 +$ $+ (b_3^2 - 2b_2b_4 + 2b_1b_5 - 2b_0b_6)\, m_5 + (b_2^2 - 2b_1b_3 +$ $+ 2b_0b_4)\, m_6 + (b_1^2 - 2b_0b_2)\, m_7 + b_0^2 m_8];$ gdje su: $m_0 = \frac{1}{c_9}(c_7m_1 - c_5m_2 + c_3m_3 - c_1m_4);$ $m_1 = a_1(a_1a_{10} - a_2a_9 + a_3a_6 + a_3a_8 + 2a_4a_6 - a_5^2 -$ $- a_5a_7 - a_7^2) + a_2(-a_2a_6 - a_3a_7 + a_4a_5 + 2a_4a_7) - a_4^3;$ $m_2 = a_1(a_3a_9 + a_4a_9 - a_5a_8 + a_6a_7 - a_7a_8) +$ $+ a_2(-a_2a_9 + a_4a_8 + a_7^2) - a_4^2a_7;$ $m_3 = a_1(a_3a_{10} + a_4a_{10} + a_7a_9 - a_8^2) +$ $+ a_2(-a_2a_{10} + a_7a_8) - a_4a_7^2;$ $m_4 = a_1(a_5a_{10} + 2a_7a_{10} - a_8a_9) + a_2(a_7a_9 - a_4a_{10}) - a_7^3;$ $m_5 = \frac{1}{c_0}(c_2m_4 - c_4m_3 + c_6m_2 - c_8m_1);$ $m_6 = \frac{1}{c_0}(c_2m_5 - c_4m_4 + c_6m_3 - c_8m_2);$ $m_7 = \frac{1}{c_0}(c_2m_6 - c_4m_5 + c_6m_4 - c_8m_3);$ $m_8 = \frac{1}{c_0}(c_2m_7 - c_4m_6 + c_6m_5 - c_8m_4);$
9	$\Delta_9 = c_0(c_1m_8 - c_3m_7 + c_5m_6 - c_7m_5 + c_9m_4);$ $a_1 = c_1c_2 - c_0c_3;$ $a_6 = c_5c_6 - c_4c_7;$ $a_2 = c_1c_4 - c_0c_5;$ $a_7 = c_1c_8 - c_0c_9;$ $a_3 = c_3c_4 - c_2c_5;$ $a_8 = c_3c_8 - c_2c_9;$ $a_4 = c_1c_6 - c_0c_7;$ $a_9 = c_5c_8 - c_4c_9;$ $a_5 = c_3c_6 - c_2c_7;$ $a_{10} = c_7c_8 - c_6c_9$

Red poli-noma n	Formula za rješenje integrala I_n
	$I_{10}=\frac{1}{2\Delta_{10}}[b_9^2 m_0+(b_8^2-2b_7b_9)\, m_1+(b_7^2-2b_6b_8+$
	$+2b_5b_9)\, m_2+(b_6^2-2b_5b_7+2b_4b_8-2b_3b_9)\, m_3+$
	$+(b_5^2-2b_4b_6+2b_3b_7-2b_2b_8+2b_1b_9)\, m_4+$
10	$+(b_4^2-2b_3b_5+2b_2b_6-2b_1b_7+2b_0b_8)\, m_5+$
	$+(b_3^2-2b_2b_4+2b_1b_5+2b_0b_6)\, m_6+(b_2^2-2b_1b_3+$
	$+2b_0b_4)\, m_7+(b_1^2-2b_0b_2)\, m_8+b_0^2 m_9];$
	gdje je:
	$m_0=\frac{1}{c_{10}}(c_8m_1-c_6m_2+c_4m_3-c_2m_4+c_0m_5);$
	$m_1=a_1[c_1\,(-a_2d_5+a_4d_4-a_5a_{10}-a_6d_2-2a_7a_{10}+a_8a_9+$
	$+a_9d_1)+c_3\,(a_1a_5+a_3a_{10}+a_4a_{10}-a_4d_3+a_5d_2+$
	$+a_7a_9-a_8^2-a_8d_1-d_1^2)+c_5\,(-a_1d_4+a_2d_3-a_3a_9-$
	$-a_3d_2-a_4a_9+a_5a_8-a_6a_7-a_7a_8+a_7d_1)+$
	$+c_7\,(a_1a_{10}-a_2a_9+a_3a_6+a_3a_8+a_3d_1+2a_4a_6+$
	$+a_4d_1-a_5^2-a_5a_7-a_7^2)]+a_2[c_1\,(a_4a_{10}+a_6d_1-$
	$-a_7a_9+d_1^2)+c_3\,(-a_2a_{10}-a_5d_1+a_7a_8+a_7d_1)+$
	$+c_5\,(a_2a_9+a_3d_1-a_4a_8-a_4d_1-a_7^2)+c_7\,(-a_2a_6-$
	$-a_2d_1+a_3a_7+a_4a_5+2a_4a_7)]+a_4[a_7\,(-c_3a_7+$
10	$+c_5a_4-2c_1d_1)+a_4\,(c_3d_1-c_7a_4)]+c_1a_7^3;$
	$m_2=a_1[c_1\,(-a_5d_4-a_7d_4+a_8d_3-a_{10}d_1+d_1d_3)+$
	$+c_3\,(a_3d_4+a_4d_4-a_8d_2+a_9d_1-d_1d_2)+$
	$+c_5\,(-a_3d_3-a_4d_3+a_5d_2-a_6d_1+a_7d_2)+$
	$+c_9\,(a_1a_{10}-a_2a_9+a_3a_6+a_3a_8+a_3d_1+2a_4a_6+$
	$+a_4d_1-a_5^2-a_5a_7-a_7^2)]+a_2[c_1\,(a_4d_4-a_7d_3)+$
	$+b_3\,(-a_2d_4+a_7d_2+d_1^2)+c_5\,(a_2d_3-a_4d_2-a_7d_1)+$
	$+c_9\,(-a_2a_6-a_2d_1-a_3a_7+a_4a_5+2a_4a_7)]+$
	$+a_4[d_1\,(-c_3a_7+c_5a_4-c_1d_1)-c_9a_4^2]+c_1a_7^2d_1;$
	$m_3=a_1[c_1\,(-a_5d_5-a_7d_5-d_1d_4+d_2d_3)+c_3\,(a_3d_5+$

Red polinoma n	Formula za rješenje integrala I_n
10	$+a_4d_5+d_1d_3-d_2^2)+c_3(-a_3d_3-a_4d_3+a_5d_2-a_6d_1+$ $+a_7d_2)+c_9(a_1d_4-a_2d_3+a_3d_2-a_3a_9+a_4a_9-$ $-a_5a_8+a_6a_7-a_7a_8-a_7d_1)]+a_2[c_1(a_4a_5-$ $-d_1d_3)+c_3(-a_2d_5+d_1d_2)+c_7(a_2d_3-a_4d_2-$ $-a_7d_1)+c_9(-a_2a_9-a_3d_1+a_4a_8+a_4d_1+a_7^2)]+$ $+a_4[a_4(c_7d_1-c_9a_7)-d_1^2c_3]+a_7d_1^2c_1;$ $m_4=a_1[c_1(-a_8d_5-2d_1d_5+d_2d_4)+c_5(a_3d_5+a_4d_5+$ $+d_1d_3-d_2^2)+c_7(-a_3d_4-a_4d_4+a_8d_2-a_9d_1+$ $+d_1d_2)+c_9(a_1d_5+a_3a_{10}+a_4a_{10}-a_4d_3+a_5d_2+$ $+a_7a_9-a_8^2-a_8d_1-d_1^2)]+a_2[c_1(a_7d_5-d_1d_4)+$ $+c_5(d_1d_2-a_2d_5)+c_7(a_2d_4-a_7d_2-d_1^2)+$ $+c_9(-a_2a_{10}-a_5d_1+a_7a_8+a_7d_1)]+a_4[c_9(-a_7^2+$ $+a_4d_1)+d_1(c_7a_7-c_5d_1)]+c_1d_1^3;$ $m_5=a_1[c_3(-a_8d_5-2d_1d_5+d_2d_4)+c_5(a_5d_5+a_7d_5+$ $+d_1d_4-d_2d_3)+c_7(-a_5d_4-a_7d_4+a_8d_3-a_{10}d_1+$ $+d_1d_3)+c_9(a_2d_5-a_4d_4+a_5a_{10}+a_6d_2+$ $+2a_7a_{10}-a_8a_9-a_9d_1)]+a_2[c_3(a_7d_5-d_1d_4)+$ $+c_5(d_1d_3-a_4d_5)+c_7(a_4d_4-a_7d_3)+c_9(-a_4a_{10}-$ $-a_6d_1+a_7a_9-d_1^2)]+a_7[c_9(2a_4d_1-a_7^2)+$ $+d_1(c_7a_7-c_5d_1)]+d_1^2(c_3d_1-c_7a_4);$ $m_6=\frac{1}{c_0}(c_2m_5-c_4m_4+c_6m_3-c_8m_2+c_{10}m_1);$ $m_7=\frac{1}{c_0}(c_2m_6-c_4m_5+c_6m_4-c_8m_3+c_{10}m_2);$ $m_8=\frac{1}{c_0}(c_2m_7-c_4m_6+c_6m_5-c_8m_4+c_{10}m_3);$ $m_9=\frac{1}{c_0}(c_2m_8-c_4m_7+c_6m_6-c_8m_5+c_{10}m_4);$ $\Delta_{10}=c_0(c_1m_9-c_3m_8+c_5m_7-c_7m_6+c_9m_5);$

Red polinoma n	Formula za rješenje integrala I_n		
10	$a_1 = c_1c_2 - c_0c_3$;	$a_6 = c_5c_6 - c_4c_7$;	$d_1 = c_1c_{10}$;
	$a_2 = c_1c_4 - c_0c_5$;	$a_7 = c_1c_8 - c_0c_9$;	$d_2 = c_3c_{10}$;
	$a_3 = c_3c_4 - c_2c_5$;	$a_8 = c_3c_8 - c_2c_9$;	$d_3 = c_5c_{10}$;
	$a_4 = c_1c_6 - c_0c_7$;	$a_9 = c_5c_8 - c_4c_9$;	$d_4 = c_7c_{10}$;
	$a_5 = c_3c_6 - c_2c_7$;	$a_{10} = c_7c_8 - c_6c_9$;	$d_5 = c_9c_{10}$

Formule za određivanje koeficijenata regulacijskog odstupanja sistema (zatvorenog jediničnom negativnom povratnom vezom) na osnovi prijenosne funkcije otvorenog kruga

Tablica 7.1.

Prijenosna funkcija otvorenog kruga $Go(s)$	Koeficijenti regulacijskog odstupanja			
	C_0	C_1	C_2	C_3
$\frac{K(b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_2 s^2 + b_1 s + 1)}{c_n s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \ldots + c_2 s^2 + c_1 s + 1}$	$\frac{1}{1+K}$	$\frac{c_1-(c_1+Kb_1)C_0}{1+K}$	$c_2-(c_2+Kb_2)C_0- -\frac{-(c_1+Kb_1)C_1}{1+K}$	$c_3-(c_3+Kb_3)C_0-(C_2+Kb_2)C_1- -\frac{-(c_1+Kb_1)C_2}{1+K}$
$\frac{K(b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_2 s^2 + b_1 s + 1)}{s(c_{n-1}s^{n-1} + c_{n-2}s^{n-2} + \ldots + c_2 s^2 + c_1 s + 1)}$	0	$\frac{1}{K}$	$\frac{c_1-(1+Kb_1)C_1}{K}$	$\frac{c_2-(c_1+Kb_2)C_1-(1+Kb_1)C_2}{K}$
$\frac{K(b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_2 s^2 + b_1 s + 1)}{s^2(c_{n-2}s^{n-2} + c_{n-3}s^{n-3} + \ldots + c_2 s^2 + c_1 s + 1)}$	0	0	$\frac{1}{K}$	$\frac{c_1-Kb_1C_2}{K}$

Formule za određivanje koeficijenata regulacijskog odstupanja sistema (zatvorenog jediničnom negativnom povratnom vezom) na osnovi prijenosne funkcije zatvorenog sistema po signalu razlike

Tablica 7.2.

Prijenosna funkcija zatvorenog sistema po signalu razlike $G_e(s)$	Koeficijenti regulacijskog sistema			
	C_0	C_1	C_2	C_3
$\frac{K(b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_2 s^2 + b_1 s + 1)}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + 1}$	K	$K(b_1 - a_1)$	$K[b_2 - b_1 a_1 - (a_2 - a_1^2)]$	$K[b_3 - b_2 a_1 - b_1(a_2 - a_1^2) - (a_3 - 2a_2 a_1 + a_1^3)]$
$\frac{Ks(b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \ldots + b_2 s^2 + b_1 s + 1)}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + 1}$	0	K	$K(b_1 - a_1)$	$K[b_2 - b_1 a_1 - (a_2 - a_1^2)]$
$\frac{Ks^2(b_{n-2}s^{n-2} + b_{n-3}s^{n-3} + \ldots + b_2 s^2 + b_1 s + 1}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + 1}$	0	0	K	$K(b_1 - a_1)$

Tablica Z-transformacije i modificirane Z-transformacije

Tablica 1.

Broj	$g(t)$	$G(s)$	$G(z)$	$G(z, m) = z^{-1} \cdot G(z, \mu)$
1	$\delta(t-kT)$	e^{-kTs}	z^{-k}	z^{m-1-k}
2	$\delta(t)$	1	1 ili z^{-0}	0
3	$S(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\frac{1}{z-1}$
4	t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{T[mz+(1-m)]}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{2!}t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$	$\frac{T^2}{2}\left[\frac{m^2}{z-1}+\frac{2m+1}{(z-1)^2}+\frac{2}{(z-1)^3}\right]$

Tablica 1.

Broj	$g(t)$	$G(s)$	$G(z)$	$G(z, m) = z^{-1} \cdot G(z, \mu)$
6	$\frac{1}{3!} t^3$	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{T^3 (z^2+4z+1)}{6(z-1)^4}$	$\frac{T^3}{6}\left[\frac{m^3}{z-1}+\frac{3m^2+3m+1}{(z-1)^2}+\frac{6m+6}{(z-1)^3}+\frac{6}{(z-1)^4}\right]$
7	$\frac{1}{n!} t^n$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\lim_{a \to 0} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)$	$\lim_{a \to 0} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}\right)$
8	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
9	$a^{t/T}$	$\frac{1}{s-\frac{1}{T} \ln a}$	$\frac{z}{z-a}$	$\frac{a^m}{z-a}$
10	te^{-aT}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$	$\frac{Te^{-emT}[e^{-aT}+m(z-e^{-aT})]}{(z-e^{-aT})^2}$

Tablica 1.

Broj	$g(t)$	$G(s)$	$G(z)$	$G(z, m)=z^{-1}\cdot G(z, \mu)$
11	$\frac{t^2}{2}e^{-aT}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{T^2e^{-aT}}{2(z-e^{-aT})^2}+\frac{T^2e^{-2aT}z}{(z-e^{-aT})^3}$	$\frac{T^2e^{-amT}}{2}\left[\frac{m^2}{z-e^{-aT}}+\frac{(2m+1)e^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}+\frac{2e^{-2aT}}{(z-e^{-aT})^3}\right]$
12	$\frac{t^n}{n!}e^{-aT}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$	$\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)$	$\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}\right)$
13	$1-e^{-aT}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1-e^{-aT})_z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$	$\frac{1}{(z-1)}-\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
14	$t-\frac{1-e^{-aT}}{a}$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{(1-e^{-aT})_z}{a(z-1)(z-e^{-aT})}$	$\frac{T}{(z-1)^2}+\frac{mT-1/a}{z-1}+\frac{e^{-amT}}{a(z-e^{-aT})}$
15	$\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\frac{z\sin\omega_0 T}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}$	$\frac{z\sin m\omega_0 T+\sin(1-m)\omega_0 T}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}$

Tablica 1.

Broj	$g(t)$	$G(s)$	$G(z)$	$G(z, m)=z^{-1}\cdot G(z, \mu)$
16	$\cos\omega_0 t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\dfrac{z(z-\cos\omega_0 T)}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}$	$\dfrac{z\cos m\omega_0 T-\cos(1-m)\omega_0 T}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}$
17	$\dfrac{1}{2!}\left(t^2-\dfrac{2}{a}t+\dfrac{2}{a^2}-\dfrac{2}{a^2}e^{-aT}\right)$	$\dfrac{a}{s^2(s+a)}$	$\dfrac{T^2 z}{(z-1)^3}+\dfrac{(aT-2)Tz}{2a(z-1)^2}+\dfrac{z}{a^2(z-1)}-\dfrac{z}{a^2(z-e^{-aT})}$	$\dfrac{T^2}{(z-1)^3}+\dfrac{T^2(m+1/2)-T/a}{(z-1)^2}+\dfrac{T^2m^2/2-Tm/a+1/a^2}{z-1}-\dfrac{e^{-amT}}{a^2(z-e^{-aT})}$
18	$\dfrac{1}{k!}\Big[t^k-\dfrac{k}{a}t^{k-1}+\dfrac{k(k-1)}{a^2}t^{k-2}-\ldots+(-1)^{k-1}\dfrac{k!}{a^k}t+(-1)^k\dfrac{k!}{a^k}\Big]+(-1)^{k+1}\dfrac{e^{-aT}}{a^k}$	$\dfrac{a}{s^{k+1}(s+a)}$	$\dfrac{(-1)^{k+1}}{a^k(1-e^{-aT}z^{-1})}+\dfrac{a}{k!}\lim_{x\to 0}\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\left[\dfrac{7}{(x+a)(1-e^{Tx}z^{-1})}\right]$	$\dfrac{(-1)^{k+1}}{a^k}\cdot\dfrac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}+\dfrac{a}{k!}\lim_{x\to 0}\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\left[\dfrac{e^{mTx}}{(x+a)(z-e^{Tx})}\right]$

Tablica 1.

Broj	$g(t)$	$G(s)$	$\overline{G(z)}$	$G(z, m)=z^{-1} \cdot G(z, \mu)$
19	$\text{sh}\,\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2-\omega_0}$	$\frac{z\,\text{sh}\,\omega_0 T}{z^2-2z\,\text{ch}\,\omega_0 T+1}$	$\frac{z\,\text{sh}\,m\omega_0 T+\text{sh}\,(1-m)\,\omega_0 T}{z^2-2z\,\text{ch}\,\omega_0 T+1}$
20	$\text{ch}\,\omega_0 t$	$\frac{s}{s^2-\omega_0^2}$	$\frac{z\,(z-\text{ch}\,\omega_0 T)}{z^2-2z\,\text{ch}\,\omega_0 T+1}$	$\frac{z\,\text{ch}\,m\omega_0 T-\text{ch}\,(1-m)\,\omega_0 T}{z^2-2z\,\text{ch}\,\omega_0 T+1}$
21	$\text{ch}\,\omega_0 t-1$	$\frac{\omega_0^2}{s\,(s^2-\omega_0^2)}$	$\frac{z\,(z-\text{ch}\,\omega_0 T)}{z^2-2z\,\text{ch}\,\omega_0 T+1}-\frac{z}{z-1}$	$\frac{z\,\text{ch}\,m\omega_0 T-\text{ch}\,(1-m)\,\omega_0 T}{z^2-2z\,\text{ch}\,\omega_0 T+1}-$ $-\frac{1}{z-1}$
22	$1-\cos\omega_0 t$	$\frac{\omega_0^2}{s\,(s^2+\omega_0^2)}$	$\frac{z}{z-1}-\frac{z\,(z-\cos\omega_0 T)}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}$	$\frac{1}{z-1}-\frac{z\cos m\omega_0 T-\cos(1-m)\,\omega_0 T}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}$
23	$a-a\sec\theta\cos(\omega_0 t+\theta)$ gdje je: $\theta=\text{arctg}\frac{\omega_0}{a}$	$\frac{\omega_0^2\,(s+a)}{s\,(s^2+\omega_0^2)}$	$\frac{az}{z-1}-$ $-\frac{az^2-az\sec\theta\cos(\omega_0 T+\theta)}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}$	$\frac{a}{z-1}-\frac{a\sec\theta\,\{z\cos(m\omega_0 T+\theta)-}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}$ $\frac{-\cos[(1-m)\,\omega_0 T+\theta]\}}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}$

Tablica 1.

Broj	$g(t)$	$G(s)$	$G(z)$	$G(z, m)=z^{-1} \cdot G(z, \mu)$
24	$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}-\frac{z}{z-e^{-bT}}$	$\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}-\frac{e^{-bmT}}{z-e^{-bT}}$
25	$(c-a)e^{-at}+(b-c)e^{-bt}$	$\frac{(b-a)(s+c)}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{(c-a)z}{z-e^{-aT}}+\frac{(b-c)z}{z-e^{-bT}}$	$\frac{(c-a)e^{-amT}}{z-e^{-aT}}+\frac{(b-c)e^{-bmT}}{z-e^{-bT}}$
26	$1+\frac{b}{b-a}e^{-at}-$ $-\frac{a}{a-b}e^{-bt}$	$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{z}{z-1}+\frac{bz}{(a-b)(z-e^{-aT})}-$ $-\frac{az}{(a-b)(z-e^{-bT})}$	$\frac{1}{z-1}+\frac{be^{-amT}}{(a-b)(z-e^{-aT})}-$ $-\frac{ae^{-bmT}}{(a-b)(z-e^{-bT})}$
27	$c+\frac{b(c-a)}{a-b}e^{-at}+$ $+\frac{a(b-c)}{a-b}e^{-bt}$	$\frac{ab(s+c)}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{cz}{z-1}+\frac{b(c-a)z}{(a-b)(z-e^{-aT})}+$ $+\frac{a(b-c)z}{(a-b)(z-e^{-bT})}$	$\frac{c}{z-1}+\frac{b(c-a)e^{-amT}}{(a-b)(z-e^{-aT})}+$ $+\frac{a(b-c)e^{-bmT}}{(a-b)(z-e^{-bT})}$

Tablica 1.

Broj	$g(t)$	$G(s)$	$G(z)$	$G(z, m)=z^{-1} \cdot G(z, \mu)$
28	$abt-(a+b)- \frac{b^2}{a-b}e^{-at}+ \frac{a^2}{a-b}e^{-bt}$	$\frac{a^2b^2}{s^2(s+a)(s+b)}$	$\frac{abTz}{(z-1)^2}-\frac{(a+b)z}{z-1}- \frac{b^2z}{(a-b)(z-e^{-aT})}+ \frac{a^2z}{(a-b)(z-e^{-bT})}$	$\frac{abT}{(z-1)^2}+\frac{abmT-(a+b)}{z-1}- \frac{b^2e^{-amT}}{(a-b)(z-e^{-aT})}+ \frac{a^2e^{-bmT}}{(a-b)(z-e^{-bT})}$
29	$abct+[ab-c(a+b)] -\frac{b^2(c-a)}{a-b}e^{-at} -\frac{a^2(b-c)}{a-b}e^{-bT}$	$\frac{a^2b^2(s+c)}{s^2(s+a)(s+b)}$	$\frac{abcTz}{(z-1)^2}+\frac{ab-c(a+b)z}{z-1}- \frac{b^2(c-a)z}{(a-b)(z-e^{-aT})}- \frac{a^2(b-c)z}{(a-b)(z-e^{-bT})}$	$\frac{abcT}{(z-1)^2}+\frac{ab(1+cmT)-c(a+b)}{z-1} -\frac{b^2(c-a)e^{-amT}}{(a-b)(z-e^{-aT})}- \frac{a^2(b-c)e^{-bmT}}{(a-b)(z-e^{-bT})}$
30	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+ \frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+ \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{z}{(b-a)(c-a)(z-e^{-aT})}+ \frac{z}{(a-b)(c-b)(z-e^{-bT})}+ \frac{z}{(a-c)(b-c)(z-e^{-cT})}$	$\frac{e^{-amT}}{(b-a)(c-a)(z-e^{-aT})}+ \frac{e^{-bmT}}{(a-b)(c-b)(z-e^{-bT})}+ \frac{e^{-cmT}}{(a-c)(b-c)(z-e^{-cT})}$

Tablica 1.

Broj	$g(t)$	$G(s)$	$G(z)$	$G(z, m)=z^{-1}\cdot G(z, \mu)$
31	$1-(1+at)e^{-at}$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}-\frac{aTe^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$	$\frac{1}{z-1}-\left[\frac{1+amT}{z-e^{-aT}}+\frac{aTe^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}\right]e^{-amT}$
32	$b-be^{-at}+a(a-b)te^{-at}$	$\frac{a^2(s+b)}{s(s+a)^2}$	$\frac{bz}{z-1}-\frac{bz}{z-e^{-aT}}+\frac{a(a-b)Te^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$	$\frac{b}{z-1}+\left[\frac{amT(a-b)-b}{z-e^{-aT}}+\frac{aT(a-b)e^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}\right]e^{-amT}$
33	$at-2+(at+2)e^{-at}$	$\frac{a^3}{s^2(s+a)^2}$	$\frac{(aT+2)z-2z^2}{(z-1)^2}+\frac{2z}{z-e^{-aT}}+\frac{aTe^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$	$\frac{aT}{(z-1)^2}+\frac{amT-2}{z-1}-\left[\frac{amT-2}{z-e^{-aT}}-\frac{aTe^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}\right]e^{-amT}$

Tablica 1.

Broj	$g(t)$	$G(s)$	$G(z)$	$G(z, m)=z^{-1}\cdot G(z, \mu)$
34	$e^{-bt}-e^{-at}+$ $+(a-b)\,te^{-at}$	$\frac{(a-b)^2}{(s+b)(s+a)^2}$	$\frac{z}{z-e^{-bT}}-\frac{z}{z-e^{-aT}}+$ $+\frac{(a-b)\,Te^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$	$\frac{e^{-bmT}}{z-e^{-bT}}+\left[\frac{mT(a-b)-1}{z-e^{-aT}}+\right.$ $\left.+\frac{(a-b)\,Te^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}\right]e^{-amT}$
35	$(c-b)\,e^{-bt}+$ $+(b-c)\,e^{-at}-$ $-(a-b)(c-a)\,te^{-at}$	$\frac{(a-b)^2(s+c)}{(s+b)(s+a)^2}$	$\frac{(c-b)\,z}{z-e^{-bT}}+\frac{(b-c)\,z}{z-e^{-aT}}-$ $-\frac{(a-b)(c-a)\,Te^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$	$\frac{(c-b)\,e^{-bmT}}{z-e^{-bT}}-$ $-\left[\frac{mT(a-b)(c-a)-(b-c)}{z-e^{-aT}}+\right.$ $\left.+\frac{(a-b)(c-a)\,Te^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}\right]e^{-amT}$

Tablica 2.

Sistem	Transformacija izlaznog signala $y(t)$		
	L-transformacija	Z-transformacija	Z_m-transformacija
$U(s)$, $U^*(s)$, $G(s)$, $Y(s)$	$G(s) \cdot U^*(s)$	$G(z) \cdot U(z)$	$G(z, m) \cdot U(z)$
$U(s)$, $G(s)$, $Y(s)$, $Y^*(s)$	$GU^*(s)$	$GU(z)$	$GU(z)$
$U(s)$, $E(s)$, $E^*(s)$, $G_1(s)$, $Y(s)$, $G_2(s)$, $-$	$\dfrac{G_1(s)\,U^*(s)}{1+G_1G_2{}^*(s)}$	$\dfrac{G_1(z)\,U(z)}{1+G_1G_2(z)}$	$\dfrac{G_1(z, m)\,U(z)}{1+G_1G_2(z)}$
$U(s)$, $E(s)$, $G_1(s)$, $Y_1(s)$, $Y_1^*(s)$, $G_2(s)$, $Y(s)$, $G_3(s)$, $-$	$\dfrac{G_2(s)\,G_1U^*(s)}{1+G_1G_2G_3(s)}$	$\dfrac{G_2(z)\,G_1U(z)}{1+G_1G_2G_3(z)}$	$\dfrac{G_2(z, m)\,G_1U(z)}{1+G_1G_2G_3(z)}$

Tablica 2.

Sistem	Transformacija izlaznog signala $y(t)$		
	L-transformacija	Z-transformacija	Z_m-transformacija
U(s) E(s) E*(s) G1(s) G2(s) Y(s) G3(s)	$\dfrac{G_1^*(s)\,G_2(s)\,U^*(s)}{1+G_1^*(s)\,G_2G_3^*(s)}$	$\dfrac{G_1(z)\,G_2(z)\,U(z)}{1+G_1(z)\,G_2G_3(z)}$	$\dfrac{G_1(z)\,G_2(z,m)\,U(z)}{1+G_1(z)\,G_2G_3(z)}$
U(s) E(s) G1(s) G2(s) G3(s) Y(s) G4(s)	$\dfrac{G_2^*(s)\,G_3(s)\,G_1U^*(s)}{1+G_2^*(s)\,G_1G_3G_4^*(s)}$	$\dfrac{G_2(z)\,G_3(z)\,G_1U(z)}{1+G_3(z)\,G_1G_3G_4(z)}$	$\dfrac{G_2(z)\,G_3(z,m)\,G_1U(z)}{1+G_2(z)\,G_1G_3G_4(z)}$
U(s) E(s) G1(s) Y(s) G2(s)	$\dfrac{G_1(s)\,U^*(s)}{1+G_1^*(s)\,G_2^*(s)}$	$\dfrac{G_1(z)\,U(z)}{1+G_1(z)\,G_2(z)}$	$\dfrac{G_1(z,m)\,U(z)}{1+G_1(z)\,G_2(z)}$
U(s) E(s) G1(s) G2(s) Y(s) G3(s)	$\dfrac{G_1^*(s)\,G_2(s)\,U^*(s)}{1+G_1^*(s)\,G_2^*(s)\,G_3^*(s)}$	$\dfrac{G_1(z)\,G_2(z)\,U(z)}{1+G_1(z)\,G_2(z)\,G_3(z)}$	$\dfrac{G_1(z)\,G_2(z,m)\,U(z)}{1+G_1(z)\,G_2(z)\,G_3(z)}$

Tablica 2.

Sistem	Transformacija izlaznog signala $y(t)$		
	L-transformacija	Z-transformacija	Z_m-transformacija
	$G_1(s)U(s) - \frac{G_1(s)G_2(s)G_1U(s)}{1+G_1G_2^*(s)}$	$\frac{G_1U(z)}{1+G_1G_2(z)}$	$UG_1(z,m) - \frac{G_1G_2(z,m)UG_1(z)}{1+G_1G_2(z)}$

LINEARNA ALGEBRA – PODSJETNIK

Matrica

Matrica je skup od $m \times n$ veličina (realnih ili kompleksnih) poredanih u pravokutno polje od m stupaca i n redaka. Ako je $m=n$, matrica je kvadratna.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \vdots & \ddots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m \neq n$ pravokutna matrica
$m=n$ kvadratna matrica

Vektor

Vektor je matrica s jednim stupcem (stupčani vektor), ili jednim retkom (redni vektor). Vektor je veličina zadana iznosom i smjerom.

$$\underline{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_m \end{bmatrix} \text{ stupčani vektor}$$

$$\underline{x}^{\mathrm{T}}=[x_1, x_2, \ldots, x_n] \quad \text{redni vektor}$$

Skalar

Skalar je (fizikalna) veličina zadana numeričkim podatkom – iznosom te veličine. Skalar nema smjer. Matricu 1×1 reda treba razlikovati od skalara.

Dijagonalna matrica

Kvadratna matrica, kojoj su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nuli, naziva se dijagonalnom matricom.

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & a_{22} \cdots\cdots 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & 0 \cdots\cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

Jedinična matrica (matrica identiteta)

Jedinična matrica je ona matrica kojoj su svi elementi dijagonale jedinice.

$$\underline{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & 1 \cdots\cdots 0 \\ \vdots & \ddots \quad \vdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots 1 \end{bmatrix}=[\delta_{ij}]$$

gdje je:

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 \text{ za } i=j\\0 \text{ za } i\neq j\end{cases}$$

Nul-matrica

Nul-matrica je ona matrica kojoj su svi elementi nula.

$$\underline{0}=\begin{bmatrix}0 & 0 \cdots\cdots & 0\\0 & 0 \cdots\cdots & 0\\\vdots & \vdots \ddots & \vdots\\0 & 0 \cdots\cdots & 0\end{bmatrix}$$

Zbrajanje i oduzimanje matrica

Pod zbrojem (ili razlikom) dviju $m \times n$ matrica $\underline{A}$ i $\underline{B}$ razumijeva se $m \times n$ matrica $\underline{C}$, kojoj su elementi dobiveni zbrojem (razlikom) korespondentnih (elementi na istom položaju) elemenata matrica $\underline{A}$ i $\underline{B}$. Operacija je komutativna i asocijativna.

$$\underline{C}= =\underline{A}\pm\underline{B}$$

$$c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij} \quad (i=1, 2, \ldots, m; \quad j=1, 2, \ldots, n)$$

Množenje matrica

Produkt matrice $\underline{A}$ $(m \times n)$-tog reda s matricom $\underline{B}$ $(n \times p)$-tog reda definira se za slučaj da je broj stupaca prve matrice jednak broju redaka druge matrice.

$$\underline{C}=\underline{A}\cdot\underline{B}$$

$$c_{ij}=\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rj} \quad (i=1, 2, \ldots, m; \quad j=1, 2, \ldots, p)$$

Zakon komutacije za množenje matrica općenito ne vrijedi, dok zakon asocijacije i distribucije vrijedi. U slučaju kada je $\underline{A}\cdot\underline{B}=\underline{B}\cdot\underline{A}$ matrice $\underline{A}$ i $\underline{B}$ su komutativne.

Jednakost matrica

Dvije matrice $\underline{A}$ i $\underline{B}$ jednake su samo ako su istog reda i ako su im korespondentni elementi jednaki.

$$\underline{A}-\underline{B}=\underline{0}$$

Transponirana matrica

Transponirana matrica $\underline{A}$, matrice $\underline{B}$ je matrica za koju vrijedi:

$$a_{ji}=b_{ij} \quad (i=1, 2, \ldots, m; \quad j=1, 2, \ldots, n)$$

Matrica $\underline{A}$ označava se s $\underline{B}^T$. Ako se pravokutna matrica preklopi preko glavne dijagonale, dobit će se transponirana matrica. Također vrijedi da je $[\underline{A}\cdot\underline{B}]^T=\underline{B}^T\cdot\underline{A}^T$.

Simetrična matrica

Ako je $\underline{A}^T=\underline{A}$ tada je matrica $\underline{A}$ simetrična matrica.

Kososimetrična (antisimetrična) matrica

Ako je $\underline{A}^T = -\underline{A}$ tada je matrica $\underline{A}$ kososimetrična ili antisimetrična.

Gornja trokutasta matrica

Kvadratna matrica $\underline{A} = [a_{ij}]$ gornja je trokutasta matrica, ako su joj elementi *ispod* glavne dijagonale nula.

$$a_{ij} = 0 \quad \text{za} \quad i > j.$$

Jedinična matrica i nul-matrica n-tog reda trokutaste su matrice.

Donja trokutasta matrica

Kvadratna matrica $\underline{A}$ donja je trokutasta matrica, ako je $\underline{A}^T$ gornja trokutasta matrica.

Hermitska matrica

Kvadratna matrica $\underline{A} = [a_{ij}]$ je hermitska, ako je $adj\,\underline{A} = \underline{A}$, tj.

$$\bar{a}_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

Antihermitska matrica

Kvadratna matrica $\underline{A} = [a_{ij}]$ je antihermitska, ako je $adj\,\underline{A} = -\underline{A}$, tj.

$$\bar{a}_{ij} = -a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

Singularna i nesingularna matrica

Kvadratna matrica je singularna, ako je determinanta njenih elemenata jednaka nuli. Singularna matrica *nema* inverzne matrice. Ako je determinanta matrice različita od nule tada je matrica nesingularna.

Subdeterminanta (minor)

Ako se precrta i-ti redak i j-ti stupac u kojem se nalazi neki element a_{ij} determinante D, tada shema preostalih elemenata tvori determinantu, koja ima jedan redak i jedan stupac manje od prvobitne determinante a naziva se subdeterminantom D_{ij} elementa a_{ij}.

Kofaktor

Kofaktor (A_{ij}) elementa u i-tom retku i j-tom stupcu matrice je iznos subdeterminante (D_{ij}) s predznakom.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}.$$

Recipročna matrica

Recipročna matrica $\underline{A}^*$, kvadratne matrice $\underline{A} = [a_{ij}]$, jest matrica kofaktora A_{ij} elemenata a_{ij} zadane matrice.

$$\underline{A}^* = [A_{ij}].$$

Trag matrice

Zbroj elemenata kvadratne matrice $\underline{A}$ koji se nalaze na glavnoj dijagonali zove se trag matrice $\underline{A}$.

$$tr\,\underline{A} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Adjungirana matrica (transponirano-recipročna matrica)

Adjungirana matrica matrice $\underline{A}=[a_{ij}]$ $(m \times n)$-tog reda jest matrica $\underline{C}=[c_{ij}]$ $(n \times m)$-tog reda za koju je:

$$c_{ij}=\bar{a}_{ji} \quad (i=1, 2, \dots, n; \quad j=1, 2, \dots, m).$$

Matrica $\underline{C}$ se označava sa $adj\,\underline{A}$.

Ako je $\underline{A}$ realna matrica, onda je

$$adj\,\underline{A}=A^{T}.$$

Inverzna matrica

Inverzna matrica $\underline{A}^{-1}$, neke kvadratne matrice $\underline{A}$, definirana je svojstvom da pomnožena slijeva ili zdesna s $\underline{A}$ daje jediničnu matricu $\underline{I}$.

$$\underline{A}^{-1}\cdot\underline{A}=\underline{A}\cdot\underline{A}^{-1}=\underline{I}.$$

Također vrijedi:

$$\underline{A}^{-1}=\frac{A_{ij}}{|A|}=\frac{adj\,\underline{A}}{|A|} \quad \text{za } |A|\neq 0.$$

Regularna (invertibilna) matrica nesingularna je matrica. Matrica nije regularna ako je singularna.

Konjugirana matrica

Konjugirana matrica $(\tilde{\underline{A}})$ dobija se tako da se svi elementi originalne matrice nadomjeste svojim konjugirano-kompleksnim vrijednostima.

Transponirano-konjugirana matrica

Transponirano-konjugirana matrica $\tilde{\underline{A}}^{T}$ dobije se preklapanjem konjugirane matrice oko glavne dijagonale.

Deriviranje matrice

Deriviranje matrice obavlja se deriviranjem svih njezinih elemenata.

$$\frac{d}{dt}[\underline{A}(t)]=\dot{\underline{A}}(t)=[\dot{a}_{ij}(t)] \quad (i=1,\dots, m; \quad j=1,\dots, n).$$

Integriranje matrica

Integriranje matrice obavlja se tako da se integrira svaki element matrice:

$$\int\underline{A}(t)\,dt=\left[\int a_{ij}(t)\,dt\right] \quad \text{za } (i=1, 2,\dots, m; \quad j=1, 2,\dots, n).$$

Množenje matrice sa skalarom

Množenje matrice sa skalarom obavlja se tako da se svi elementi matrice pomnože sa skalarom:

$$\lambda\cdot\underline{A}=[\lambda\cdot a_{ij}] \quad (i=1, 2,\dots, m; \quad j=1,\dots, n).$$

Elementarne transformacije nad matricom

Elementarne transformacije nad matricom jessu:

a) zamjena dvaju redaka ili stupaca,

b) množenje retka ili stupca skalarom različitim od nule,

c) zbrajanje pomnoženog retka (stupca) s drugim retkom (stupcem).

Elementarnim transformacijama moguće je svesti bilo koju matricu na dijagonalni oblik.

Vektorski prostor matrica

Vektorski prostor matrica neprazan je podskup (X) skupa (M_{mn}), nad poljem (K), ako zajedno s bilo koje dvije matrice ($\underline{A}, \underline{B}$) iz podskupa ($X$), svaka njihova linearna kombinacija također leži u podskupu (X), tj. vrijedi

$$X \subseteq M_{mm}$$

$$\lambda \underline{A} + \mu \underline{B} \in X$$

za sve $\underline{A}$, $\underline{B} \in X$ i sve λ, $\mu \in \underline{K}$.

Elementi polja $\underline{K}$ su skalari.

Elementi vektorskog prostora su vektori.

Vektore iz vektorskog prostora X ne treba dovoditi u vezu s usmjerenim duljinama.

Linearna nezavisnost

Za vektore $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m$ vektorskog prostora kažemo da su linearno nezavisni ako za sve skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ vrijedi:

$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \ldots + \lambda_m \underline{a}_m = 0 \quad \text{za} \quad \lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_m = 0.$$

Ako vektori nisu linearno nezavisni, onda su linearno zavisni. Kod linearno zavisnih vektora barem jedan vektor je linearna kombinacija preostalih vektora sistema.

Ako je neki od vektora $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m$ nul-vektor, onda su oni linearno zavisni.

Ako među vektorima $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m$ ima jednakih, onda su vektori $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m$ linearno zavisni.

Baza vektorskog prostora

Uređena p-torka ($\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p$) vektora prostora X zove se baza u X, ako ima ova dva svojstva:

a) svaki vektor $\underline{b} \in X$ linearan je spoj vektora $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p$,

b) vektora $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p$ linearno su nezavisni; $\underline{b} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \underline{a}_k$.

Skalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ jednoznačno su određeni vektorom $\underline{b}$ i bazom ($\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p$), pa se zovu koordinate ili komponente vektora $\underline{b}$ u bazi ($\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p$).

Bilo koje dvije baze prostora $X \subseteq M_{mm}$ imaju jednako mnogo elemenata. Taj se broj elemenata zove dimenzija prostora X i označava se $dim\,X$.

Stupci $\underline{e}_j\, j = 1, 2, \ldots, n$) jedinične matrice $\underline{I}$ n-tog reda tvore bazu u prostoru K_n. Baza ($e_1, \ldots, e_n$) zove se kanonska baza.

Kvadratna matrica $\underline{A}$ n-tog reda regularna je ako, i samo ako, su joj stupci linearno nezavisni.

Euklidski vektorski prostor R_n

Baza trodimenzionalnog euklidskog prostora (e_1, e_2, e_3), zove se ortonormirana baza, ako su vektori e_i jedinični i među sobom okomiti. Česta oznaka takve baze su tzv. ortovi ($\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$). Ako su $\underline{a}$ i $\underline{b}$ bilo koja dva vektora takvog prostora, tada je:

$$\underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3 = a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j} + a_3 \bar{k}$$

$$\underline{b} = b_1 \underline{e}_1 + b_2 \underline{e}_2 + b_3 \underline{e}_3 = b_1 \bar{i} + b_2 \bar{j} + b_3 \bar{k}.$$

Skalarni produkt vektora $\underline{a}$ i $\underline{b}$ izražen je preko njihovih komponenata u odnosu na ortonormiranu bazu:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Skalarni produkt rednog vektora $\underline{x}=[x_1, \ldots, x_n]$ sa stupčanim vektorom $\underline{y}=[y_1, \ldots, y_n]^T$ ostvaruje se množenjem pripadnih korespondentnih elemenata i njihovim zbrajanjem. Takav umnožak zove se unutrašnji produkt ili skalarni produkt (jer je rezultat skalar):

$$\underline{x}^T \cdot \underline{y} \equiv \underline{x} \cdot \underline{y} \equiv (\underline{x}|\underline{y}) = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} =$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Za prostor $\underline{R}_n$ u kojem je uveden skalarni produkt kažemo da je euklidski vektorski prostor. Ako je skalarni produkt dvaju vektora jednak nuli, tada su vektori ortogonalni. Vektori su ortonormirani ako su ortogonalni i ako je $|a_i|=1$ za svaki i. Kanonska baza je primjer ortonormiranog skupa.

Norma vektora

Norma vektora definirana je kao:

$$||\underline{x}||^2 = \underline{x}^T \cdot \underline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

Norma je realan pozitivan broj $||\underline{x}||$ koji ima sljedeća svojstva:

a) $||\underline{x}||=0$ za $\underline{x}=\underline{0}$, tj. $x_i=0$

b) $||c\underline{x}||=|c| \cdot ||\underline{x}||$ za sve skalare c i vektore $\underline{x}$

c) $||\underline{x}_1+\underline{x}_2|| \leq ||\underline{x}_1||+||\underline{x}_2||$ za sve $\underline{x}_1$ i $\underline{x}_2$ (nejednadžba trokuta).

Tri najčešće norme jesu:
1. euklidska norma (duljina vektora)

$$||\underline{x}||_2 = \sqrt{(\underline{x}|\underline{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

2. $||\underline{x}||_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

3. $||\underline{x}||_\infty = {}_{\max}(|x_1|, |x_2|)$.

Skalarni produkt vektora sa samim sobom daje kvadrat euklidske norme:

$$\underline{x}^T \cdot \underline{x} = ||\underline{x}||^2 .$$

Ortogonalna matrica

Ako je matrica $\underline{A}$ takva da vrijedi:

$$\underline{A}^T \cdot \underline{A} = \underline{A} \cdot \underline{A}^T = \underline{I}$$

tada se $\underline{A}$ zove ortogonalna matrica. Ako je $\underline{A}$ ortogonalna matrica, onda je i $\underline{A}^{-1}=\underline{A}^T$ također ortogonalna matrica. Stupci (reci) ortogonalne matrice čine ortonormiranu bazu u R_n.

Svaku bazu prostora R_n moguće je tzv. Gram – Schmidtovim postupkom ortogonalizacije zamijeniti s ortonormiranom bazom.

Karakteristična vrijednost i karakterističan vektor matrice

Matrica $\underline{A}$ je realna n-tog reda. Realan *broj* λ_0 zove se karakteristična vrijednost matrice $\underline{A}$, ako postoji *vektor* takav da je:

$$\underline{A} \cdot \underline{m}_0 = \lambda_0 \cdot \underline{m}_0 .$$

Vektor $\underline{m}_0$ je *karakterističan vektor* matrice $\underline{A}$ koji *pripada karakterističnoj vrijednosti* λ_0.

Osnovni teorem

Ako u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru postoje dva vektorska sistema od kojih je prvi linearno nezavisan i može se izraziti linearnom kombinacijom članova drugog, tada je broj vektora u prvom sistemu manji ili jednak broju vektora u drugom.

Rang matrice

Ako je dan sistem od n-dimenzionalnih vektora, često se postavlja pitanje je li taj sistem vektora linearno zavisan ili nezavisan. Formiranjem matrice u kojoj će vektori sistema biti njeni stupci, te računanjem ranga ove matrice, moguće je odgovoriti na ovo pitanje. Rang matrice jednak je maksimalnom broju linearno nezavisnih stupaca matrice. Rang matrice jednak je najvećem redu subdeterminante (minora) koja je različita od nule.

Pri određivanju ranga matrice potrebno je ispitivati subdeterminante počevši od najnižeg reda prema subdeterminantama višeg reda. Ako u matrici postoji barem jedna subdeterminanta k-tog reda različita od nule, dok su *sve* subdeterminante $(k+1)$-og reda (ako ih ima) koje graniče s tom subdeterminantom jednake nuli, tada matrica ima rang k-tog reda. Rang matrice može se odrediti pošto se matrica elementarnim transformacijama svede na matricu s jedinicama na glavnoj dijagonali, a nulama izvan nje. Broj jedinica u glavnoj dijagonali tada je jednak rangu matrice.

Nul-matrica je nultog ranga.

Jedinična matrica n-tog reda je n-tog ranga.

Elementarne transformacije nad matricom ne mijenjaju rang matrice.

Caley-Hamiltonov teorem

Svaka matrica jest korijen svojeg karakterističnog polinoma.

Kvadratna forma

Kvadratna forma $V(\underline{x})$ od n nepoznanica $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je suma od koje je svaki član kvadrat jedne nepoznanice ili produkt dviju različitih nepoznanica:

$$V(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$$= a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \ldots + a_{nn} x_n^2.$$

Kvadratna forma $V(\underline{x})$ je:

a) pozitivno semidefinitna (poluodređena) ako je $V(\underline{x}) \geq 0$ za svaki $\underline{x} \in R_n$,
b) negativno semidefinitna (poluodređena)ako je $V(\underline{x}) \leq 0$ za svaki $\underline{x} \in R_n$,
c) pozitivno definitna (određena) ako je $V(\underline{x}) \geq 0$ za svaki $\underline{x} \in R_n$ i ako je $V(\underline{x}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$,
d) negativno definitna (određena) ako je $V(\underline{x}) \leq 0$ za svaki $\underline{x} \in R_n$ i ako je $V(\underline{x}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$.

LITERATURA

[1] Blanuša, D., *Viša Matematika* I dio, prvi svezak, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970.
[2] Demidovich, *B. P., Maron, I. A., Computational Mathematics*, Mir, Moscow, 1976.
[3] Efimov, N. V., Rozendorn, E. R., *Linear Algebra and Multidimensional Geometry*, Mir, Moscow, 1975.
[4] Faddeeva, V. N., *Computational Methods of Linear Algebra*, Dover Publ. Inc., 1959.
[5] Гантмахер, Ф. Р., *Теория матриц*, Москва, 1954.
[6] Kopchenova, N. V., Maron, I. A., *Computational Mathematics*, Worked examples and problems with elements of theory, Mir, Moscow, 1975.
[7] Kurepa, S., *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1978.
[8] Kurosh, A. G., *Higher Algebra*, Mir, Moscow, 1980.
[9] Mitrinović, D. S., *Matrice i determinante*, Zbornik zadataka i problema, Naučna knjiga, Beograd, 1970.

LITERATURA

[1] Auslander, D., Takahashi, Y., Rabins, M. J., *Introducing Systems and Control*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1974.

[2] Батоврин, А. А., Дашевский, П. Г., Лебедев, В. Д., Марков, Б. А., Чичерин, Н. И., *Цифровые следящие сисшемы судовой авшомашики*, Судостроение, Ленинград, 1972.

[3] Бесекерский, В. А., Попов, Е. П., *Теория сисшем авшомашическоiо реiулированияя*, Наука, Москва, 1972.

[4] Бесекерский, В. А., (ред.), *Сборник задач йо шеорий авшомашическоiо реiулирования и уйравления*, Наука, Москва, 1978.

[5] Цыпкин, Я. З., *Теория линейных имиульсных сисшем*, Физматгиз, Москва, 1963.

[6] Цыпкин, Я. З., *Основы шеории авшомашических сисшем*, Наука, Москва, 1977.

[7] Cohn, A., *Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraichen Gleichung in einem Kreise*, Math. Z., 14, 1922, 110–148.

[8] Чемоданов, Б. К., (ред.), *Машемашические основы шеории авшомашическоiо реiулирования*, Высшая школа, Москва, 1971.

[9] D'Azzo, J. J., Houpis, C. H., *Feedback Control System Analysis and Synthesis*, McGraw-Hill Book Co., Kogakusha Ltd., Tokyo, 1966.

[10] Doetsch, G., *Anleitung zum praktischen gebrauch der Laplacetranformation und der Z*-transformation, R. Oldenbourg, München, Wien, 1967.

[11] Elgerd, O. I., *Control Systems Theory*, McGraw-Hill Kogakusha Ltd., Tokyo, 1967.

[12] Falb, P. L., Wolovich, W. A., *Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-12, 651–659, 1967.

[13] Gilbert, E. G., *Controllability and Observability in Multivariable Control Systems*, J. Control, SIAM, Ser, A., Vol. 1, No. 2, 128–151, 1963.

[14] Greensite, A. L., *Elements of Modern Control Theory*, Spartan Books, New York, 1970.

[15] Grujić, T. Lj., *Diskretni sistemi*, Mašinski fakultet, Beograd, 1980.

[16] Grujić, T. Lj., *Zadaci sa rešenjima iz automatskog upravljanja*, Mašinski fakultet, Beograd, 1980.

[17] Hsu, J. C., Meyer, A. U., *Modern Control Principles and Applications*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1960.

[18] Ivanšić, I., *Funkcije kompleksne varijable – Laplaceova transformacija*, Sveučilište, Zagreb, 1978.

[19] Иващенко, Н. Н., *Авшомашическое реiулирование*, Машиностроение, Москва, 1978.

[20] Jury, E. I., *Sampled-Data Control Systems*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1958.

[21] Jury, E. I., Blanchard, J., *Stability Test for Linear Discrete Systems in Table Form*, Proc, IRE, Vol. 49, 1947–1948, 1961.

[22] Jury, E. I., *Theory and Application of the Z-transform Method*, *John Wiley* & Sons. Inc., New York, 1964.

[23] Jury, E. I., *„Inners" Approach to Some Problems of System Theory*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-16, 233–240, 1971.

[24] Jury, E. I., *Inners and Stability of Dynamic Systems*, John Wiley & Sons. Inc., 1974.

[25] Kailath, T., *Linear Systems*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1980.

[26] Kalman, R. E., Bucy, R. S., *New Results in Linear Filtering and Prediction Theory*, Trans. ASME J. Basic Engrg., 83D, 95–108, 1961.

[27] Kalman, R. E., *Canonical Structure of Linear Dynamical Systems*, Proc. Nat. Acad. of Sci. – Mathematics, USA, Vol, 48, 596–600, 1962.

[28] Kalman, R. E., *Mathematical Description of Linear Dynamical Systems*, J. Control, SIAM, Ser. A., Vol. 1., No. 2., 152–192, 1963.

[29] Kalman, R. E., *Introduction to the Algebraic Theory of Linear Dynamical Systems*, Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, Vol. 11., Springer, Berlin, 1969.

[30] Karnopp, D., Rosenberg, R., *Systems Dynamics: a Unified Approach*, John Wiley & Sons, Inc., 1975.

[31] Kuljača, Lj., *Teorija automatske regulacije – Analiza linearnih impulsnih sistema*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1969.

[32] Kuo, B. C., *Analysis and Synthesis of Sampled-Data Control Systems*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1963.

[33] Кузовков, Н. Т., Караданов, С. В., Салычев, О. С., *Непрерывные и дискретные системы управления и методы идентификации, Машиностроение, Москва*, 1978.
[34] Lathi, B. P., *Sygnals, Systems and Controls*, Intext Educational Publishers Inc., New York, 1974.
[35] Latzel, W., *Regulung mit dem Prozeßrechner* (DDC), Bibliographishes Institut AG, Zürich, 1977.
[36] Layton, J. M., *Multivariable Control Theory*, Peter Peregrinus Ltd., Stevenage, 1976.
[37] Liapunov, A. M., *Probleme generale de la Stabilite du mouvement*, Annales de la Faculte des Science de Toulouse, 1907. Također u *Annals of Mathematics Study*, No. 17, Princeton, N. J., Princeton Univ. Press, 1947.
[38] Luenberger, D. G., *Observers for Multivariable Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-11, 190–197, 1966.
[39] Макаров, И. М., Менский, Б. М., *Линейные автоматические системы*, Машиностроение, Москва, 1977.
[40] Martin, H. R., *Introduction to Feedback Systems*, McGraw-Hill Book Co., London, 1968.
[41] Мееров, М. В., Михайлов, Ю. Н., Фридман, В. Г., *Основы автоматического управления*, Недра, Москва, 1972.
[42] Melsa, J. L., Schultz, D. G., *Linear Control Systems*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1969.
[43] Milojković, B., Grujić, Lj., *Automatsko upravljanje*, Mašinski fakultet, Beograd, 1977.
[44] Morris, N., *Control Engineering*, McGraw-Hill Book Co., London, 1974.
[45] Netushil, A., *Theory of Automatic Control*, Mir, Moskva, 1973.
[46] Николаев, Ю. А., Петухов, В. П., Феликсов, Г. И., Чемоданов, Б. К., *Динамика цифровых следящих систем*, Енергия, Москва, 1970.
[47] Ogata, K., *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, Inc., 1970.
[48] Owens, D. H., *Feedback and Multivariable Systems*, Peter Peregrinus Ltd., Stevenage, 1978.
[49] Padulo, L., Arbib, M. A., *System Theory*, W. B. Saunders & Co., Philadelphia, 1974.
[50] Paynter, H. M., *Analysis and Design of Engineering Systems*, MIT Press, 1961.
[51] Porter, B., *Reachalibility and Controllability of Discrete-Time Linear Dynamical Systems*, Int. J. General Systems, Vol. 2., 115, 1975.
[52] Power, H. M., Simpson, R. J., *Introduction to Dynamics and Control*, McGraw-Hill Book Co., London, 1978.
[53] Richards, R. J., *An Introduction to Dynamics & Control*, Longman, New York, 1979.
[54] Rosenbrock, H. H., *Computer Aided Control System Design*, Academic Press, London, 1974.
[55] Schür, I., *Über Potenzreichen, die in Innern des Ernheitskreiss beschraukt sind*, J. Reine Angew. Math., 147, 205–233, 1917.
[56] Schür, I., *Über Polynome, die nur in Innern des Ernheitskreiss verschwinden*, J. Reine Angew. Math., 148, 122–145, 1918.
[57] Сигалов, Г. Г., Мадорский, Л. С., *Основы теории дискретных систем управления*, Вышзйшая школа, Минск, 1973.
[58] Солодовников, В. В., (ред.), *Техническая киберненmика — теория автоматического регулирования*, Машиностроение, Москва, 1969.
[59] Stojić, M., *Kontinualni sistemi automatskog upravljanja*, Naučna knjiga, Beograd, 1980.
[60] Суевалов, Л. Ф., *Справочник по расчетам судовых автоматических систем*, Судостроение, Ленинград, 1977.
[61] Шаталов, А. С., (ред.), *Задачник по теории автоматического управления*, Знергия, Москва, 1979.
[62] Шеридан, Т. Б., Феррелл, У. Р., *Системы человек — машина*. Машиностроение, Москва, 1980.
[63] Šurina, T., *Automatska regulacija*, Školska knjiga, Zagreb, 1981.
[64] Takahashi, Y., Rabins, M., Auslander, D., *Control*, Addison – Wesley, Reading, Mass., 1970.
[65] Tomović, R., *Analiza osjetljivosti dinamičkih sistema*, Zavod za izdavanje udžbenika SRS, Beograd, 1968.
[66] Топчеев, Ю. И., Цыпляков, А. П., *Задачник по теории автоматического регулирования*, Машиностроение, Москва, 1977.
[67] Tou, J. T., *Digital and Sampled-Data Control Systems*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1959.
[68] Tou, J. T., *Modern Control Theory*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1964.
[69] Truxal, J. G., *Introductory System Engineering*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1972.
[70] Воронов, А. А., *Основы теории автоматического управления*, Часть, I, II, III. Знергия, Москва – Ленинград, 1965 – 1970.
[71] Voronjec, K., Obradović, N., *Mehanika fluida*, Građevinska knjiga, Beograd, 1965.
[72] Wolovich, W. A., *Linear Multivariable Systems*, Springer, New York, 1974.
[73] Wonham, W. M., *Linear Multivariable Control: a Geometric Approach*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
[74] *Знциклопедия кибернетики*, Главная редакция Украинской Советской Знциклопедии, стр. 47, Киев, 1975.

KAZALO POJMOVA

33 *